Elektrotehnički fakultet u Beogradu,
Odsek za softversko inženjerstvo
šk. 2016/2017

Kombinatorika

Kombinatorika je matematička disciplina koja se bavi problemima postojanja, prebrojavanja i konstrukcije elemenata sa zadatim osobinama u konačnim skupovima.

Osnovni kombinatorni principi na kojima se zasnivaju skoro sva prebrojavanja su:

- princip jednakosti: Za konačne skupove A i B i bijekciju $f : A \to B$, važi $|A| = |B|$,
- princip zbira: za disjunktne i konačne skupove A i B važi $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- princip proizvoda: Za konačne skupove A i B važi $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

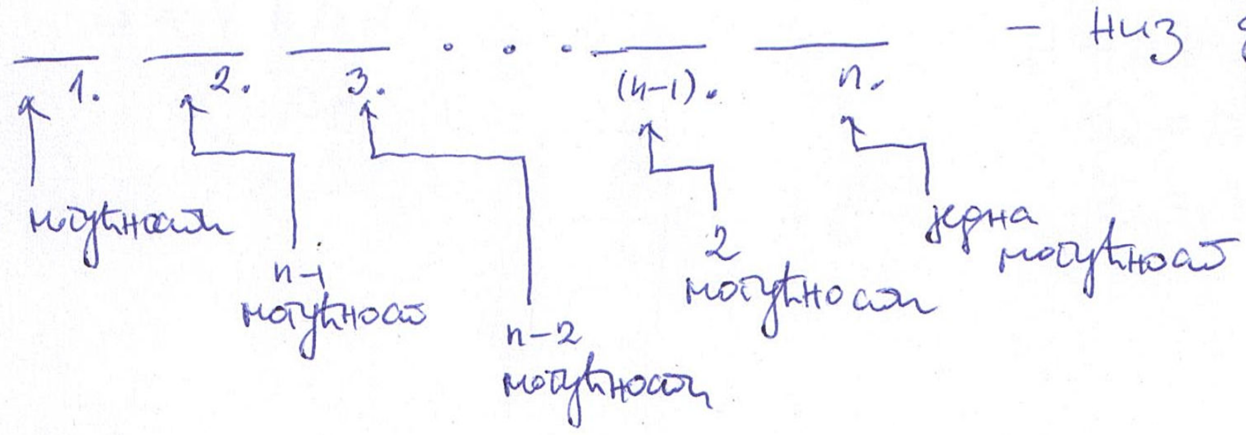
Osnovni kombinatorni objekti

Neka je $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Definicija 1. Permutacija skupa X_n je bilo koja uredjena n-torka (niz dužine n) različitih elemenata iz tog skupa.

Teorema 1. Broj permutacija skupa od n elemenata je $P_n = n!$.

— низ дужине n

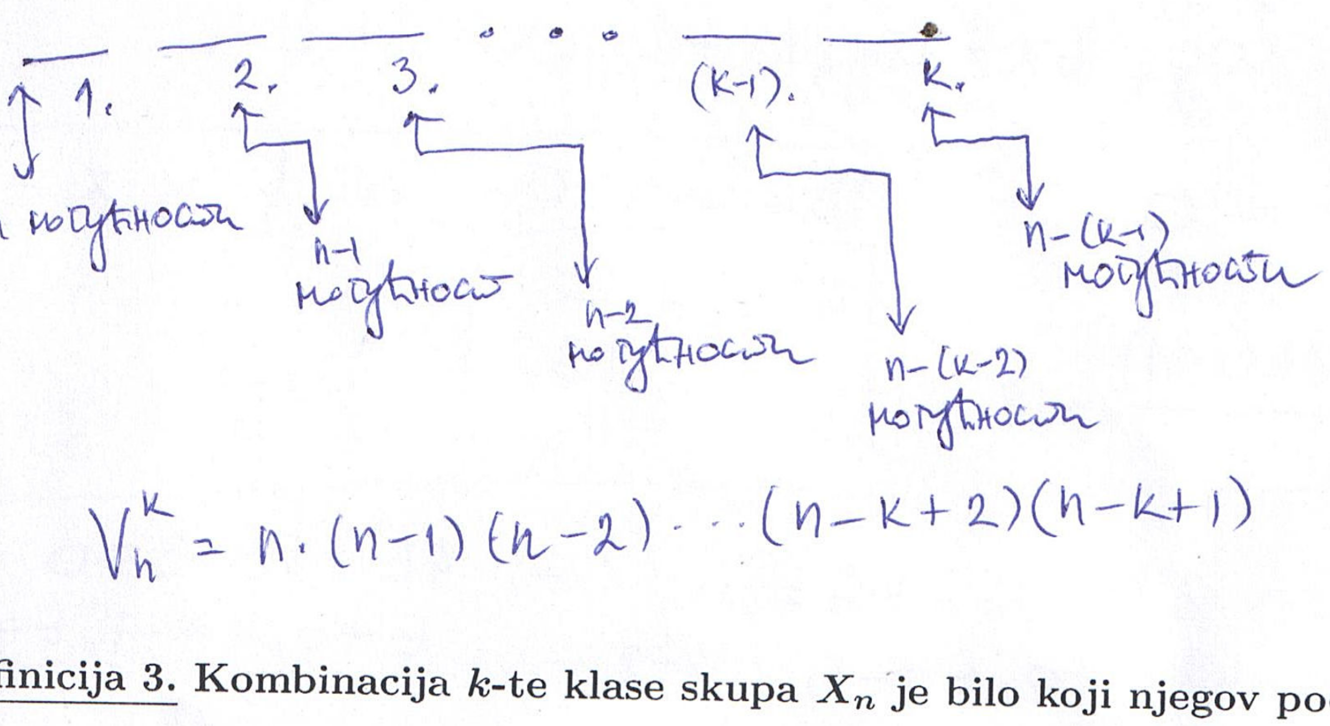


$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

ПРИМЕР:
$\{1, 2, 3\}$
низови су:
1 2 3   2 1 3   3 1 2
1 3 2   2 3 1   3 2 1
има их $3! = 6$

Definicija 2. Varijacija k-te klase skupa X_n je bilo koja uredjena k-torka (niz dužine k), $k \leq n$ različitih elemenata is tog skupa.

Teorema 2. Broj varijacija k-te klase skupa od n elemenata je $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$.



$$V_n^k = n \cdot (n-1)(n-2) \cdots (n-k+2)(n-k+1)$$

ПРИМЕР:
$\{1, 2, 3\}$ $k = 2$
низови су:
1 2   1 3   2 3
2 1   3 1   3 2
има их:
$V_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$

Definicija 3. Kombinacija k-te klase skupa X_n je bilo koji njegov podskup od k elemenata.

Teorema 3. Broj kombinacija k-te klase skupa od n elemenata je $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

РИМЕР: $\{1,2,3\}$ $k=2$
ОМБИНАЦИЈЕ КЛАСЕ 2 СУ: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$
ВАКА ОД ТИХ КОМБИНАЦИЈА ДАЈЕ 2! ВАРИЈАЦИЈА ИСТЕ КЛАСЕ
$1,2\} \to 12$ и 21 $\{1,3\} \to 13$ и 31 $\{2,3\} \to 23$ и 32
ВЕ ВАРИЈАЦИЈЕ КЛАСЕ k МОЖЕМО ДОБИТИ ТАКО ШТО ФОРМИРАМ
ВЕ КОМБИНАЦИЈЕ КЛАСЕ k (СВЕ k-ТОЧЛАНЕ ПОДСКУПОВЕ), А ЗАТИМ
СВАКОМ ОД ТИХ ПОДСКУПОВА ФОРМИРАМО СВЕ ПЕРМУТАЦИЈЕ
ЊИХОВИХ ЕЛЕМЕНАТА.

$$V_n^k = k!\, C_n^k \Rightarrow C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Definicija 4. Varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa X_n je bilo koja uredjena k-torka njegovih elemenata.

Teorema 4. Broj varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata je $\overline{V}_n^k = n^k$.

$\overline{}$ 1. $\overline{}$ 2. $\overline{}$ 3. . . . . $\overline{}$ $(k-1)$. $\overline{}$ k.

n могућности n могућности n могућности n могућности n могућности

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

ПРИМЕР:
$\{a,b,c\}$ $k=2$

aa ba ca
ab bb cb
ac bc cc

ИМА ИХ
$\overline{V}_3^2 = 3^2 = 9$

Definicija 5. (~~Varijacija~~ ПЕРМУТАЦИЈА sa ponavljanjem datog tipa)
ПЕРМ. ~~Varijacija sa~~ ponavljanjem k-te klase u kojoj se elementi $x_1, x_2, \dots x_n$ skupa X_n pojavljuju redom $m_1, m_2, \dots m_n$ puta $(m_1 + m_2 + \dots + m_n = k)$ je bilo koja uredjena k-torka njegovih elemenata u kojoj se za svako $i \in \{1, \dots n\}$ element x_i pojavljuje m_i puta.

Teorema 5. Broj ~~varijacija~~ ПЕРМУТАЦИЈА k-te klase sa ponavljanjem datog tipa, skupa od n elemenata je

$$\overline{V}_{m_1, m_2, \dots m_n} = \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_n)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_n!}.$$

ПРИМЕР: $a - m_1 = 2$, $b - m_2 = 1$ $c - m_3 = 1$
aabc abac abca baac baca b
aacb acab acba caab caba c

Definicija 6. Kombinacije k-te klase sa ponavljanjem skupa X_n je bilo koji *multiskup* sastavljen od tačno k ne obavezno različitih elemenata skupa X_n.

Teorema 6. Broj kombinacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata je
$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

ПРИМЕР:
$\{1,2,3\}$ $k=2$ $n=3$

11 22 33
12 23
13

ИМА ИХ: 6

0 – представља појављивање елемента x_i

1 – представља прелазак са x_{i-1} на x_i елемент

$11 \to 0011$
$12 \to 0101$
$13 \to 0110$
$22 \to 1001$
$23 \to 1010$
$33 \to 1100$

На 4 места распоре се 2 0 и 2 1
$\binom{4}{2} = 6$

УОПШТЕНО: ИМАМО k КРУЖИЋА и $n-1$ ЦРТИЦУ, и $n-1+k$ ме
$\binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$

Definicija 7. Neka je n prirodan broj, a $a_1, a_2, \ldots a_r$ prirodni brojevi takvi da važi $a_1 + a_2 + \ldots + a_r = n$. Reprezentacija broja n u obliku $a_1 + a_2 + \ldots + a_r = n$ naziva sa podela (ili razbijanje) tog broja, ili preciznije r-podela. нпр. $n=6$ 3-подела је $6 = 1+1+4$

Definicija 8. *Kompozicija broja* n je bilo koja uredjena podela, tj. podela kod koje je poredak bitan. *Particija broja* n je bilo koja neuredjena podela, tj. podela kod koje je poredak sabiraka nebitan.

Teorema 7. 1) Broj kompozicija broja n koje imaju r sabiraka je $\binom{n-1}{r-1}$.

2) Broj svih kompozicija broja n bez ograničenja na broj sabiraka jednak je 2^{n-1}.

$n=4$

композиције су: 1+3, 3+1, 2+2; 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1; 1+1+1+1.

партиције су: 4; 1+3, 2+2; 1+1+2; 1+1+1+1.

1) 000 . . . 0 — n кружића

$r-1$ црtица

црtице могу стајати само између кружића и нису ни на првом ни на посл. месту $\binom{n-1}{r-1}$

нпр. $1+3 \to 0|000$

број сабирака r креће се од 1 до n, дакле

$$\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1} = \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r} = 2^{n-1}$$

$$\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\cdot 1^{n-1-r}\cdot 1^{r} = (1+1)^{n-1}$$

Zadaci za vežbanje

1. Koliko ima četvorocifrenih brojeva čije su susedne cifre različite?
2. Koliko ima šestocifrenih brojeva u čijem zapisu postoje dve iste susedne cifre? сви шест. → $9\cdot 10^5 - 9^6$ ← они у к... су ар... разл...
3. Koliko ima četvorocifrenih brojeva koji se zapisuju pomoću dve različite cifre?
4. Koliko ima četvorocifrenih brojeva u čijem zapisu postoje najviše dve različite cifre?
5. Koliko ima desetocifrenih brojeva kod kojih su sve cifre različite?
6. Koliko ima trocifrenih brojeva u čijem zapisu su sve cifre različite?
7. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^5 u čijem zapisu nikoje dve susedne cifre nisu jednake?
8. Koliko ima prirodnih brojeva sa najviše 4 cifre u kojima se pojavljuju cifre 3 ili 5?
9. Ako su p i q prosti, a m i n prirodni brojevi, odrediti broj delilaca broja $p^m q^n$.
10. Koliko ima devetocifrenih brojeva u kojima se cifra 2 pojavljuje dva puta, cifra 3 tri puta, a cifra 4 se pojavljuje četiri puta?
11. U jednom odeljenju je 13 učenika i 13 učenica. Na koliko načina oni mogu da sednu u 13 klupa tako da u svakoj klupi bude učenik i učenica?
12. Od 10 učenika treba izabrati ekipu od 6 učenika, pri čemu medju tih 10 kandidata postoje 2 koji ne mogu biti zajedno u ekipi. Odrediti broj načina na koji se može formirati ekipa.
13. Koliko ima šestocifrenih brojeva čiji je zbir cifara neparan?
14. Na koliko načina se mogu izabrati tri broja iz skupa prirodnih brojeva $\{1, 2, 3, \ldots, 40\}$ tako da im zbir bude neparan broj?

15. Koliko ima šestocifrenih brojeva kod kojih parne i neparne cifre dolaze naizmenično (gde je 0 paran broj)?

16. Koliko ima četvorocifrenih brojeva deljivih sa 4 čije su cifre međusobno različite?

17. Koliko ima sedmocifrenih brojeva koji se čitaju isto s početka i s kraja?

18. Koliko ima permutacija skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ u kojima cifra 0 zauzima jedno od prva tri mesta, a cifra 1 zauzima jedno od poslednja četiri mesta?

19. Od elemenata skupa $\{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ formiraju se svi petocifreni brojevi deljivi sa 6. Koliko ima ovakvih brojeva?

20. Na koliko načina se u red mogu poređati 5 učenika i 2 učenice, tako da učenice ne stoje jedna pored druge?

21. Odrediti broj načina na koji se mogu poređati u niz n nula i k jedinica $(k \leq n)$, tako da nikoje dve jedinice nisu susedne.

22. Na koliko načina četiri osobe mogu da podele 28 različitih knjiga tako da svako dobije 7 knjiga?

23. Šifra na sefu određena je nizom od pet dekadnih cifara. Koliko ima šifara čije cifre čine strogo opadajući niz?

24. Na koliko načina može biti ocenjen učenik na kraju školske godine ako se ocenjuje iz 12 predmeta?

25. Koliko ima funkcija koje preslikavaju skup cifara u skup $\{a, b, c\}$?

26. Na koliko načina je moguće 15 učenika rasporediti u tri ekipe od po 5 učenika?

27. Data su 3 različita proizvoda fabrike A, četiri različita proizvoda fabrike B i pet različitih proizvoda fabrike C. Na koliko različitih načina se svi proizvodi mogu poređati u niz uz sledeće uslove: proizvodi fabrike B su jedan pored drugog, proizvodi fabrike C su jedan pored drugog, nikoja dva proizvoda fabrike A nisu jedan pored drugog.

28. Imamo 7 perli različitih boja, od kojih je jedna crvena a jedna zelena. Na koliko načina možemo nanizati 7 perli na prav konac tako da crvena i zelena perla budu jedna pored druge, ako se perle ređaju: 1) na prav konac 2) u krug ?

29. Koliko ima permutacija slova A, B, C, D, E, F i G u kojima se A i G pojavljuju jedno do drugog?

30. Na koliko načina od 3 učenika i 8 profesora možemo formirati petočlanu komisiju u kojoj će biti bar jedan učenik?

31. Odrediti broj načina na koji se može formirati petočlana komisija od 2 matematičara i 8 fizičara, tako da u njoj bude bar 1 matematičar.

32. Na koliko načina od 2 matematičara i 8 inženjera možemo formurati petočlanu komisiju u kojoj će biti bar jedan matematičar?

33. Iz skupa od 10 studenata među kojima su samo jedan student elektrotehnike i samo jedan student matematike, biramo komisiju od 6 članova, ali tako da ako je u komisiji student elektrotehnike mora u toj komisiji biti i student matematike. Koliko se takvih komisija može obrazovati?

34. Dat je skup $A = \{1, 2, \ldots 100\}$. Koliko ima grupoida $(A, *)$ takvih da je operacija $*$ komutativna i da zadovoljava sledeću osobinu $(\forall x \in A) x * x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

35. Dat je skup $A = \{1, 2, \ldots 10\}$. Koliko ima grupoida $(A, *)$ takvih da važi $(\forall x \in A)\ x * 5 \notin \{x, 3, 5, 7\}$?

36. Dat je skup $A = \{1, 2, \ldots 10\}$. Koliko ima grupoida $(A, *)$ takvih da važi $(\forall x \in A)\ x * 4 = x * 5$?

37. 1) Odrediti zbir cifara svih brojeva koji se dobijaju permutacijama cifara broja 1234.
2) Odrediti zbir svih brojeva koji se dobijaju permutacijama cifara broja 1234.

38. U koliko se permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ između brojeva 1 i n nalazi tačno $r \leq n-2$ drugih brojeva?

39. Odrediti broj elemenata partitivnog skupa n-točlanog skupa.

40. Iz kutije sa n različitih kuglica izvlačimo k puta po jednu kuglicu, bez vraćanja. Na koliko načina to možemo učiniti?

41. Koliko postoji n-torki sastavljenih od brojeva $1, 2, \ldots, p$ koje imaju tačno k $(1 \leq k \leq n)$ koordinata različitih od jedne fiksne $n-$torke opisanog oblika?

42. Koliko prirodnih brojeva manjih od 10^n ima cifre poređane u neopadajućem poretku?

43. Na koliko se načina n istovetnih poklona može podeliti grupi od k dece:
1) bez posebnih uslova
2) pod uslovom da svako dete dobije bar jedan poklon.

44. Na koliko načina četiri osobe mogu da podele 28 različitih knjiga tako da svako dobije po 7 knjiga?

45. Dato je 12 kuglica koje numerisanih brojevima 1, 2, ..., 12. Na koliko načina se tih 12 kuglica može rasporediti u 3 kutije koje su numerisane slovima A, B i C tako da u svakoj kutiji budu 4 kuglice?

46. Koliko se binarnih relacija može definisati u skupu X od n elemenata? 2^{n^2} Koliko postoji
1) refleksivnih relacija, 2^{n^2-n}
2) simetričnih relacija $2^{\frac{n^2-n}{2}+n} = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$
3) refleksivnih i simetričnih relacija $2^{\frac{n^2-n}{2}}$
4) antisimetričnih relacija?

39. бр. ел. скупова креће се од 0 до n
скупова са k ел. има $\binom{n}{k}$.
Дакле, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot 1^{k} = (1+1)^n = 2^n$

или:

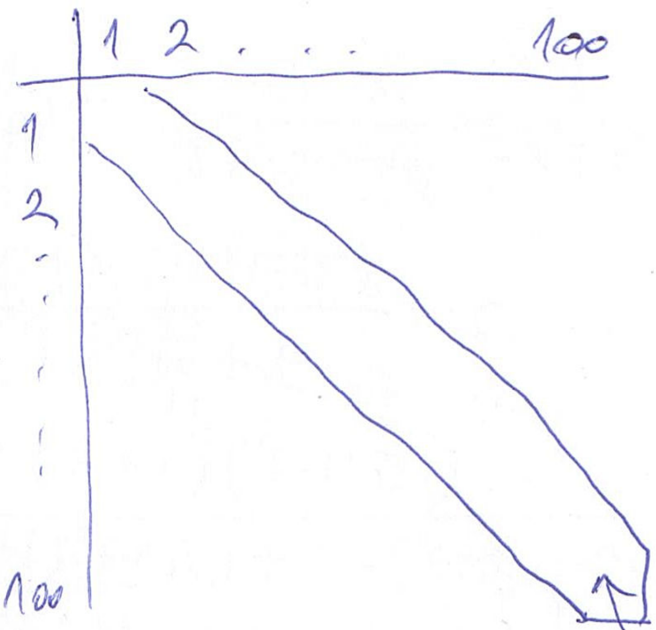
$\overline{}$ $\overline{}$ $\overline{}$ . . . $\overline{}$
1. 2. 3. ... н.-ти елемент

на сваком месту пишемо 0 (ако ел. не припада скупу) или 1 (ако припада)
Дакле, на сваком месту бирамо између две могућности (0 или 1) $\rightarrow \overline{V}^{n}_{2} = 2^n$

21. $\underbrace{000\ldots00}_{n \text{ нула}}$
јединица може сместити: пре прве нул[е] између прве и друге нуле, ..., између две последње нуле и иза последње нуле. Дакле n+1 место за распоре[ђ] k јединица: $\binom{n+1}{k}$

20. учесници су 0, -5
учеснице су 1-2
$\binom{6}{2}\cdot 5!\cdot 2!$

34.



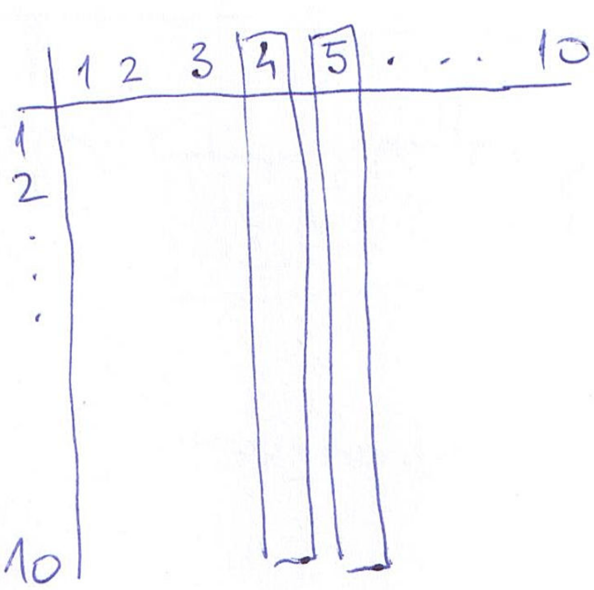
попуњава се слободно горња половина таблице, доња се преписује (због комутативности)

$\frac{100^2-100}{2}$ места

на сваком месту на дијагонали имамо само 5 могућности због $x*x \in \{1,2,3,4,5\}$

$$100^{\frac{100^2-100}{2}} \cdot 5^{100}$$

6.

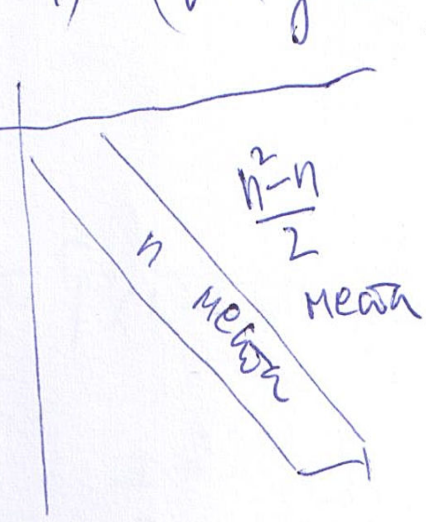


4. и 5. колона су исте због

$(\forall x \in X)\ x*4 = x*5$

дакле, пета колона се не попуњава слободно (преписујемо четврту), па имамо 10^2-10 места за слободно попуњавање tj. постоји 10^{90} таквих функција.

4) $(\forall x,y \in X)\ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x=y$ АНТИСИМЕТРИЧНА РЕЛ.



- ако је изнад дијагонале 1 – на симетричном месту испод дијаг. мора бити 0, а ако је изнад дијаг. 0 на симетричном месту испод дијаг. може бити 0 или 1.
- број 0 изнад дијаг. креће се од 0 до $\frac{n^2-n}{2}$
- ако је k бр. 0 изнад дијаг. онда се оне могу распоредити на $\binom{\frac{n^2-n}{2}}{k}$ начина

$$\sum_{k=0}^{\frac{n^2-n}{2}} \binom{\frac{n^2-n}{2}}{k} \cdot 2^k = \sum_{k=0}^{\frac{n^2-n}{2}} \binom{\frac{n^2-n}{2}}{k} \cdot 1^{\frac{n^2-n}{2}-k} \cdot 2^k = (1+2)^{\frac{n^2-n}{2}} = 3^{\frac{n^2-n}{2}}$$

Укупан број А-С релација је $\underbrace{2^n}_{\text{распореди за дијагоналу}} \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$

или за сваки пар симетричних поља у таблици (таквих парова је $\frac{n^2-n}{2}$) постоји 3 могућности – 0 и 0; 0 и 1; 1 и 0, па је бр. попуњавања места ван дијагонале $3^{\frac{n^2-n}{2}}$, а укупно А-С. рел. има $2^n \cdot 3^{\frac{n^2-n}{2}}$