Neodređeni, određeni, nesvojstveni integrali i primene

Ivana Jovović, ivana@etf.rs

Contents

1 Neodređeni integrali trigonometrijskih funkcija

1.1 Pregled osnovnih smena kod neodređenih integrala trigonometrijskih funkcija

Neka je R racionalna funkcija sa dve promenljive.
Ako važi da je $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, uvodimo smenu $t = \sin x$. Razmatramo dva slučaja. Neka je $\cos x \geq 0$. Tada je $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}$. Imamo da je $dt = \cos x\,dx$, odnosno da je $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Prema tome,

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(t, \sqrt{1-t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

U slučaju da je $\cos x < 0$, imamo da je $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-t^2}$ i da je $dx =$

$-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, odakle dobijamo da je

$$\begin{aligned}\int R(\sin x,\cos x)\,dx &= \int -R(\sin x,-\cos x)\,dx\\ &= \int -R\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)\left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)\\ &= \int R\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.\end{aligned}$$

Ako važi da je $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, uvodimo smenu $t=\cos x$, $dt=-\sin x\,dx$. Ne gubeći na opštosti možemo uzeti da je $\sin x=\sqrt{1-t^2}$ i $dx=-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Dobijamo

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=-\int R\left(\sqrt{1-t^2},t\right)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Ako važi da je $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, uvodimo smenu $t=\operatorname{tg}x$, $dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$. Iz osnovnog trigonometrijskog identiteta $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, deljenjem sa $\sin^2 x$, odnosno $\cos^2 x$ dobijamo $1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}$ i $\operatorname{tg}^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$, tj. imamo da je $\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ i $\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Ne gubeći na opštosti, zbog uslova $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ možemo uzeti da je $\sin x=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ i $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, što posledično daje $dx=\frac{dt}{1+t^2}$. Dobijamo

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Ako funkcija $R(\sin x,\cos x)$ ne zadovoljava nijedan od prethodna tri uslova, uvodimo standardnu smenu $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. U ovom slučaju važi da je

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}\text{ i}$$

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Kako je $dt=\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ imamo da je $dx=\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$. Dobijamo

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

1.2 Zadaci

Zadatak 1. Odrediti sledeće integrale:

i) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx$,

ii) $\displaystyle\int\frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$, *iii*) $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}\,dx,$

iv) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx,$

v) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Rešenje:

i) $$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\cos x\,dx = \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & \sin x, \\ dt & = & \cos x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^2} =$$
$$\left\{ \begin{array}{cc} u=t, & dv=\frac{t\,dt}{(t^2-1)^2} \\ du=dt, & v=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2-1} \end{array} \right\} = -\frac{t}{2\,(t^2-1)}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-1} =$$
$$-\frac{t}{2\,(t^2-1)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C = \frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C$$

ii) $$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{(2+\cos x)\sin^2 x} = \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & \cos x, \\ dt & = & -\sin x\,dx \end{array} \right\} =$$
$$-\int \frac{dt}{(2+t)\,(1-t^2)} = \int \frac{dt}{(t+2)\,(t^2-1)}$$
$$\frac{1}{(t+2)\,(t^2-1)} = \frac{A}{t+2}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t-1} = \frac{A\left(t^2-1\right)+B(t+2)(t-1)+C(t+2)(t+1)}{(t+2)\,(t^2-1)}$$
$$A\left(t^2-1\right)+B(t+2)(t-1)+C(t+2)(t+1)=1$$
$$\begin{array}{lll} t=1 & \Rightarrow & C=\frac{1}{6} \\ t=-1 & \Rightarrow & B=-\frac{1}{2} \\ t=-2 & \Rightarrow & A=\frac{1}{3} \end{array}$$
$$\int \frac{dt}{(t+2)\,(t^2-1)} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t+2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t-1} =$$
$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(t+2)^2\,(t-1)}{(t+1)^3}\right|+C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(\cos x+2)^2\,(\cos x-1)}{(\ cos x+1)^3}\right|+C$$

iii) $$\int \frac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & \cos x, \\ dt & = & -\sin x\,dx \end{array} \right\} = -\int \frac{2t\,dt}{1+t^2} =$$
$$-\ln\left(1+t^2\right)+C = -\ln\left(1+\cos^2 x\right)+C$$

iv) $$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx, = \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}+1}\frac{dx}{\cos^2 x} == \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & \operatorname{tg} x, \\ dt & = & \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right\} = \int \frac{t\,dt}{t^4+1} =$$
$$\frac{1}{2}\int\frac{dt^2}{(t^2)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t^2+C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)+C$$

$v)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left\{ \begin{array}{rr} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ dt = \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}, & \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\left(1+t^2\right)^2 dt}{4t^3} =$
$\displaystyle\frac{1}{4}\int t\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^2 - t^{-2}}{8} + \frac{\ln|t|}{2} + C =$
$\displaystyle\frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^{-2}\frac{x}{2}}{8} + \frac{\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|}{2} + C$

Domaći zadatak 2. Odrediti sledeće integrale:

$i)$ $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x,$ $\left[\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C\right]$

$ii)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x},$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| - \frac{1}{\sin x} + C\right]$

$iii)$ $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{1+2\cos^2 x}\,dx,$ $\left[\sqrt{\cos^{-2} x + 2} + \sqrt{2}\ln\left|\sqrt{1+2\cos^2 x} - \sqrt{2}\cos x\right| + C\right]$

$iv)$ $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^6 x\,dx,$ $\left[-\frac{\cos^{11} x}{11} + \frac{2\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^7 x}{7} + C\right]$

$v)$ $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + \cos x}{\sin^2 x - \cos x}\sin x\,dx,$ $\left[\ln\left|\cos^2 x + \cos x - 1\right| - \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\cos x - \sqrt{5} + 1}{2\cos x + \sqrt{5} + 1}\right| - \cos x + C\right]$

$vi)$ $\displaystyle\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx,$ $\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2-\sin x}{2+\sin x}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{\sqrt{3}} + C\right]$

$vii)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos(2x)},$ $\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin(2x)+1}{\cos(2x)}\right| + C\right]$

$viii)$ $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\,dx,$ $\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\sin^2 x\right)}{2} + C\right]$

$ix)$ $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x + \sin^3 x},$ $\left[-\frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{6}\ln\left(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}} + C\right]$

$x)$ $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx,$ $\left[x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C\right]$

$xi)$ $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx,$ $\left[\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C\right]$

$xii)$ $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx,$ $\left[\frac{1}{32}\sin(4x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3x}{8} + C\right]$

$xiii)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5},$ $\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C\right]$

$xiv)$ $\displaystyle\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x}\,dx.$ $\left[-x - 2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C\right]$

1.3 $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$, $\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$, $\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx$

- $$\begin{aligned}\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \left(\sin((\alpha+\beta)x)+\sin((\alpha-\beta)x)\right)dx\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos((\alpha+\beta)x)}{\alpha+\beta}+\frac{\cos((\alpha-\beta)x)}{\alpha-\beta}\right)+C,\end{aligned}$$

  $\alpha \neq \pm\beta$,

- $$\begin{aligned}\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \left(\cos((\alpha+\beta)x)+\cos((\alpha-\beta)x)\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((\alpha+\beta)x)}{\alpha+\beta}+\frac{\sin((\alpha-\beta)x)}{\alpha-\beta}\right)+C,\end{aligned}$$

  $\alpha \neq \pm\beta$,

- $$\begin{aligned}\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \left(-\cos((\alpha+\beta)x)+\cos((\alpha-\beta)x)\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-\sin((\alpha+\beta)x)}{\alpha+\beta}+\frac{\sin((\alpha-\beta)x)}{\alpha-\beta}\right)+C,\end{aligned}$$

  $\alpha \neq \pm\beta$.

Zadatak 3. Odrediti sledeće integrale:

i) $\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx$,

ii) $\int \sin x\sin(2x)\sin(3x)\,dx$,

iii) $\int \cos x\cos(2x)\cos(3x)\,dx$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}\int \sin x\sin(2x)\sin(3x)\,dx, &= \frac{1}{2}\int \sin(2x)\left(-\cos(4x)+\cos(2x)\right)dx\\ &= \frac{1}{4}\int \left(-\sin(6x)+\sin(2x)+\sin(4x)\right)dx\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\cos(6x)}{6}-\frac{\cos(2x)}{2}-\frac{\cos(4x)}{4}\right)+C.\end{aligned}$$

2 Određeni integrali

Funkcija f definisana na segmentu $[a,b]$ je integrabilna na tom segmentu ako i samo ako je ograničena na $[a,b]$ i ako ima najviše prebrojivo tačaka prekida na $[a,b]$.

Njutn-Lajbnicova formula:

Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$, onda važi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a),$$

gde je F primitivna funkcija funkcije f na $[a,b]$.

Zadatak 4. Izračunati sledeće određene integrale:

$i)$ $\displaystyle\int_0^{\pi} sinx\,dx,$

$ii)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx,$

$iii)$ $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx, \quad f(x) = \begin{cases} x^2,\ 0 \le x \le 1, \\ 2-x,\ 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$iv)$ $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^2-2x+1}\,dx.$

Rešenje:

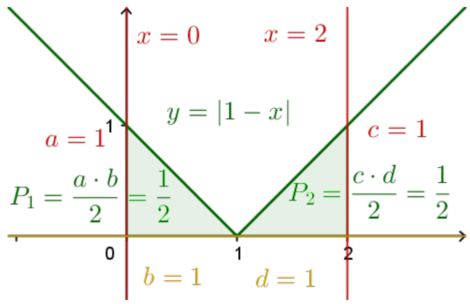
$i)$ $\displaystyle\int_0^{\pi} sinx\,dx = -cosx\Big|_0^{\pi} = -cos(\pi)-(-cos(0)) = 2.$

$ii)$ Podintegralna funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ nije ograničena na segmentu $[-1,1]$, pa prema tome nije integrabilna u Rimanovom smislu.

$iii)$ $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx, \quad f(x) = \begin{cases} x^2,\ 0 \le x \le 1, \\ 2-x,\ 1 \le x \le 2, \end{cases}$

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx &= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{3}+4-2-\left(2-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}\end{aligned}.$$

$iv)$
$$\begin{aligned}\int_0^2 \sqrt{x^2-2x+1}\,dx &= \int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\ &= \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^2 = 1-\frac{1}{2}+2-2-\left(\frac{1}{2}-1\right) = 1\end{aligned}$$



2.1 Metoda parcijalne integracije u određenom integralu

Metoda parcijalne integracije u određenom integralu:

Neka funkcije u i v imaju neprekidne prve izvode na segmentu $[a,b]$. Tada je

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx &= u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx \\ &= u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Zadatak 5. Izračunati određeni integral $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\,dx$.

Rešenje: Neka je $u = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ i $v = x$. Tada je $u' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\,\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$ i $v' = 1$. Funkcija u' nije neprekidna na segmentu $[0,\sqrt{3}]$, ima prekid u tački $x = 1$, prema tome, ne možemo primeniti metodu parcijalne integracije. Međutim, ova funkcija je neprekidna na intervalima $[0,1)$ $(1,\sqrt{3}]$.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx + \int_1^{\sqrt{3}} \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}, & du = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}, \\ dv = dx, & v = x \end{array} \right\} =$$

$$= x\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2xdx}{(1+x^2)} + x\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\Big|_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2xdx}{(1+x^2)} =$$

$$= x\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}} - ln(1+x^2)\Big|_0^1 + ln(1+x^2)\Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{3}\,\frac{\pi}{3} - ln(2) + ln(4) - ln(2) = \sqrt{3}\,\frac{\pi}{3}$$

Koristili smo da je

$$|1-x^2| = \begin{cases} x^2-1, \; x<-1 \vee x>1, \\ 1-x^2, \; -1<x<1. \end{cases}$$

2.2 Smena promenljive u određenom integralu

Smena $\varphi(x) = t$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\psi'(t)\,dt$$

- f neprekidna funkcija na segmentu $[\alpha,\beta]$
- $\alpha = \varphi(a), \beta = \varphi(b)$;
- φ je strogo monotona funkcija na segmentu $[a,b]$;
- $\psi = \varphi^{-1}, \psi'$ je neprekidna funkcija na segmentu $[\alpha,\beta]$.

Smena $x = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- f neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$;
- $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$;
- φ' neprekidna funkcija na segmentu $[\alpha,\beta]$;
- $f \circ \varphi$ je definisana za svako $x \in [\alpha,\beta]$.

Zadatak 6. Izračunati određene integrale:

i) $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$,

ii) $\int_{-4}^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Rešenje: Uvedimo smenu $t = x^2+9$, funkcija $\varphi(x) = x^2+9$ je monotono rastuća na segmentu $[0,4]$. Imamo da je $dt = 2x\,dx$ i da je za $x=0$, $t=9$, a za $x=4$, $t=25$.

Prema tome, $\displaystyle\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int_9^{25}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\Big|_9^{25} = \frac{125-27}{3} = \frac{98}{3}$.

Kako je $f(x) = x\sqrt{x^2+9}$ neparna funkcija i kao je segment $[-4,4]$ simetričan u odnosu na koordinatni početak važi da je $\int_{-4}^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx = 0$.

Zadatak 7. Izračunati određeni integral $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$.

Rešenje: Primenimo metodu parcijalne integracije. Neka je $u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$. Tada je $u' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$. Dalje, imamo $v = x$ i $v' = 1$. Prema tome,

$$\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx = \left\{\begin{array}{rl} u = \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}, & du = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}, \\ dv = dx, & v = x \end{array}\right\} = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \pi - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Uvedimo sada smenu $t = \sqrt{x}$ u integral $\frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x}(1+x)}$. Funkcija $\varphi(x) = \sqrt{x}$ je strogo monotono rastuća funkcija na segmentu $[0,3]$.

Važi $\frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \left\{\begin{array}{rl} t = \sqrt{x}, & x = 0 \to t = 0, \\ dt = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}, & x = 3 \to t = \sqrt{3} \end{array}\right\} = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2dt}{1+t^2} = (t - \operatorname{arctg} t)\,\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

Zaključujemo $\int\limits_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$.

Domaći zadatak 8. Izračunati određene integrale:

i) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx$, $\quad\left[\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} - 2\right]$

ii) $\int\limits_0^1 2x\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$, $\quad\left[\frac{2}{3}\right]$

iii) $\int\limits_1^2 x\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2-1}\,dx$, $\quad\left[\operatorname{arctg}\frac{4}{3} - \operatorname{arctg} 2 + 1\right]$

iv) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, $\quad\left[\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{32}\pi^2 - \frac{3}{2}\ln 2\right]$

v) $\int\limits_0^2 \ln\frac{x+4}{4-x}\,dx$, $\quad\left[-8\ln 2 + 6\ln 3\right]$

vi) $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$, $\quad\left[\frac{1}{4}\pi - \ln 2\right]$

vii) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$, $\quad\left[\frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{8}\right]$

viii) $\int\limits_0^{2\pi} e^x |\sin x| \, dx,$ $\left[\frac{1}{2}(1+e^{\pi})^2\right]$

ix) $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} \, dx,$ $[4-\pi]$

x) $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} \, dx.$ $\left[\frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3\right]$

2.3 Integracija neprekidnih parnih i neparnih funkcija na segmentu $[-a,a]$

Zadatak 9.

i) Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[-a,a]$ i neparna. Tada je $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

ii) Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[-a,a]$ i parna. Tada je $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx$.

Rešenje: Iz osobine aditivnosti integrala sledi da je $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx$. Uvođenjem smene $x=-t$ u prvi integral i na osnovu pretpostavke da je funkcija f neparna dobijamo $\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{rl} x=-t, & x=-a \to t=a, \\ dx=-dt, & x=0 \to t=0 \end{array} \right\} = -\int\limits_a^0 f(-t)\,dt = \int\limits_a^0 f(t)\,dt = -\int\limits_0^a f(t)\,dt = -\int\limits_0^a f(x)\,dx$, odakle sledi da je $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(x)\,dx = 0$.

Domaći zadatak 10. Izračunati određene integrale:

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{17}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,$

ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin(2x)\cos^{\frac{4}{3}} x\,dx,$

iii) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx,$

iv) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx.$

2.4 Rekurentne formule za određene integrale

Zadatak 11. Izvesti rekurentnu formulu za određeni integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx$.

Rešenje: Primenimo metodu parcijalne integracije

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin^{n-1} x, & du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx, \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{array} \right\} \\
&= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx \\
&= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\,dx \right) \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.
\end{aligned}$$

Dobijamo rekurentnu formulu $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Odakle sledi da je
za $n = 2k$

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} = \ldots = \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2} I_0$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2},$$

a za $n = 2k+1$

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1}\frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \ldots = \frac{2k}{2k+1}\frac{2k-2}{2k-1}\cdots\frac{2}{3} I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\,dx, = -cosx\,|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Domaći zadatak 12. Izvesti rekurentne formule za izračunavanje određenih integrala:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx,$ $\left[I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \right]$

ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n} x\,dx,$ $\left[I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1} \right]$

iii) $\int\limits_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$ $\left[I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}\right]$

iv) $\int\limits_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx.$ $\left[I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}\right]$

3 Nesvojstveni integral

3.1 Interval integracije nije konačan

Neka je funkcija f definisana na intervalu $[a,+\infty)$ i neka je integrabilna na svakom segmentu $[a,b]$. Ako postoji $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ i konačan je, gde je F primitivna funkcija funkcije f na intervalu $[a,+\infty)$, onda kažemo da je $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergentan, u suprotnom je divergentan.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a)$$

Zadatak 13. Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5} &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2)\Big|_0^{+\infty} \\
&= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(b+2) - \operatorname{arctg}(2) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(2)
\end{aligned}$$

Zadatak 14. Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} &= \int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3}\int\limits_2^{+\infty} \frac{x+2-(x-1)}{(x+2)(x-1)}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int\limits_2^{+\infty} \left(\frac{dx}{x-1} - \frac{dx}{x+2}\right) dx = \frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\Big|_2^{+\infty} \\
&= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\ln\frac{b-1}{b+2} - \frac{1}{3}\ln\frac{2-1}{2+2} = \frac{\ln 4}{3}
\end{aligned}$$

Zadatak 15. Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx$.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & dv = \frac{1}{x^2}, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, & v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{x^2+1-x^2}{x(1+x^2)}\,dx = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{\operatorname{arctg} b}{b} + \ln \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \right) + \frac{\operatorname{arctg} 1}{1} - \ln \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \\
&= \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Zadatak 16. Izračunati integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}$.

Rešenje:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\operatorname{tg}^2 x + 5}\,\frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg} x, & x = 0 \to t = 0, \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x}, & x = \frac{\pi}{2} \to t = +\infty \end{array} \right\} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{3t^2+5} = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,t\right)\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\,b\right) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{2\pi}{2\sqrt{15}}$$

Zadatak 17. Izračunati integral $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+2\cos x}$.

Rešenje: Integral $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+2\cos x}$ ne možemo rešavati smenom $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, jer funkcija $\varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ima prekid u tački $x = \pi$. Važi da je

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+2\cos x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{5+2cosx} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{5+2\cos x}.$$

Na segmentima $[0,\pi]$ i $[\pi,2\pi]$ funkcija $\varphi(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ je rastuća funkcija, sledi

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{5+2cosx}=\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{5+2cosx}+\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{5+2cosx}=$$
$$\left\{\begin{array}{rll} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}, & x=0\to t=0, & x=\pi_+\to t=-\infty,\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}, & x=\pi_-\to t=+\infty, & x=2\pi\to t=0\end{array}\right\}=$$
$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{2dt}{\left(5+2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}+\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{2dt}{\left(5+2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)}=$$
$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{2dt}{7+3t^2}+\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{2dt}{7+3t^2}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{2dt}{7+3t^2}=\frac{2}{7}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{7}}t\right)^2}=$$
$$\left\{\begin{array}{rl} u=\sqrt{\frac{3}{7}}t, & t=-\infty\to u=-\infty,\\ du=\sqrt{\frac{3}{7}}dt, & t=+\infty\to u=+\infty\end{array}\right\}=$$
$$\frac{2}{\sqrt{21}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}=\frac{2}{\sqrt{21}}\operatorname{arctg}u\Big|_{-\infty}^{+\infty}=$$
$$\frac{2}{\sqrt{21}}\left(\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(b)-\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}(a)\right)=\frac{2}{\sqrt{21}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{21}}.$$

Domaći zadatak 18. Ispitati konvergenciju integrala

i) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$, [1]

ii) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x}$, [divergira]

iii) $\int\limits_0^{+\infty}\cos x\,dx$, [divergira]

iv) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, [$\pi$]

v) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{(1+x)^2}dx$. [$\frac{\pi}{4}$]

3.2 Podintegralna funkcija nije ograničena

Neka je funkcija f neograničena u okolini tačke b i neka je integrabilna na svakom segmentu $[a,b-\varepsilon]$. Tada važi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Zadatak 19. Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$.

Rešenje:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\xi\to 0_+} \int_{\xi}^{1} \frac{dx}{x} =$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln|\varepsilon| - \ln|-1| + \ln|1| - \lim_{\xi\to 0_+} \ln|\xi| = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \ln|\varepsilon| - \lim_{\xi\to 0_+} \ln|\xi| = \infty - \infty$$

Integral divergira. Podintegralna funkcija je neparna i neograničena u nuli, ali integrabilna na svakom segmentu koji ne sadrži nulu, pa je $v.p. \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$.

Zadatak 20. Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx$.

Rešenje:

$$\int \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int_{\varepsilon}^{1} \ln x\,dx = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0_+} (\varepsilon(\ln\varepsilon - 1)) =$$
$$-1 - \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{\ln\varepsilon - 1}{\frac{1}{\varepsilon}} = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0_+} \varepsilon = -1$$

Domaći zadatak 21. Ispitati konvergenciju integrala

i) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, [2]

ii) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$, [divergira]

iii) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin\frac{1}{x}\,\frac{dx}{x^2}$. [divergira]

Zadatak 22. Izračunati integral $\int\limits_0^1 \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

Rešenje: Podintegralna funkcija nije ograničena u okolini tačke $x = 1$. U pitanju je nesvojstveni integral II vrste. Uvodimo smenu $t = \arcsin x$, $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Funkcija $\varphi(x) = \arcsin x$ je rastuća funkcija i važi da je za $t = \varphi(0) = 0$ i $t = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}$. Imamo da je

$$\int\limits_0^1 \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, e^t\, dt.$$

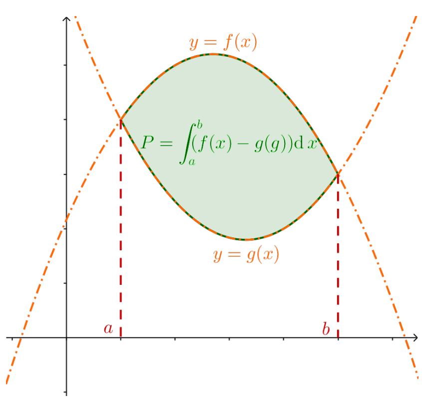
Integral sa desne strane je određen integral koji rešavamo metodom parcijalne integracije.

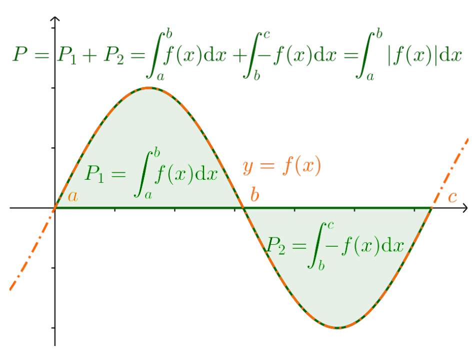
$$\begin{aligned} I &= \int \sin t\, e^t\, dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sin t, & du = \cos t\, dt, \\ dv = e^t dt, & v = e^t \end{array} \right\} \\ &= \sin t\, e^t - \int \cos t\, e^t\, dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = \cos t, & du = -\sin t\, dt, \\ dv = e^t dt, & v = e^t \end{array} \right\} \\ &= \sin t\, e^t - \cos t\, e^t - \int \sin t\, e^t\, dt = (\sin t - \cos t)\, e^t - I \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)\, e^t + C$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, e^t\, dt = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)\, e^t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}$$

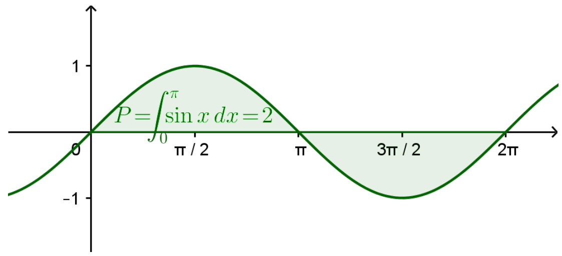
4 Primena određenog integrala na izračunavanje veličine površine





Zadatak 23. Izračunati veličinu površine ograničene krivom $y = \sin x$ i odsečkom x-ose $[0, 2\pi]$.

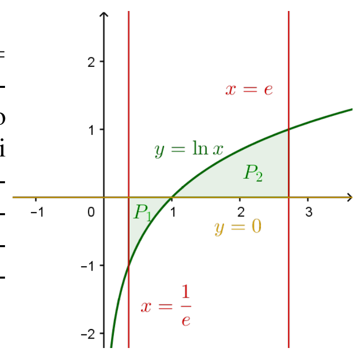
Rešenje: Važi da je $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1+1 = 0$, dok je veličina tražene površine jednaka je $\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = 4.$



Zadatak 24. Izračunati veličinu površine ograničene krivom $y = \ln x$ i pravama $y = 0$, $x = \frac{1}{e}$ i $x = e$.

Rešenje:

Deo ravni ograničen krivom $y = \ln x$ i pravama $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ i $y = 0$ nalazi se ispod, a deo iznad x-ose. Veličinu površine traženog dela ravni možemo predstaviti kao zbir veličina površina delova ravni na slici označenih sa P_1 i P_2. Neodređeni integral funkcije $y = \ln x$ određujemo metodom parcijalne integracije, dok odgovarajuće određene integrale računamo korišćenjem Njutn–Lajbnicove formule.



$$\int \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x, & dv = dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = -(x\ln x - x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_1^e \\ &= 1 - \tfrac{1}{e} - \tfrac{1}{e} + e - e + 1 = 2 - \tfrac{2}{e} \end{aligned}$$

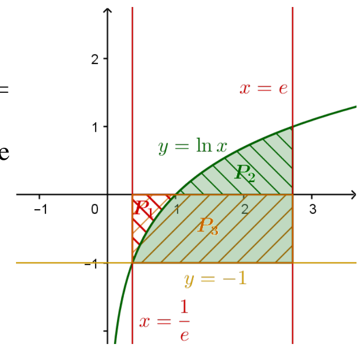
Zadatak 25. Izračunati veličinu površine ograničene krivom $y = \ln x$ i pravama $y = -1$ i $x = e$.

Rešenje: Ako sa P_3 označimo veličinu površine pravougaonika čija su temena tačke $(\frac{1}{e}, 0)$, $(e, 0)$, $(\frac{1}{e}, -1)$ i $(e, -1)$, imamo da je

$$P_3 = \left(e - \frac{1}{e}\right) \cdot 1 = e - \frac{1}{e}.$$

Koristeći prethodni zadatak imamo da je $P = P_2 + P_3 - P_1 = 1 + e - \frac{1}{e} - 1 + \frac{2}{e} = e + \frac{1}{e}$.
Direktnim izračunavanjem dobijamo da je veličina tražene površine jednaka

$$P = \int_{\frac{1}{e}}^{e} (\ln x - (-1))\, dx = (x \ln x - x + x) \Big|_{\frac{1}{e}}^{e} = e + \frac{1}{e}.$$



Domaći zadatak 26. Izračunati veličinu površine ograničene krivom

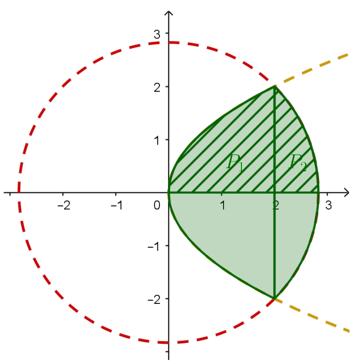
$$y = -2 \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

i pravama $x = 1$ i $y = 0$. $\left[P = 2\left(\ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2} + 1\right)\right]$

Zadatak 27. Jednačinama $x^2 + y^2 = 8$ i $x = \frac{1}{2} y^2$ date su kružnica i i parabola. Izračunati veličinu površine njihovog preseka.

Rešenje: Tražena veličina površine jednaka je $P = 2(P_1 + P_2)$. Tačke preseka kružnice i parabole su rešenja sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8 \\ 2x - y^2 &= 0. \end{aligned}$$



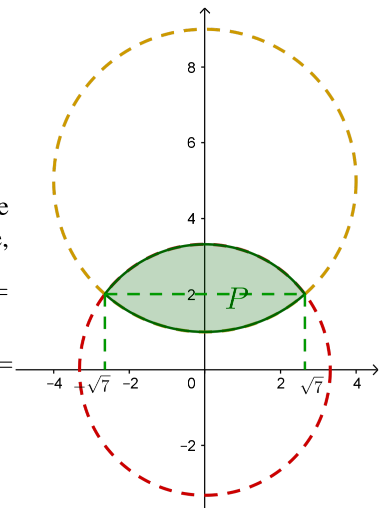
Tražimo koren kvadratne jednačine $x^2 + 2x - 8 = 0$ za koji važi $x \geq 0$. Imamo da je $x = 2$ i $y = \pm 2$. Veličina površine P_1 jednaka je $\int_0^2 \sqrt{2x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{2x^3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$, za P_2 imamo $\int_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8 - x^2}\, dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{8 - x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{\sqrt{8}}\right)\Big|_2^{\sqrt{8}} = 2\pi - 2 - \pi = \pi - 2$, pa je $P = 2\pi + \frac{4}{3}$.

Domaći zadatak 28. Jednačinama $x^2 + y^2 = 11$ i $x^2 + (y - 5)^2 = 16$ data su dve kružnice. Izračunati veličinu površine njihovog preseka.

Rešenje: Tačke preseka kružnica su rešenja sistema

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 11 \\ x^2+(y-5)^2 &= 16. \end{aligned}$$

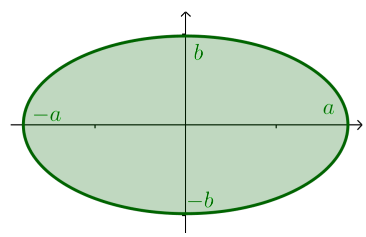
Oduzimanjem druge jednačine od prve dobijamo da je $10y-25=-5$, odnosno da je $y=2$ i $x=\pm\sqrt{7}$. Dalje, imamo da je $P=2\int_0^{\sqrt{7}}\sqrt{11-x^2}-\left(5-\sqrt{16-x^2}\right)dx=$ $2\left(\frac{x}{2}\sqrt{11-x^2}+\frac{11}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{11}}-5x+\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+8\arcsin\frac{x}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{7}}=$ $-5\sqrt{7}+11\arcsin\sqrt{\frac{7}{11}}+16\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}$.



Zadatak 29. Izračunati veličinu površine elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Rešenje: Imamo da je

$$P=4\frac{b}{a}\int_0^{\sqrt{a}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=4\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a=4\frac{b}{a}\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2}=ab\pi.$$



Domaći zadatak 30. Izračunati veličinu površine ograničene krivom $y=\frac{e^x}{1+e^x}$ i pravama $y=0$, $x=0$ i $x=1$. $[\ln(e+1)-\ln(2)]$

Domaći zadatak 31. Izračunati veličinu površine ograničene krivom $y=\sqrt{x+3}$ i pravama $y=0$ i $x=6$. $[18-2\sqrt{3}]$

Domaći zadatak 32. Izračunati veličinu površine ograničene krivama $y=\sin x$, $y=\cos x$ i odsečkom x-ose $[0,\frac{\pi}{2}]$. $\left[2\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

Literatura

1. Integrali – skripta, *Tatjana Lutovac*
2. Neodređeni integrali – skripta, *Bojana Mihailović*
3. Matematika II – skripta, *Mirko Jovanović*
4. Matematička analiza, teorija i hiljadu zadataka, za studente tehnike, II izdanje, *Milan Merkle*