# FIZIKA SI

Časovi 9-12

## Oscilacije

Arsoski Vladimir

NANO•OPTO•BIO NOBEL elektronika

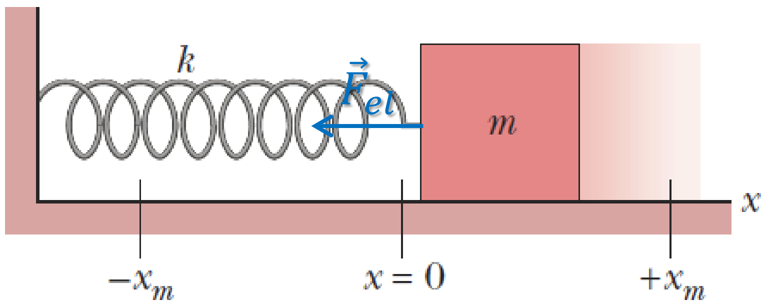
odsek za fizičku elektroniku

LASERSKA TEHNIKA

http://nobel.etf.bg.ac.yu/

# Oscilacije

Mogu biti slobodne, prigušene i prinudne.
Negativne posledice oscilacija vezane su za prinudne oscilacije i rezonanciju (ruše se mostovi pri prelaženju , zgrade određene visine se ruše pri zemljotresu, pucaju krila aviona usled turbulencije).




$$\vec{F}_{el} = -kx\vec{e}_x$$

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\boxed{x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Za date početne uslove $x(0) = x_0$ i $v(0) = v_0$ ($x_0$ i $v_0$ mogu biti negativni):

$$\boxed{x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}}$$

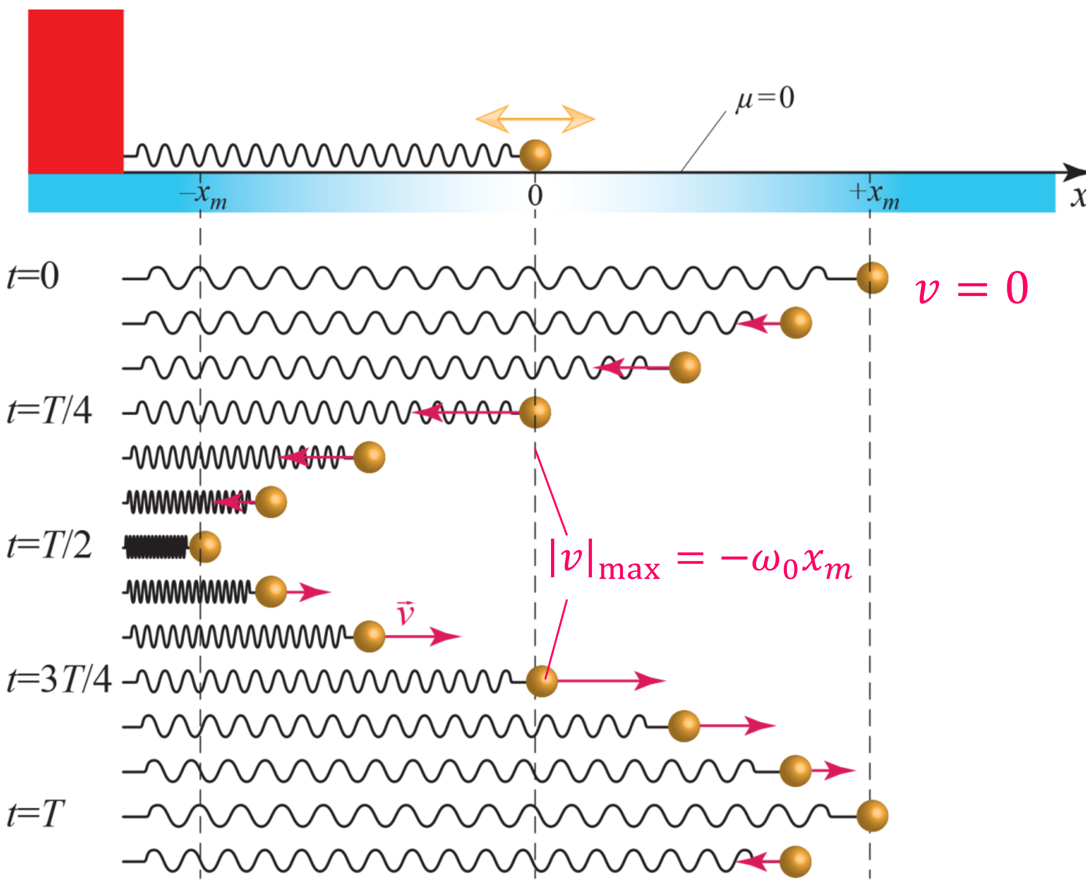
$$\boxed{\tan\phi_0 = -\frac{v_0}{x_0\omega_0}.}$$

$\omega_0 - kružna\ učestanost$

$T - period\ oscilacija$

# Primer LHO

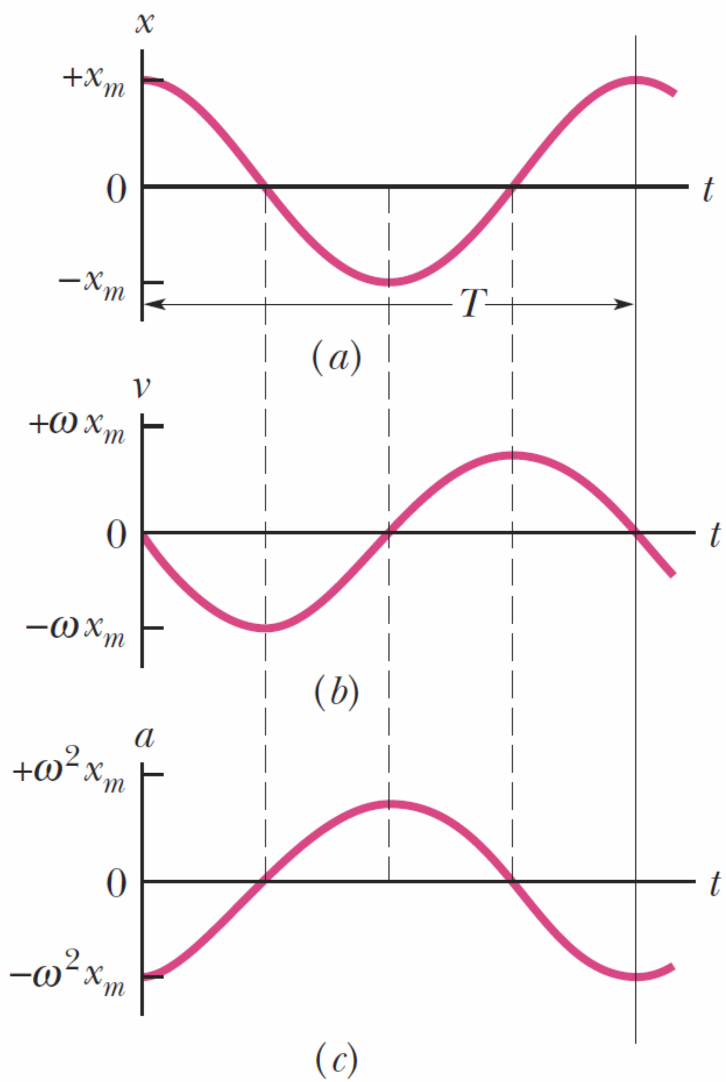
Opruga izvučena u amplitudski položaj i puštena bez početne brzine.
Početni uslovi: $x(0) = x_0 = x_m$ i $v(0) = 0$ ...




$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t)$$

$$v(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t)$$

# Pomeraj, brzina i ubrzanje




Pomeraj:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

Brzina:

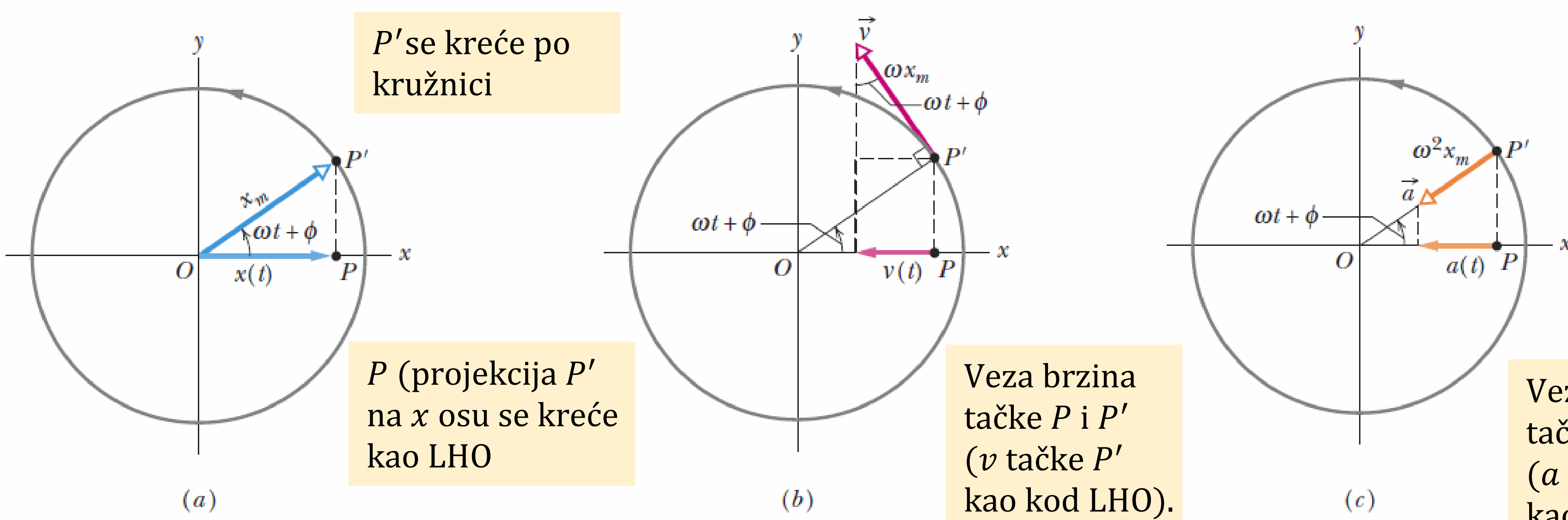
$$v(t) = -\omega_0 x_m \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

Ubrzanje:

$$a(t) = -x_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$
$$= -\frac{k}{m} x$$

# Analogija sa kružnim kretanjem

Projekcije položaja, brzine i ubrzanja na $x$ osu pri kružnom kretanju ugaonom brzinom $\omega$ po krugu $R = x_m$, daju izraze za LHO.



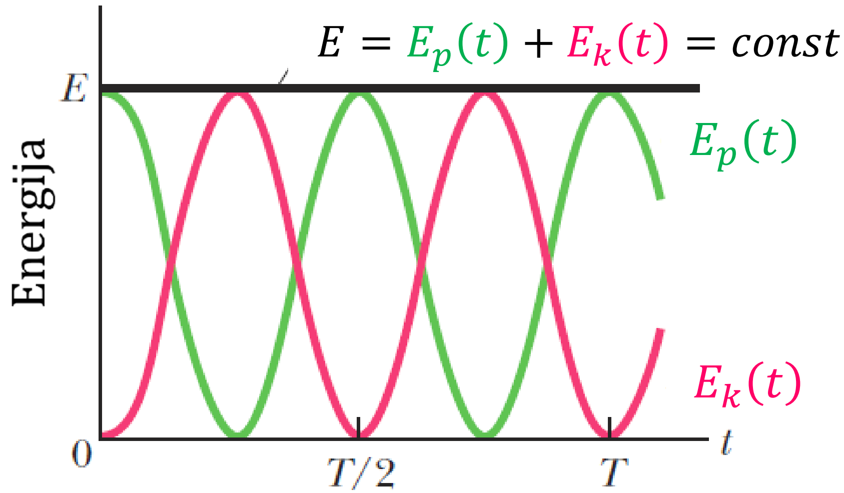

$P'$ se kreće po kružnici

$P$ (projekcija $P'$ na $x$ osu se kreće kao LHO

Veza brzina tačke $P$ i $P'$ ($v$ tačke $P'$ kao kod LHO).

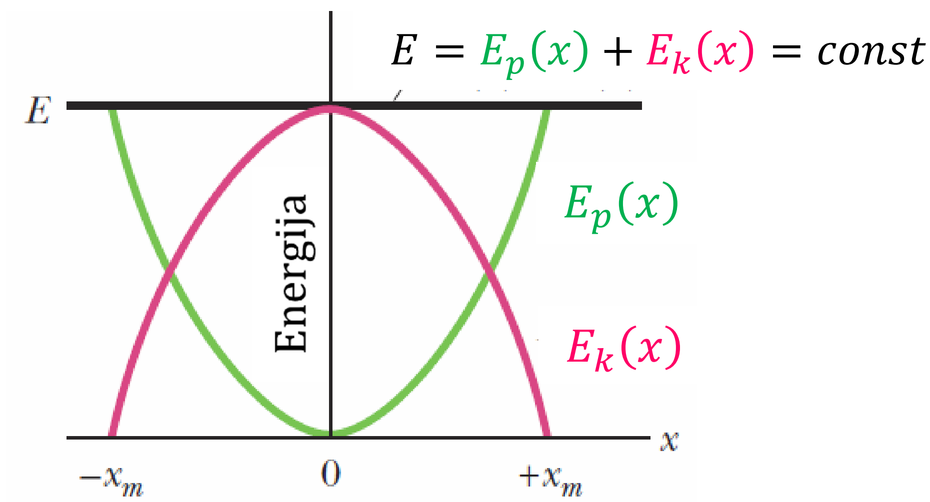
Veza ubrzanja tačke $P$ i $P'$ ($a$ tačke $P'$ kao kod LHO).

# Energija




$$E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \\ = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi_0) \\ = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi_0)$$

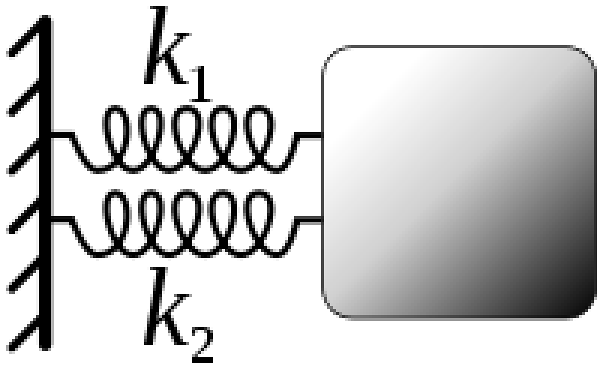



$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kx_m^2$$

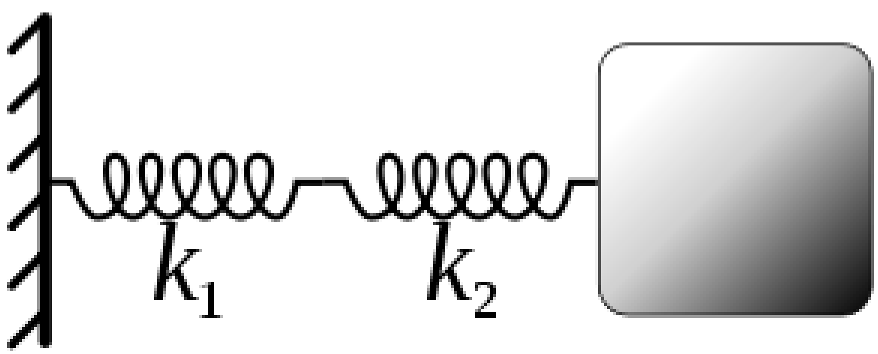
$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$|v| = \omega_0\sqrt{x_m^2 - x^2}$$

# Serijska i paralelna veza opruga

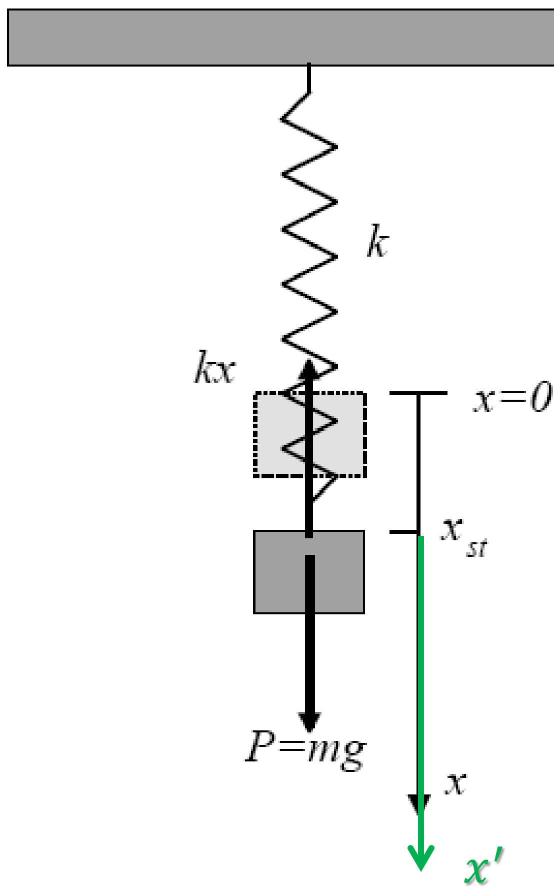



$$k_e = k_1 + k_2$$




$$k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

# Uticaj konstantne sile na LHO




$$m\ddot{x}\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x + mg\vec{e}_x$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left(x - \frac{mg}{k}\right) = 0$$

$$x_{st} = \frac{mg}{k}$$ ravnotežni položaj

$$\ddot{x}' + \frac{k}{m}x' = 0$$

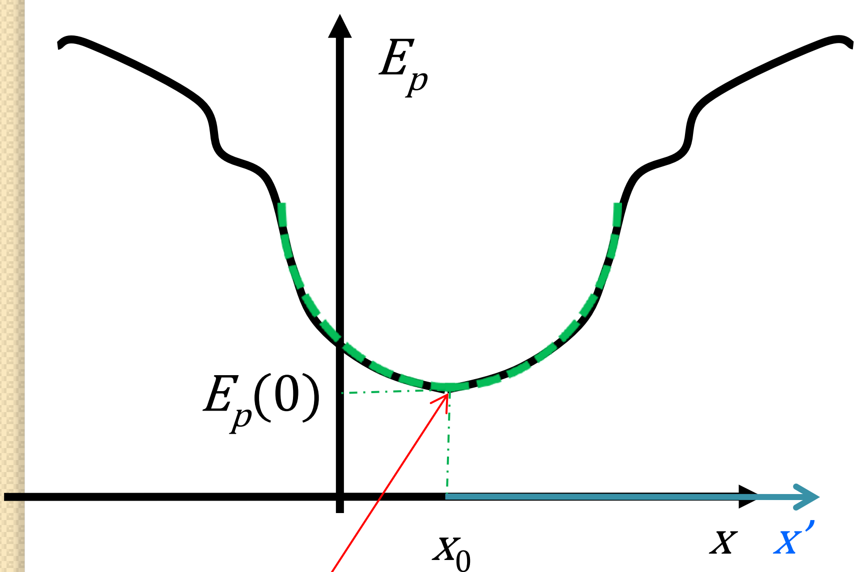
$$x' = x - \frac{mg}{k}$$

Ako pomerimo koordinatni početak $x_{st}$ rešenje je isto kao i bez konstantne sile!

# Aproksimacija pomoću LHO

Razvojem u red u okolini minimuma (tačka stabilne ravnoteže):

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0)\frac{1}{1!}\frac{dE_p}{dx}\bigg|_{x_0} + (x - x_0)^2\frac{1}{2!}\frac{d^2E_p}{dx^2}\bigg|_{x_0} + (x - x_0)^3\frac{1}{3!}\frac{d^3E_p}{dx^3}\bigg|_{x_0} + \cdots$$




*Tačka stabilne ravnoteže*

Uslovi za minimum u $x_0 = 0$

$$\frac{dE_p}{dx}\bigg|_{x=x_0} = 0 \qquad \frac{d^2E_p}{dx^2}\bigg|_{x=x_0} = k > 0$$

$$E_p(x) \cong E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

$$x' = x - x_0$$

$$E_p(x') \cong E_p(0) + \frac{1}{2}kx'^2$$

## USLOV ZA OSCILACIJE I

- Objekat može da osciluje oko

a) bilo koje tačke
b) bilo koje tačke, ako na njega deluje sila koja ima linearnu zavisnost od položaja
c) bilo koje tačke stabilne ravnoteže
d) ni jedan od ponuđenih

# USLOV ZA OSCILACIJE 2

- Da bi objekat oscilovao neophodno je:

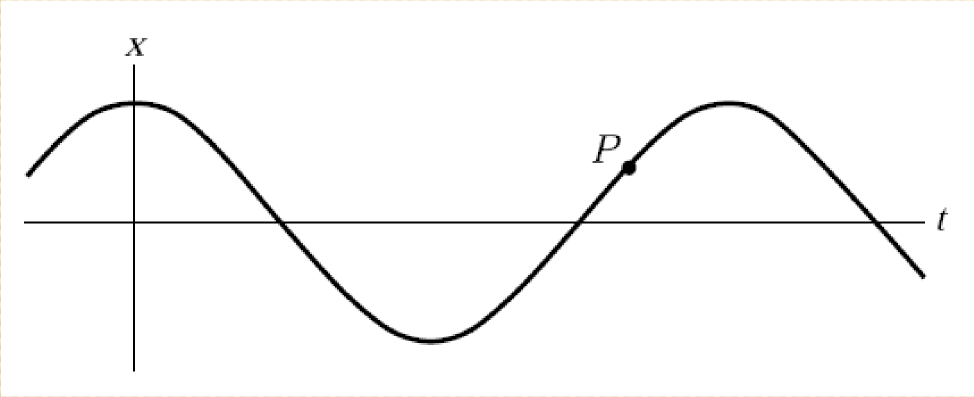
a) stabilna ravnoteža
b) poremećaj
c) malo ili nimalo trenja
d) ni jedan od ponuđenih
e) prva tri ponuđena

## AMPLITUDA OSCILACIJA

- U aproksimaciji malih oscilacija, period oscilacija *T* kod LHO:

a) linearno raste sa porastom amplitude
b) povećava se srazmerno kvadratu amplitude
c) smanjuje se sa porastom amplitude
d) ne zavisi od amplitude

# LHO POLOŽAJ, BRZINA I UBRZANJE




- Dat je grafik položaja tega koji osciluje kao LHO. U tački *P* teg ima :

a) pozitivnu brzinu i pozitivno ubrzanje
b) pozitivnu brzinu i negativno ubrzanje
c) pozitivnu brzinu i ubrzanje nula
d) negativnu brzinu i pozitivno ubrzanje
e) negativnu brzinu i negativno ubrzanje

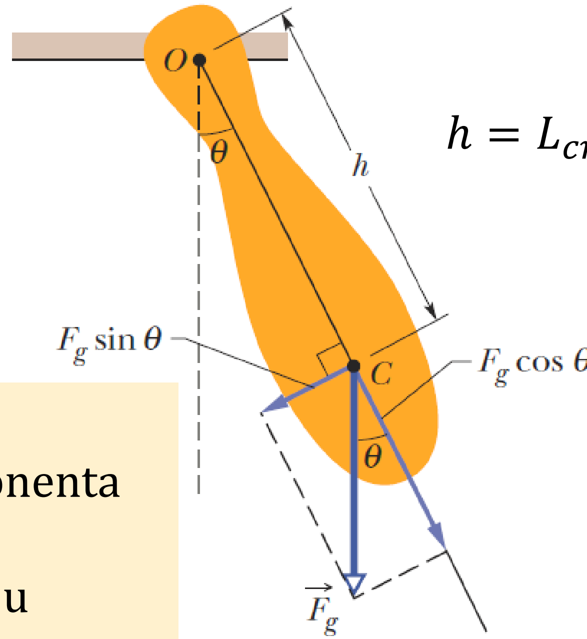
# Fizičko klatno

$I_O\alpha = I_O\ddot{\theta} = -mgL_{cm}\sin\theta$

Male oscilacije: $\sin\theta \approx \theta$ !

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL_{cm}}{I_O}}$$




$h = L_{cm}$

Ova komponenta vraća klatno u centar

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$\Omega(t) = \dot{\theta}(t) = -\omega_0\theta_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$\alpha(t) = \ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2\theta(t)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgL_{cm}}}$$

Za početne uslove $\theta(0) = \theta_0$ i $\Omega(0) = \Omega_0$:

$$\theta_m = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\tan\phi = -\frac{\Omega_0}{\theta_0\omega_0}.$$

# Matematičko klatno

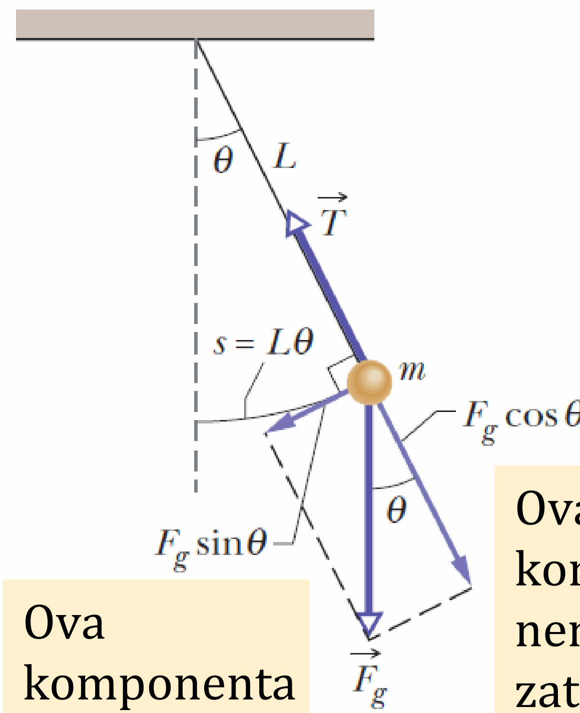
Specijalan slučaj fizičkog klatna

$$L_{cm} = L \quad i \quad I_O = mL^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL_{cm}}{I_O}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Ne zavisi od mase klatna!




Ova komponenta vraća klatno u centar

Ova kompo-nenta zateže žicu

Kada je $\theta_m$ veliko: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{1^2}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta_m}{2} + \cdots\right)$

# Torziono klatno

$$M = -c\theta = I\alpha = I\ddot{\theta}$$

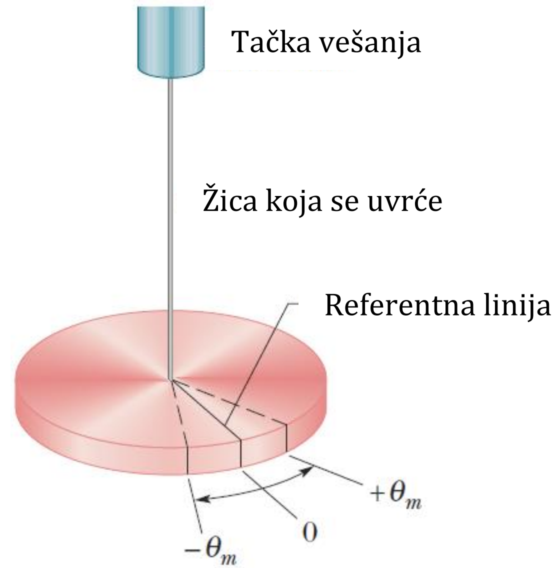
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{I}}$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)}$$

$$\boxed{\Omega(t) = \dot{\theta}(t) = -\omega_0\theta_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)}$$

$$\boxed{\alpha(t) = \ddot{\theta}(t) = -\omega_0^2\theta(t)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}$$




Za početne uslove
$\theta(0) = \theta_0$ i $\Omega(0) = \Omega_0$:

$$\boxed{\theta_m = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\Omega_0}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\boxed{\tan\phi = -\frac{\Omega_0}{\theta_0\omega_0}.}$$

# KLATNO U NEINERCIJALNOM SISTEMU

- U vozu koji se kreće ubrzanjem $a_0>0$, period oscilacije klatna:

a) ostaje nepromenjen

b) raste

c) smanjuje se

# KLATNO U NEINERCIJALNOM SISTEMU 2

- Ako se voz kreće ubrzanjem $a_0$<0 (usporava), period oscilacije klatna:

a) ostaje nepromenjen

b) raste

c) smanjuje se

# KLATNO U NEINERCIJALNOM SISTEMU 3

- Dva lifta se kreću ubrzano (1. naviše, a 2. naniže). Ukoliko se u oba nalazi identičan starinski sat sa klatnom, tačno je da:

a) oba sata pokazuju isto vreme

b) sat u prvom liftu žuri, a u drugom kasni

c) sat u drugom liftu žuri, a u prvom kasni

d) ne može se reći koji žuri, a koji kasni, jer to zavisi od početnih uslova

# UTICAJ UDALJENOSTI CENTA MASE OD TAČKE VEŠANJA NA PERIOD

- Dete se klati na ljuljašci, pri čemu je period oscilacija *T*. Ako se lanac na ljuljašci skrati novi period oscilacija je:

*a)* $=T$

b) $>T$

c) $<T$

d) $=0$

# Pojava izbijanja: Slaganje oscilacija bliske $\omega_0$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Slučaj oscilacija bliske učestanosti, istih amplituda i početnih faza

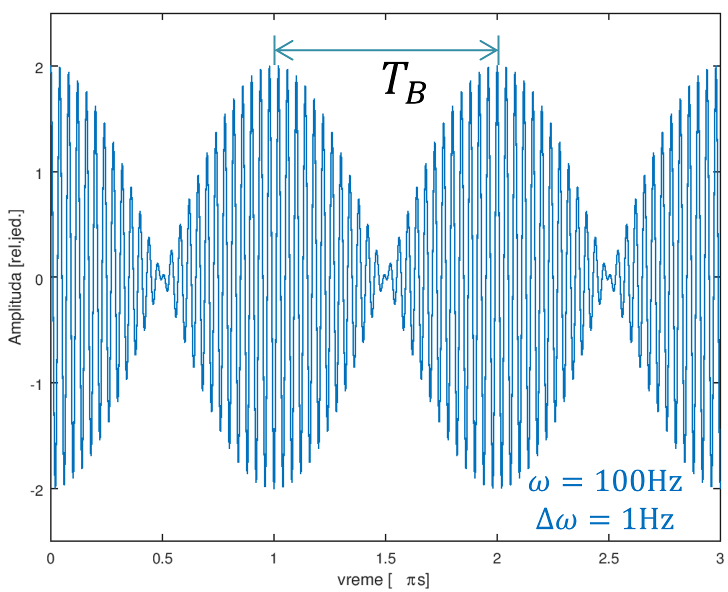
$$x_1(t) = x_0\cos(\omega_{10}t + \phi_0) \qquad x_2(t) = x_0\cos(\omega_{20}t + \phi_0)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2x_0\cos\left(\frac{\omega_{10}-\omega_{20}}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_{10}+\omega_{20}}{2}t + \phi_0\right)$$

$$\boxed{x(t) \cong 2x_0\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\omega_{sr}t + \phi_0)}$$

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_{10} - \omega_{20}}$$

$$\boxed{\omega_{sr} = \frac{\omega_{10}+\omega_{20}}{2}}$$




$$\frac{\Delta\omega}{2}T_B = \pi$$

$$\boxed{f_B = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{T_B}}$$

# Slaganje oscilacija istog pravca

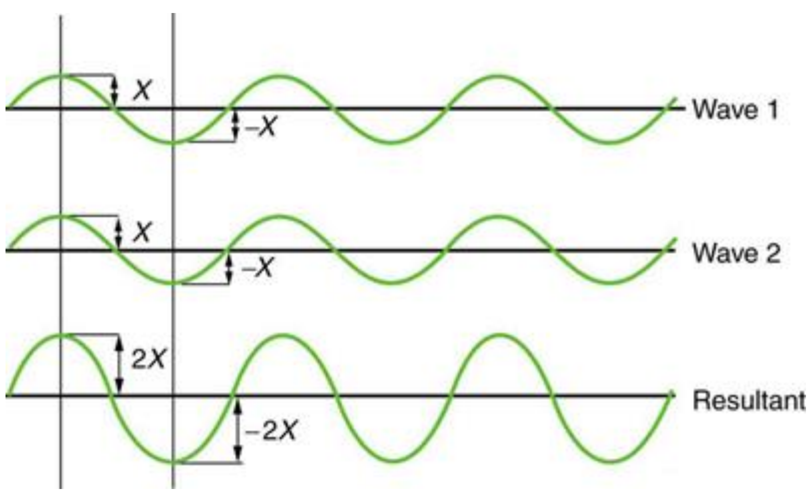
Opšti slučaj oscilacija iste učestanosti, a različitih amplituda i početnih faza

$$x_1(t) = x_{10}\cos(\omega_0 t + \phi_{10}) \qquad x_2(t) = x_{20}\cos(\omega_0 t + \phi_{20})$$

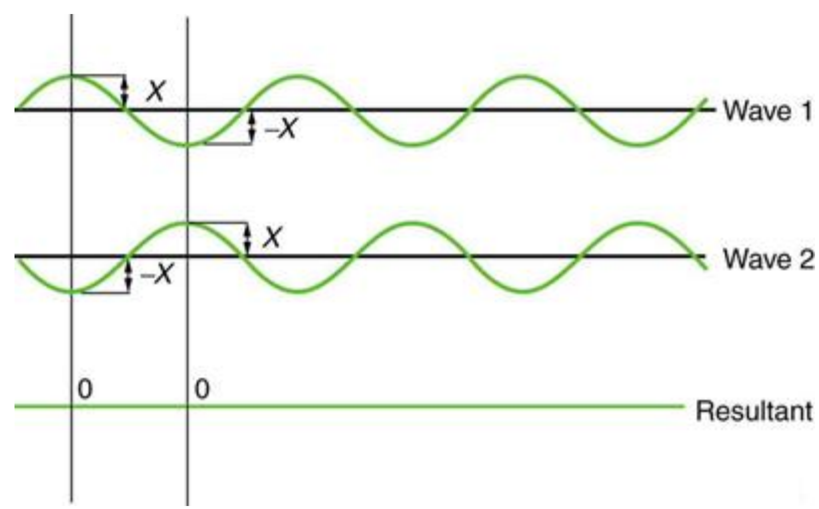
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_{10}\cos(\omega_0 t + \phi_{10}) + x_{20}\cos(\omega_0 t + \phi_{20})$$

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t + \phi)}$$

$$\boxed{x_0 = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2 + 2x_{10}x_{20}\cos(\phi_{10} - \phi_{20})}} \qquad \boxed{\tan\phi = \frac{x_{10}\sin\phi_{10} + x_{20}\sin\phi_{20}}{x_{10}\cos\phi_{10} + x_{20}\cos\phi_{20}}}$$




$x_{10} = x_{20}, \qquad \phi_{10} = \phi_{20}$




$x_{10} = x_{20}, \qquad \phi_{10} = \phi_{20} + \pi$

# Slaganje oscilacija u upravnim pravcima: primer isto $\omega_0$

Parametarske jednačine:

$$x = A\cos\omega_0 t$$

$$y = B\cos(\omega_0 t + \phi)$$

Trajektorija:

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB}\cos\phi = \sin^2\phi}$$

Lisažuove figure

1. Slučaj $\phi = 0$.

   $$y = (B/A)x$$

2. Slučaj $\phi = \pm\pi$.

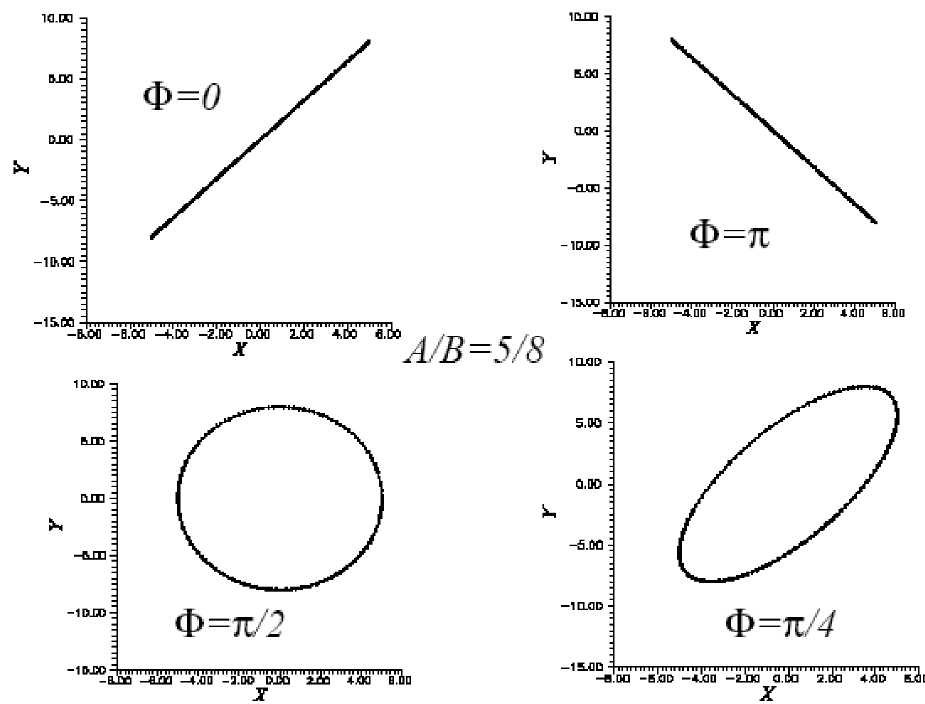
   $$y = -(B/A)x\,.$$

3. Slučaj $\phi = \pm\pi/2$.

   $$x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1\,.$$

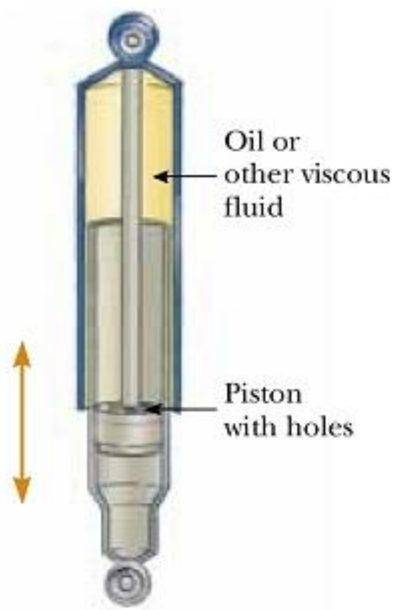
4. Slučaj $\phi = \pi/4$.

   Trajektorija je zarotirana elipsa.



# Prigušene (amortizovane) oscilacije

- Nekada je bitno da prigušenje bude malo (sat sa klatnom), a nekada je potrebno prigušiti oscilacije (točak, zgrada...)?



(a)

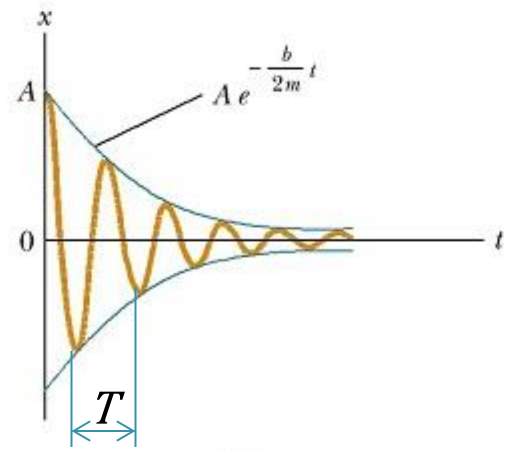
(b)

# Primer prigušenih oscilacija

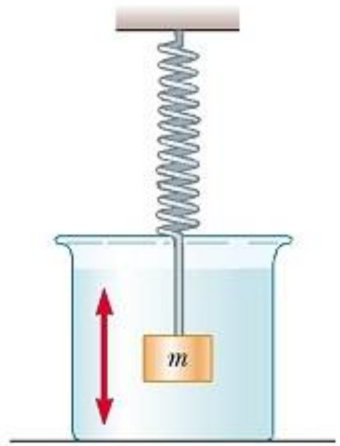
Koordinatni početak postavimo u ravnotežnu tačku $l_0$ u odnosu na nedeformisanu oprugu:

$$mg = \rho V g + k l_0.$$

$$l_0 = \frac{mg - \rho V g}{k}$$



(a)



(b)

$$\vec{F}_{otp} = -b\vec{v}$$

Za koordinatni početak u $l_0$

$$ma = m\ddot{x} = -kx - bv$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$$ sopstvena $\omega_0$ neprigušenih

$$\boxed{\alpha = \frac{b}{2m}}$$ koeficijent prigušenja

$$\boxed{\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\boxed{x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

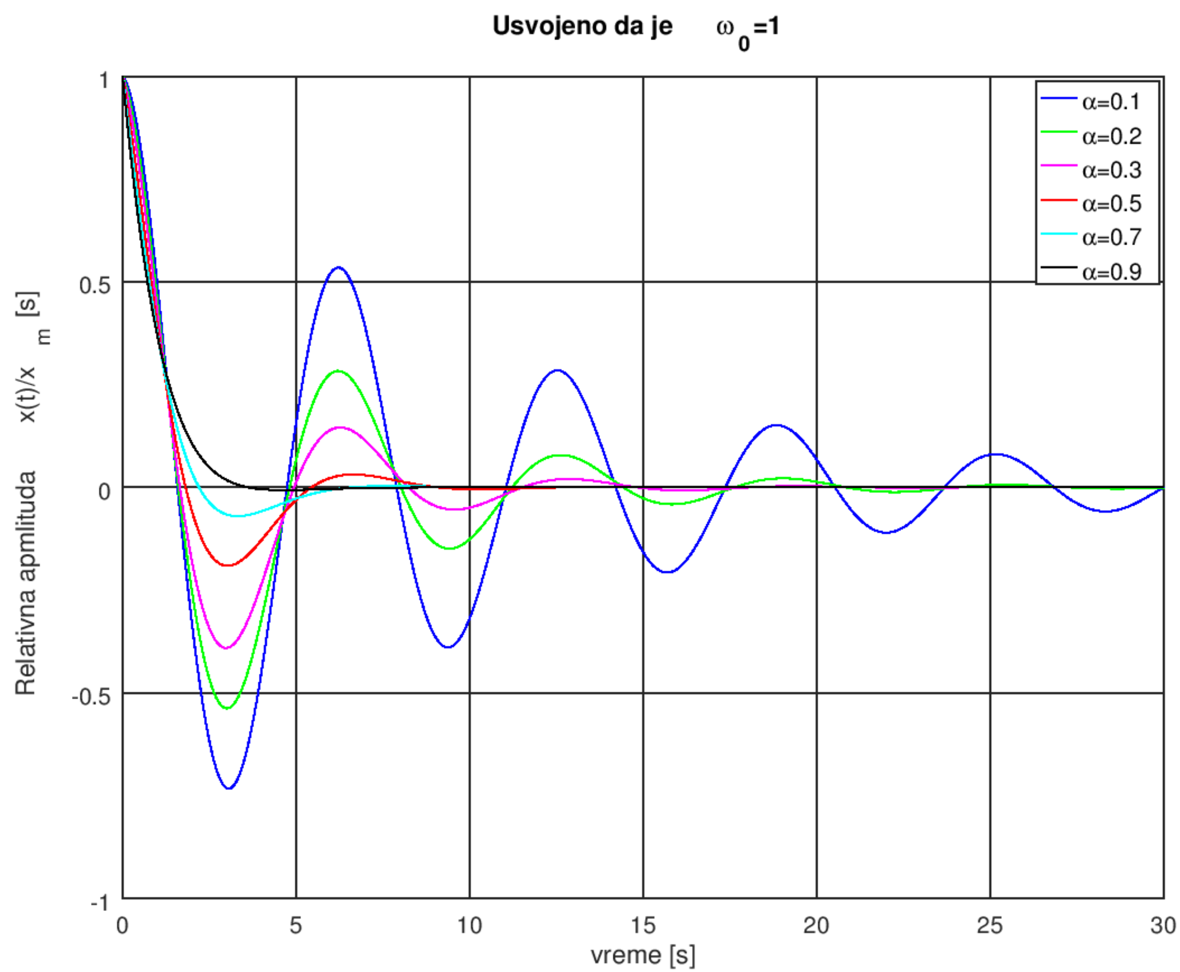
# Kvaziperiodično kretanje ($\alpha < \omega_0$)

$$\underline{s}_{1,2} = -\alpha \pm \mathrm{i}\omega$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

kružna učestanost prigušenih oscilacija

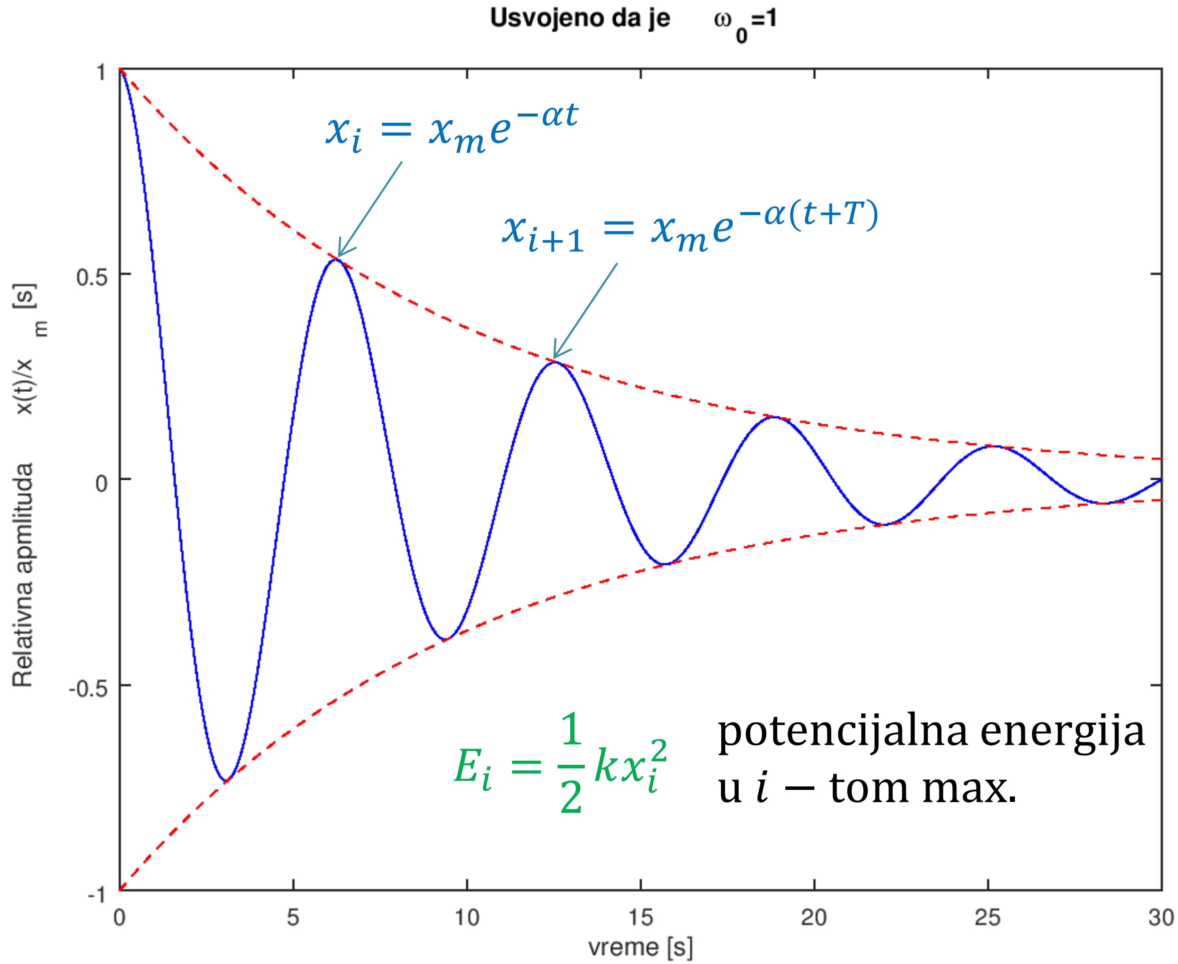
$$x(t) = x_m e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \phi)$$



# Parametri kvaziperiodičnih (podamortizovanih) oscilacija

$$x(t) = x_m(t)\ \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_m(t) = x_m e^{-\alpha t}$$




Dekrement

$$\beta = \frac{x_i}{x_{i+1}} = e^{\alpha T}$$

Logaritamski dekrement

$$\Lambda = \ln \beta = \alpha T$$

Faktor dobrote

$$Q = 2\pi \frac{E_i}{E_i - E_{i+1}}$$

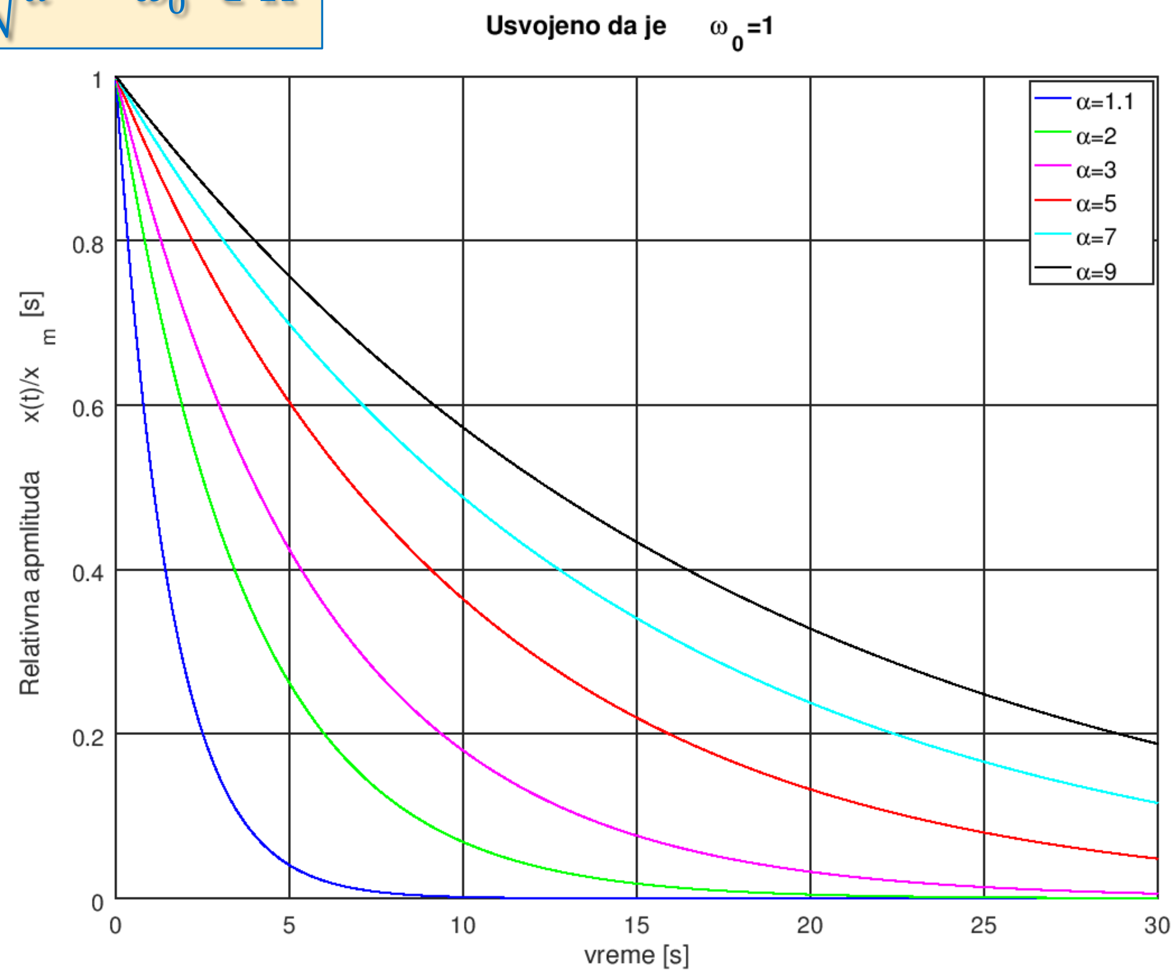
$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\alpha T}}$$

# Aperiodično (preamortizovano) kretanje ($\alpha > \omega_0$)

$$\underline{s}_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$$

$\underline{s}_{1,2} < 0$

$$x(t) = C_1 e^{\underline{s}_1 t} + C_2 e^{\underline{s}_2 t}$$



# Kritično amortizovano kretanje ($\alpha = \omega_0$)

$\boxed{s_{1,2} = -\alpha}$

$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}(C_1 + tC_2)}$$

# Prinudne oscilacije

Za koordinatni početak u tački ravnoteže

$$ma = m\ddot{x} = -kx - bv + F_0 \cos \Omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \Omega t$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\alpha = \frac{b}{2m}$$

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \Omega t$$

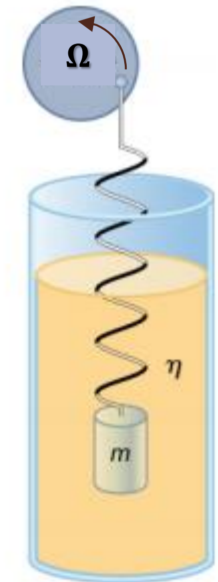
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x_h(t) = x_m e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{t \gg 0} 0$$

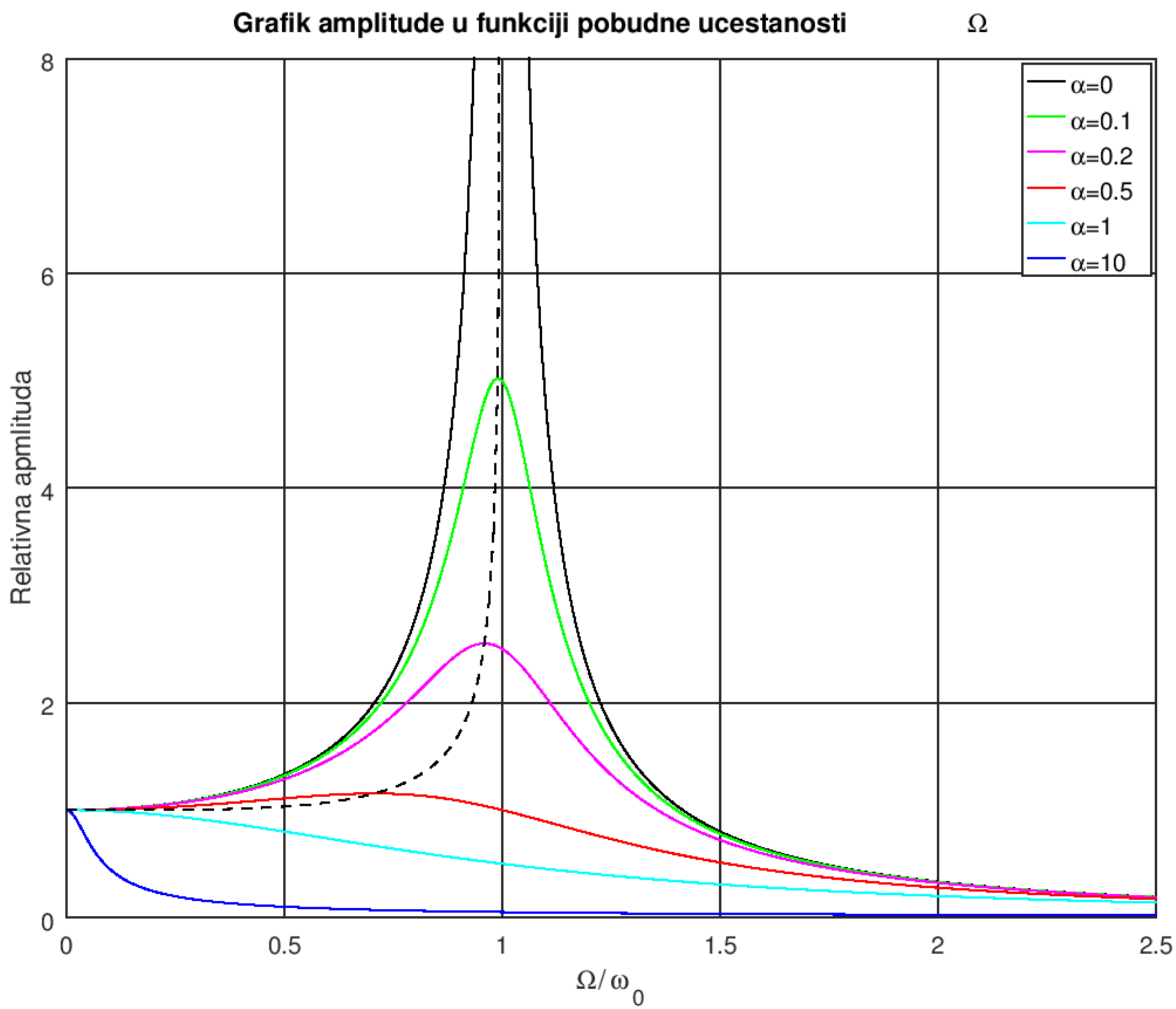
$$x_p(t) = A(\Omega) \cdot \cos(\Omega t - \varphi)$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{2\alpha\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

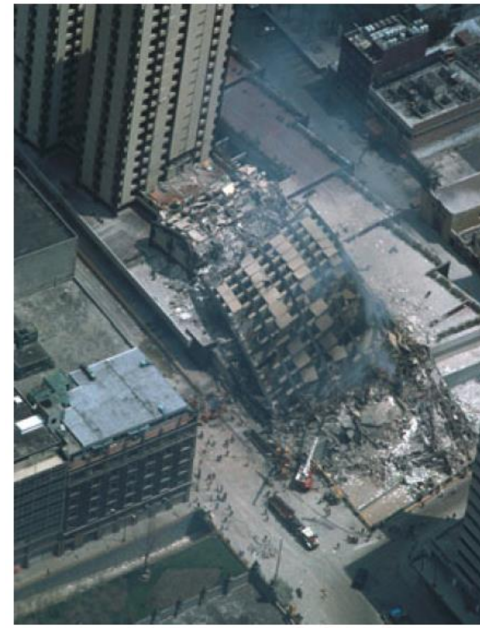


# Amplituda prinudnih oscilacija



# Rezonancija

Tacoma most 1940.



**Zemljotres Meksiko 1985.**
Srušene zgrade u određenom opsegu visina.

Uslov maksimuma amplitude: $\frac{dA}{d\Omega} = 0$

$$\boxed{\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}}$$

$$\boxed{A_{rez} = \frac{F_0/m}{2\alpha\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}}$$

# Hvala na pažnji!

- Kraj 12. časa!