FIZIKA SI

Časovi 5 i 6

Dinamika translacije i sudari

Arsoski Vladimir

NANO•OPTO•BIO

NOBEL

elektronika

odsek za fizičku elektroniku

LASERSKA TEHNIKA

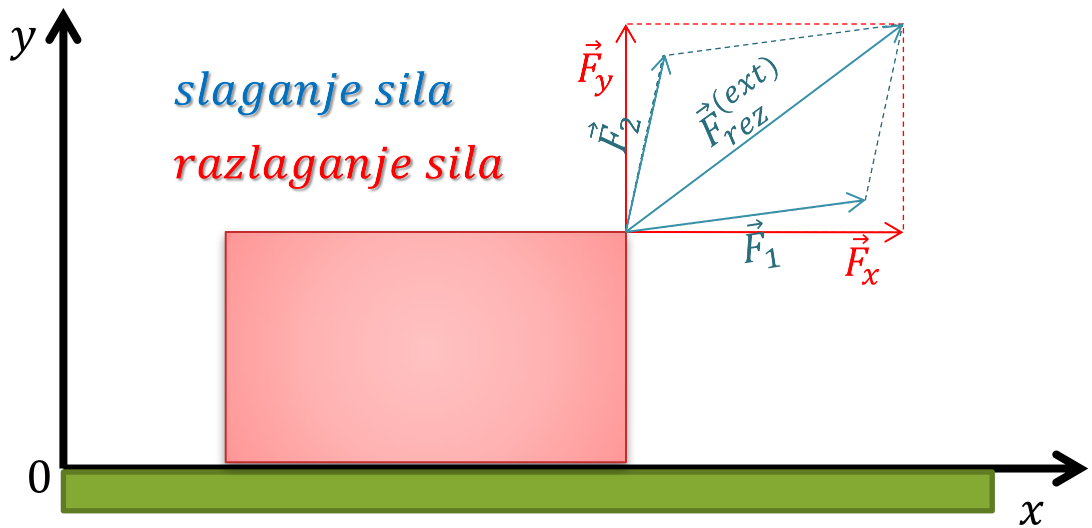
http://nobel.etf.bg.ac.yu/

Dinamika

- Proučava uzroke kretanja i uslove pod kojim se kretanje obavlja
- Podela dinamike:
  - Dinamika materijalne tačke
  - Dinamika sistema materijalnih tačaka
- Zasniva se na Njutnovim zakonima (postulati izvedeni na osnovu rezultata velikog broja eksperimenata)

Sila

- Definicija: Sila je kvantitativna mera interakcije* između tela i okoline.
- Sila je vektorska veličina (ima intenzitet, pravac i smer).
- Jedinica za silu: [F]=N.
- Princip superpozicije: Ukoliko više sila deluje na telo u istoj tački učinak je isti kao da jedna sila, koja je vektorska suma svih sila, deluje u istoj toj tački.



* Interakcija može biti kontaktna ili posredstvom polja (beskontaktna)

I Njutnov zakon*

- **Definicija:** Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili se kreće ravnomerno pravolinijski ako na telo ne deluju spoljašnje sile ili je njihova rezultanta jednaka nuli.
- Osobina tela da se protivi promeni stanja svog kretanja naziva se inertnost tela.
- Mera inertnosti tela je *masa*.
- **Jedinica:** $[m]=\text{kg}$.

* važi u inercijalnom sistemu referencije

II Njutnov zakon*

- Definicija: Proizvod mase i ubrzanja tela jednak je sumi svih sila koje deluju na telo.

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{rez}^{(ext)}$$

- Definicija 2: Brzina promene količine kretanja tela jednaka je rezultantnoj spoljašnjoj sili koja deluje na telo.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{rez}^{(ext)}$$

- Jedinica: [*F*] = N.

* važi u inercijalnom sistemu referencije (ili + F_{in}!)

Impuls

- Impuls (linearni moment):

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Sila i impuls

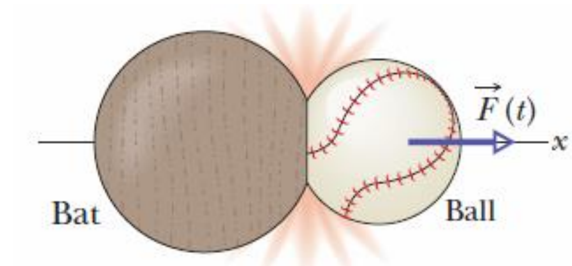
- Primer interakcije palice i lopte (konačno vreme interakcije $\Delta t > 0$).
- Iz II Njutnovog zakona:

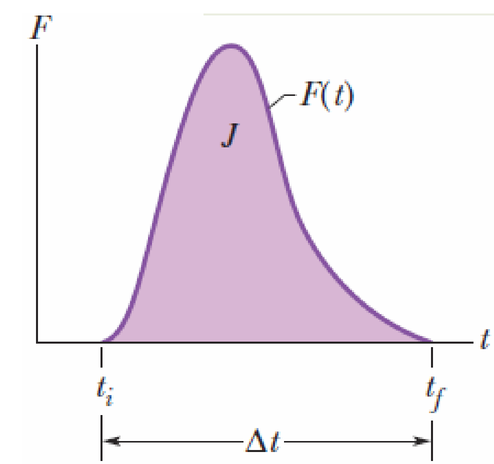
$$d\vec{p} = \vec{F}_{rez}^{(ext)} dt.$$

- Promena impulsa za vreme delovanja sile je:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{rez}^{(ext)} dt \ .$$

- Jedinica: [*p*] = kg·m/s

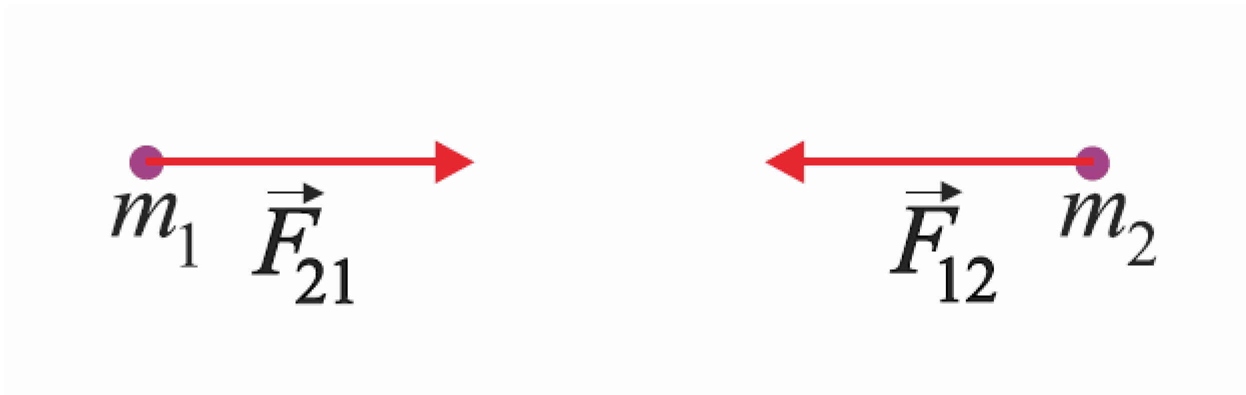




III Njutnov zakon

- Definicija: Sila akcije jednaka je po intenzitetu sili reakcije, a obrnuta je po smeru.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

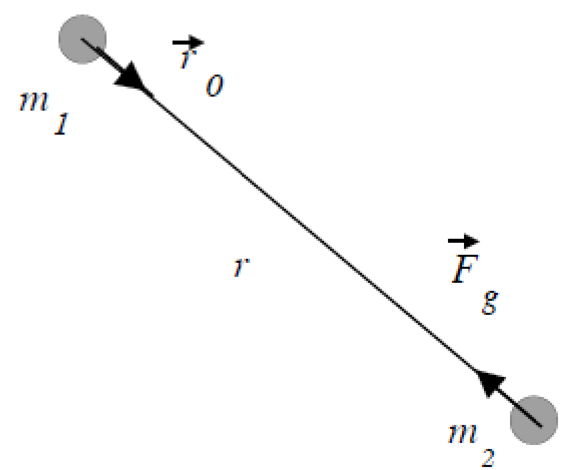


- $\vec{F}_{12}$ – sila akcije
- $\vec{F}_{21}$ – sila reakcije

Zakon gravitacije

- Gravitacija je univerzalna fizička pojava koja se manifestuje silom privlačenja između svih materijalnih objekata.
- Gravitaciona sila je najslabija poznata sila u prirodi.
- Zavisi samo od mase tela, ali ne i od njegovog sastava!

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

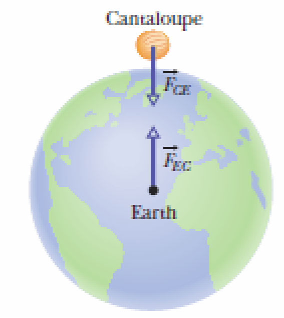


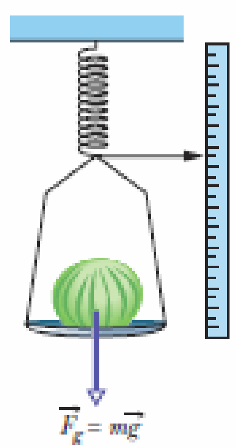
- univerzalna gravitaciona konstanta

$$\gamma = 6{,}67428 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$$

Težina tela

- Gravitaciona sila kojom Zemlja deluje na druge objekte naziva se sila Zemljine teže ili *težina tela*.
$$\vec{Q} = \vec{F}_g = m\vec{g},$$
- gde je intenzitet gravitacionog ubrzanja na površini Zemlje:
$$g = \gamma \frac{M}{R_Z^2}.$$
- F_g je usmerena je normalno na površinu, ka centru Zemljine kugle.
- Vrši akciju na podlogu (suprotstavlja joj se sila reakcije podloge).





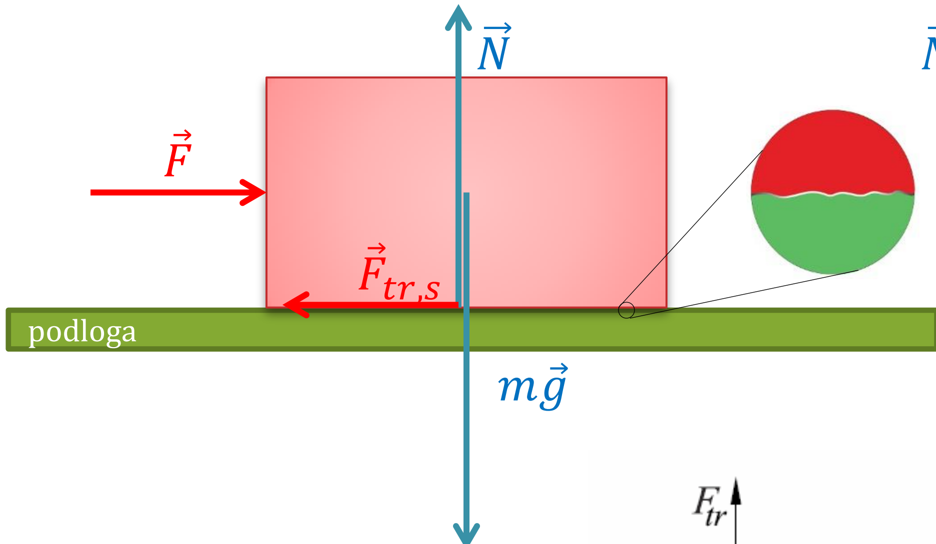
M – masa Zemlje
m – masa tela
r – rastojanje centra Zemlje i tela

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{r}_0$$

$$\vec{F}_g = m\vec{G}(r)$$

$$\vec{G}(r) = -\gamma \frac{M}{r^2} \vec{r}_0$$

Kretanje neslobodne M.T. : sila trenja



$m\vec{g}$ – gravitaciona sila (akcija)

$\vec{N}$ – normalna sila reakcije podloge

$\vec{F}$ – horizontalna spoljašnja sila

$\vec{F}_{tr,s}$ – sila trenja (statička)

Primer: kritična vrednost nagibnog ugla

Statička oblast:

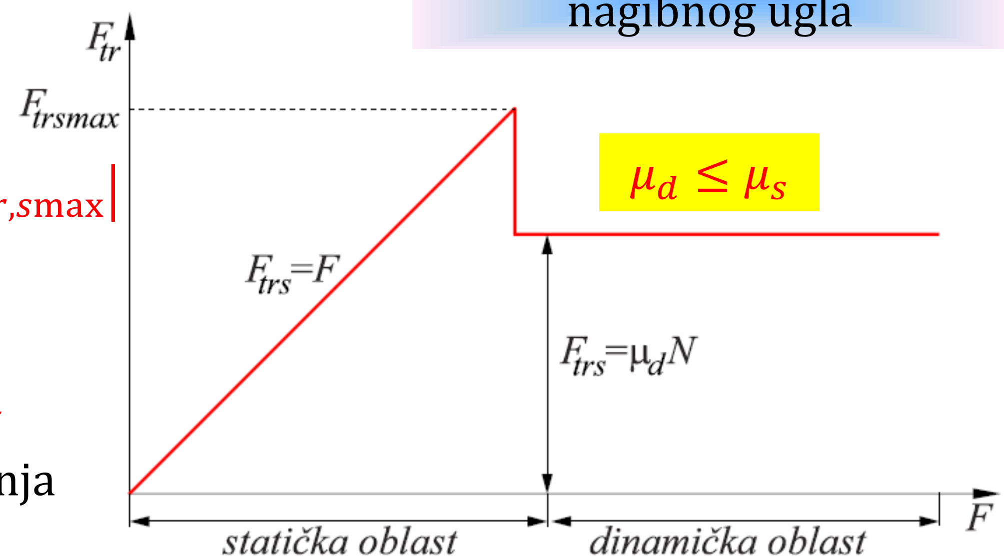
$$\left|\vec{F}_{tr,s}\right| = \left|\vec{F}\right| < \mu_s\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{F}_{tr,smax}\right|$$

μ_s – koef. statičkog trenja

Dinamička oblast:

$$\left|\vec{F}_{tr,d}\right| = \mu_d\left|\vec{N}\right| \cong const$$

μ_d – koef. dinamičkog trenja



Sila otpora sredine (slobodno kretanje M.T.)

- Zavisi od brzine tela $\vec{v}$, gustine fluida kroz ρ koji se telo kreće, površine poprečnog preseka tela S i koeficijenta otpora (zavisi od svojstava tela).
- Kada S ili $\vec{v}$ (S nije veoma malo) ili oba, imaju veliku vrednost sila otpora srazmerna je v^2:

$$\left|\vec{F}_{ot}\right| = \frac{1}{2} C\rho S v^2$$

- Kada je bilo $\vec{v}$ bilo S malo:

$$\left|\vec{F}_{ot}\right| \sim v$$

Primer: Padobranac, kosi hitac sa otporom

Primeri

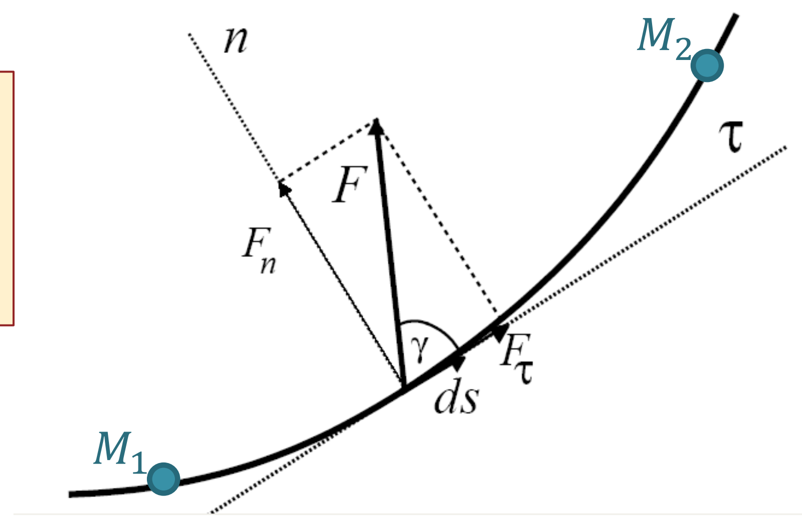
Mehanički rad

- Rad predstavlja transfer energije na objekat koji se kreće usled delovanja sile (povećava energiju kretanja tela ako je u smeru kretanja $A>0$ ili smanjuje ako usporava objekat $A<0$ ili ne menja kada je $A=0$).
- Elementarni rad sile $\vec{F}$

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = F\cos\gamma\, ds = F_\tau ds.$$

- Pri kretanju od M_1 do M_2 :

$$\boxed{A = \int_{\vec{r}_{M_1}}^{\vec{r}_{M_2}} \vec{F}d\vec{r}\,.}$$



- Jedinica: $[A]=\mathrm{J}$.

Primer!

Rad i promena kinetičke energije

- Razmotrimo rad rezultantne eksterne sile $\vec{F}_{rez}^{(ext)} = m\vec{a}$

$$A_{M_1M_2} = \int_{\vec{r}_{M_1}}^{\vec{r}_{M_2}} \vec{F}_{rez}^{(ext)} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_{M_1}}^{\vec{r}_{M_2}} m\vec{a}d\vec{r} = \int_{\vec{r}_{M_1}}^{\vec{r}_{M_2}} m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} =$$

$$= \int_{\vec{r}_{M_1}}^{\vec{r}_{M_2}} m\frac{d\vec{r}}{dt}d\vec{v} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\vec{v}d\vec{v} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} \frac{m}{2}d\vec{v}^2 =$$

$$= \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\frac{m\vec{v}^2}{2} = \int_{E_{k1}}^{E_{k2}} dE_k = E_{k2} - E_{k1}$$

- Promena kinetičke energije materijalne tačke pri bilo kom konačnom pomeraju jednaka je radu rezultantne eksterne sile koja deluje na materijalnu tačku tokom tog pomeraja.

$$\boxed{A_{1,2} = \Delta E_{k_{1,2}}}$$

Snaga

- Definicija: Snaga je brzina vršenja rada.
- Srednja snaga:

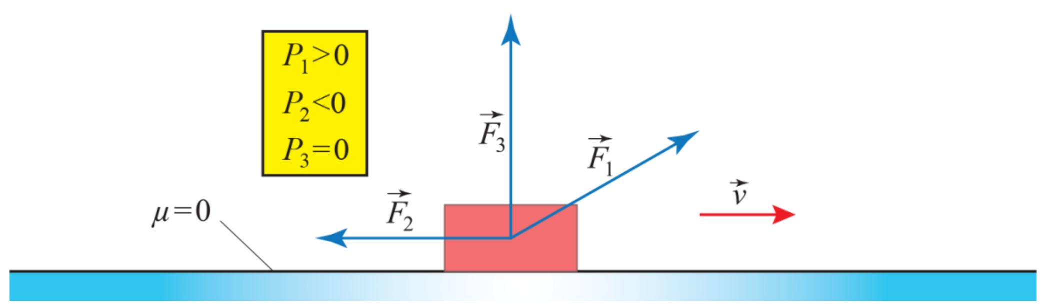
$$P_{sr} = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

- Trenutna snaga:

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

- Jedinica: $[P]$=W.



Primer!

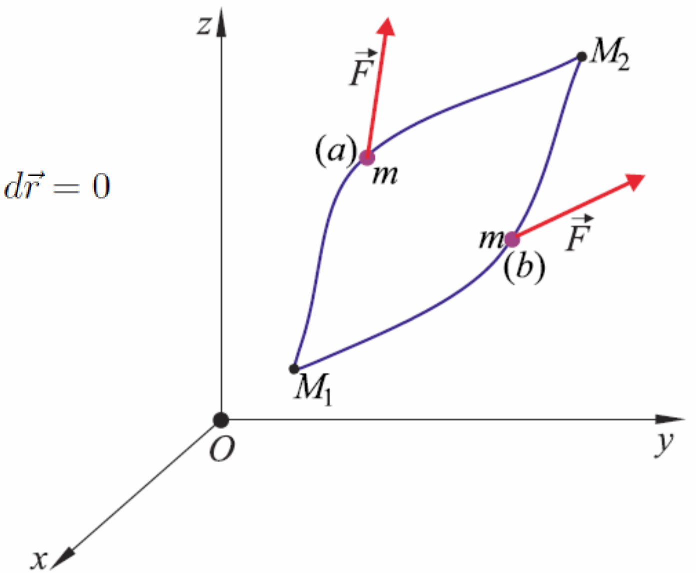
Konzervativne sile i potencijalna energija

- Definicija: Sila je konzervativna ako rad te sile pri kretanju tela na koga ona deluje ne zavisi od putanje po kojoj se telo kreće, već samo od početnog i krajnjeg položaja tela (primer: centralne sile).

$$A_{M_1,M_2(a)} = A_{M_1,M_2(b)}$$

$$\int_{\vec{r}_1(a)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1(b)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad \int_{\vec{r}_1(a)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_1(b)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\int_{\vec{r}_1(a)}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_2(b)}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad \oint_l \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$



Potencijalna energija:
$$E_p(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{ref} \vec{F} d\vec{r}$$

Ukupna mehanička energija:
$$E = E_p + E_k = const.$$

$$\Delta E_{p_{1,2}} = -A_{1,2} = -\Delta E_{k_{1,2}}$$ $$\vec{F} = -\text{grad}\, E_p$$ $$\text{rot}\vec{F} = 0$$

Primeri!

Ako imamo nekonzervativne sile?

- Promena kinetičke energije kada na MT deluje *N* sila od kojih su neke nekonzervativne sile:

$$\Delta E_{k_{1,2}} = \sum_{i=1}^{N} A_{i_{1,2}} = \sum_{i \in C} A_{i_{1,2}} + \sum_{i \in NC} A_{i_{1,2}}$$

- Za konzervativne sile ($i \in C$)

$$A_{i_{1,2}} = -\Delta E^{i}_{p_{1,2}}$$

- Za nekonzervativne sile ($i \in NC$)

$$A_{i_{1,2}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^{i}_{NC} d\vec{r}$$

Primer!

OPŠTE TEOREME DINAMIKE SISTEMA MATERIJALNIH TAČAKA

1. Centar mase sistema
2. Kretanje centra mase
3. Promena količine kretanja sistema MT
4. Sudari

Centar mase

- Mehanički sistem je skup tačaka ili tela u kojem položaj i kretanje svake tačke (tela) zavisi od ostalih u sistemu (postoji interakcija).
- Masa sistema sastavljenog od *N* čestica:

$$m = \sum_{k=1}^{N} m_k$$

- Za odabranu referentnu tačku *O* centar mase je:

$$\vec{r}_C = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \,/m$$

Primer

- gde su $\vec{r}_k$ vektori položaja čestica mase m_k.
- U Dekartovom koordinatnom sistemu:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k x_k}{m}, \qquad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k y_k}{m}, \qquad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k z_k}{m}$$

Centar mase krutog tela

- Smatra se da je kruto telo mehanički sistem čestica koje ga sačinjavaju (ima kontinualnu raspodelu tih „čestica“ pa konačne mase $\Rightarrow m_k \to \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$, gde gustinu ρ uvodimo da bi mogli da opišemo tela sa nehomogenom raspodelom mase).
- Jedinica: $[\rho] = kg/m^3$
- U opštem slučaju:

$$m = \int_m \mathrm{d}m = \int_V \rho \mathrm{d}V \,,$$

$$\vec{r}_C = \frac{\int_V \vec{r} \mathrm{d}m}{\int_V \mathrm{d}m} = \frac{\int_V \vec{r} \rho \mathrm{d}V}{\int_V \rho \mathrm{d}V}.$$

- U Dekartovom koordinatnom sistemu:

$$x_C = \frac{\int_V x\rho \mathrm{d}V}{\int_V \rho \mathrm{d}V}, \qquad y_C = \frac{\int_V y\rho \mathrm{d}V}{\int_V \rho \mathrm{d}V}, \qquad z_C = \frac{\int_V z\rho \mathrm{d}V}{\int_V \rho \mathrm{d}V}$$

Centar mase figure

- Za figure (primer: tanka ploča) uvodi se pojam površinske gustine ρ_S ($\mathrm{d}m = \rho_S \mathrm{d}S$).
- Jedinica: $[\rho_S] = kg/m^2$
- U opštem slučaju:

$$m = \int_m \mathrm{d}m = \int_S \rho_S \mathrm{d}S\,,$$

$$\vec{r}_C = \frac{\int_S \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int_S \mathrm{d}m} = \frac{\int_S \vec{r}\rho_S \mathrm{d}S}{\int_S \rho_S \mathrm{d}S}.$$

- Za ravansku figuru u Dekartovom koord. sistemu:

$$x_C = \frac{\int_S x\rho_S \mathrm{d}S}{\int_S \rho_S \mathrm{d}S}, \qquad y_C = \frac{\int_S y\rho_S \mathrm{d}S}{\int_S \rho_S \mathrm{d}S}$$

Domaći: isečak diska ugla β.

Centar mase linijskog objekta

- Za linijski objekat (primer: tanka šipka ili štap) dužine L uvodi se pojam podužne gustine ρ_l ili μ ($\mathrm{d}m = \rho_l \mathrm{d}l$).
- Jedinica: $[\rho_l] = kg/m$
- U opštem slučaju:

$$m = \int_m \mathrm{d}m = \int_l \rho_l \mathrm{d}l\,,$$

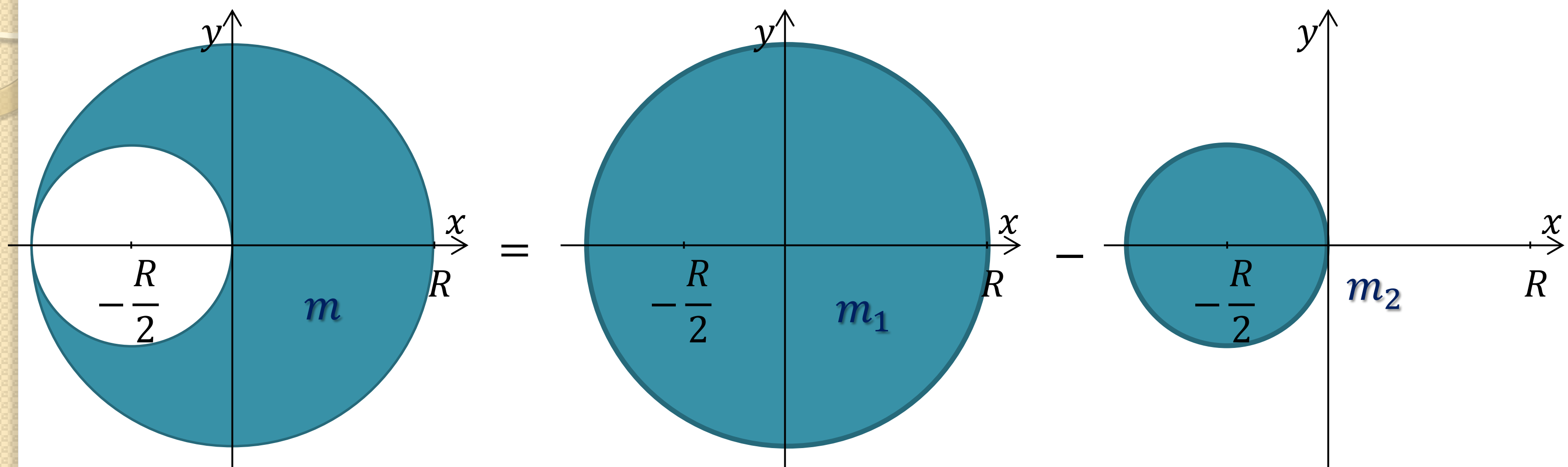
$$\vec{r}_C = \frac{\int_L \vec{r}\mathrm{d}m}{\int_L \mathrm{d}m} = \frac{\int_L \vec{r}\rho_l \mathrm{d}l}{\int_L \rho_l \mathrm{d}l}.$$

- Za pravolinijski objekat:

$$x_C = \frac{\int_L x\rho_l \mathrm{d}x}{\int_L \rho_l \mathrm{d}x}.$$

$Primer: nehomogeni\ štap, poluobruč.$

Princip superpozicije pri računanju C.M. pravilnog tela



$$m_1 = S_1\rho_S = \pi R^2\rho_S, \qquad m_2 = S_2\rho_S = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\rho_S,$$

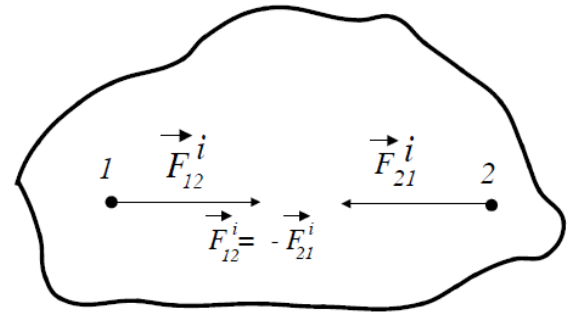
$$m = m_1 - m_2 = \frac{3}{4}\pi R^2\rho_S.$$

$$x_C = \frac{m_1\cdot 0 + (-m_2)\cdot\left(-\frac{R}{2}\right)}{m} = \frac{R}{6}\,.$$

Unutrašnje sile mehaničkog sistema

- Prema III Njutnovom zakonu:

$$\vec{F}_{jk}^{(int)} = -\vec{F}_{kj}^{(int)}$$



- sledi da je suma unutrašnjih sila:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N} \vec{F}_{jk}^{(int)} = \cancel{\vec{F}_{12}^{(int)}} + \cancel{\vec{F}_{13}^{(int)}} + \cancel{\vec{F}_{14}^{(int)}} + \cdots + \cancel{\vec{F}_{1N}^{(int)}} +$$

$$+\cancel{\vec{F}_{21}^{(int)}} + \cancel{\vec{F}_{23}^{(int)}} + \cancel{\vec{F}_{24}^{(int)}} + \cdots + \cancel{\vec{F}_{2N}^{(int)}}$$

$$+\cancel{\vec{F}_{31}^{(int)}} + \cancel{\vec{F}_{32}^{(int)}} + \cancel{\vec{F}_{34}^{(int)}} + \cdots + \cancel{\vec{F}_{3N}^{(int)}}$$

itd ...

$$\vdots$$

$$= \cancel{\vec{F}_{N1}^{(int)}} + \cancel{\vec{F}_{N2}^{(int)}} + \cancel{\vec{F}_{N3}^{(int)}} + \cdots + \cancel{\vec{F}_{N,N-1}^{(int)}} = 0$$

II Njutnov zakon za mehanički sistem (sistem čestica)

- Polazeći od izraza za položaj centra mase

$$m \cdot \vec{r}_C = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{r}_k \,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$m \cdot \vec{v}_C = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k = \vec{P}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

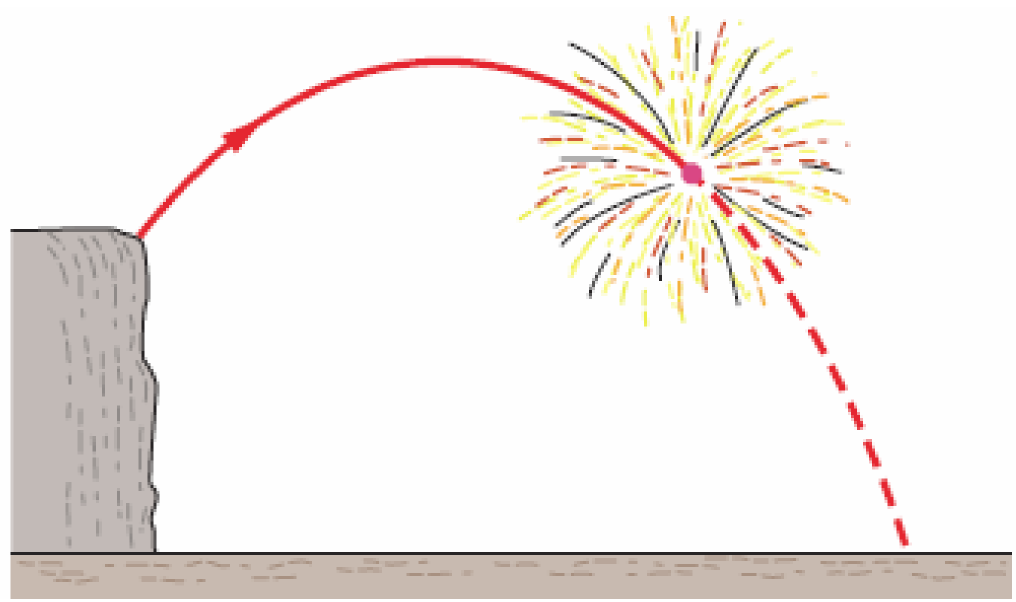
$$m \cdot \vec{a}_C = \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{a}_k = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j \neq k} \vec{F}_{jk}^{(int)} + \vec{F}_k^{(ext)} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j \neq k} \vec{F}_{jk}^{(int)} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(ext)} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(ext)} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}.$$

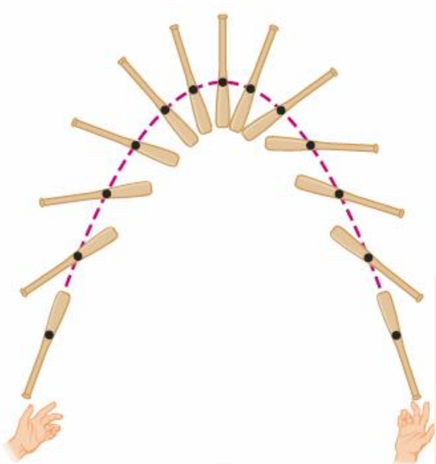
- Centar mase se kreće kao da je on čestica čija je masa jednaka ukupnoj masi sistema.

Primeri

(a)



Centar mase vatrometa nakon eksplozije nastavlja da se kreće po paraboličnoj putanji. Unutrašnje sile pri eksploziji nemaju uticaj na kretanje centra mase.



(b)

Centar mase bačene palice prati paraboličnu putanju, dok se telo palice kreće na složen način.

Teorema o promeni količine kretanja sistema MT

- Za mehanički sistem od N čestica:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(ext)} .$$

- Spoljašnje sile koje deluju na sistem će dovesti do ukupne promene impulsa sistema u intervalu vremena od t_1 do t_2:

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \sum_{k=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k^{(ext)} \mathrm{d}t .$$

- Ukoliko je suma svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(ext)} = 0 \Longrightarrow \vec{P} = const.$$

Za izolovan mehanički sistem važi zakon očuvanja ***količine kretanja***!

Sudari (u izolovanom sistemu)

- Generalno važi zakon održanja količine kretanja. Tada je (indeks 0 označava veličine pre sudara):

$$\vec{P}_0 = \vec{P} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_i \vec{p}_{0i} = \sum_i \vec{p}_i = const$$

- Generalno važi zakon održanja energije (ne samo mehaničke, i prelaz iz jednog vida u drugi)

$$\sum_i E_{0i} = \sum_i E_i = const$$

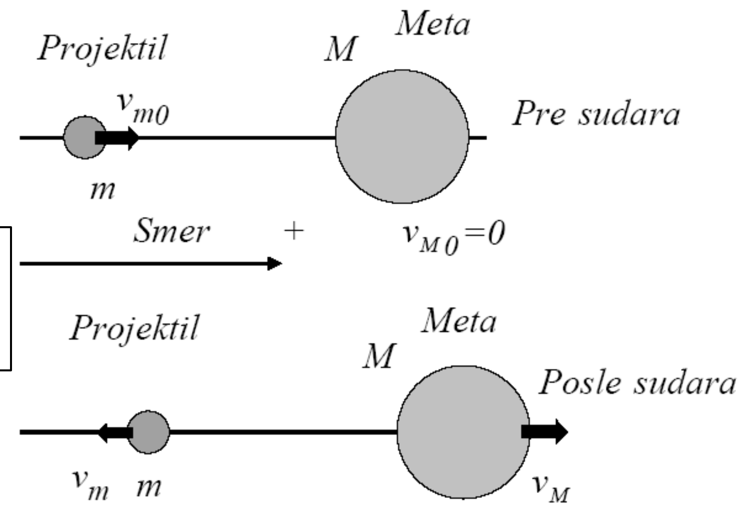
- Samo za elastični sudar održava se kinetička energija sistema (kada je E_p pre i posle sudara isto):

$$\sum_i E_{k,0i} = \sum_i E_{k,i} = const$$

Elastični čeoni sudar

Z.O.P.: $$m v_{m0} = -m v_m + M v_M \, .$$

Z.O.E.: $$m v_{m0}^2/2 = m v_m^2/2 + M v_M^2/2 \, ,$$



$$\frac{v_m}{v_{m0}} = \frac{M - m}{M + m} \, .$$

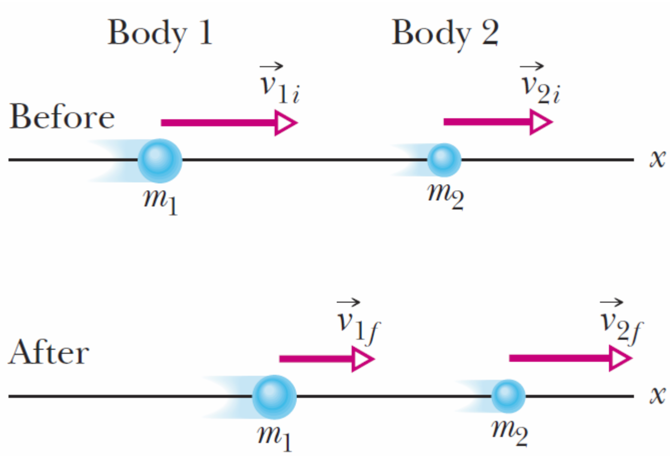
$$v_M = \frac{2m}{M + m} v_{m0} \, .$$

$$\Delta E_m = \frac{4mM}{(M + m)^2} E_{m0}$$

Čeoni sudar – kada se čestice pre i posle sudara kreću po istom pravcu

Neelastičan čeoni sudar

- Neelastičan sudar

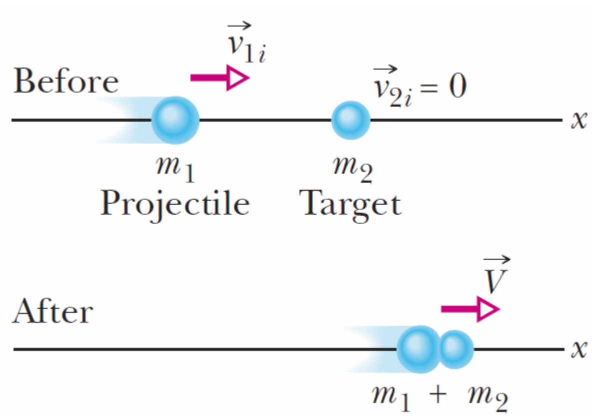


Važi Z.O.P:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}.$$

Treba podatak o promeni (gubitku) mehaničke energije!

- Totalno neelastičan (plastičan) čeoni sudar

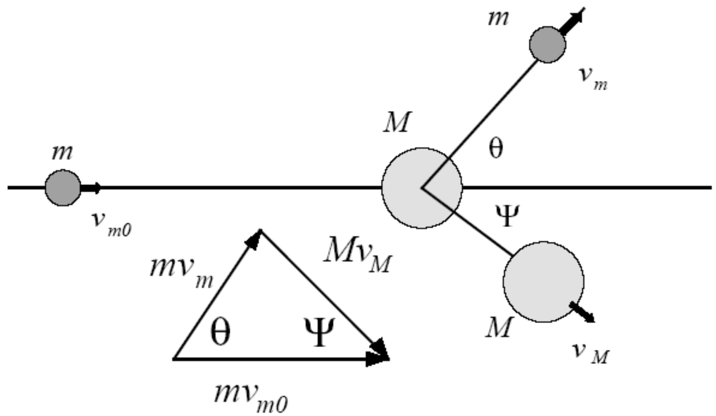


$$v_{1f} = v_{2f} = V$$

$$m_1v_{1i} = (m_1 + m_2)V$$

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_{1i}.$$

Elastičan sudar sa raštrkavanjem



$$mv_{m0} = mv_m \cos\theta + Mv_M \cos\psi\,,$$

$$mv_m \sin\theta = Mv_M \sin\psi\,,$$

$$mv_{m0}^2/2 = mv_m^2/2 + Mv_M^2/2\,,$$

$$\boxed{v_M = \frac{2m}{M+m} v_{m0} \cos\psi\,.}$$

$$v_m = \frac{2M}{M+m} v_{m0} \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta} = \frac{M}{m+M} v_{m0} \frac{\sin 2\psi}{\sin\theta}, \quad = \frac{v_{m0}}{\cos\theta(1+\tan\theta/\tan\psi)}\,.$$

Primer: *maksimalan ugao rasejanja* θ_{max}!

Hvala na pažnji!

- Kraj 6. časa!