Elektrotehnički fakultet u Beogradu,
Odsek za softversko inženjerstvo

Nastavni materijal za 9. nastavnu nedelju
(od 6.04.2020. do 10.04.2020.)
Matematika 2 - predavanja

SADRŽAJ

LITERATURA:

M. Rašajski, B. Malešević, T. Lutovac, B. Mihailović, N. Cakić: "*Linearna algebra*", Elektrotehnički fakultet, Akademska misao, Beograd 2017.

1 Rang matrice

Definicija 1.
Broj r je rang date matrice $A_{m\times n} \neq [0]_{m\times n}$ (oznaka $rang(A) = r$) akko u matrici $A_{m\times n}$ postoji kvadratna regularna submatrica reda r, dok su sve kvadratne submatrice reda većeg od r, ukoliko postoje, singularne.

Specijalno, $rang(A) = 0$ akko je $A_{m\times n}$ nula matrica.

Napomena: iz definicije sledi da za proizvoljnu matricu $A_{m\times n}$ važi $0 \leq \text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Definicija 2. Neka je data matrica $A_{m\times n} \neq [0]_{m\times n}$ za koju je $rang(A) = r$.
Bazna submatrica date matirce A je svaka[1] regularna submatrica reda r koju možemo uočiti u datoj matrici A.

Primer 1. Odrediti rang matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & -15 \end{bmatrix}_{3\times 4}$.

ОДМАХ СЕ ВИДИ ДА ЈЕ $0 < rang(A) \leq 3$.

ДА ЛИ ЈЕ $rang(A) = 3$? ДА ЛИ ПОСТОЈИ РЕГУЛАРНА СУБМАТРИЦА РЕДА 3?

СВЕ КВАДРАТНЕ СУБМАТРИЦЕ РЕДА 3 (ИМА ИХ $\binom{4}{3}$) СУ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -15 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -15 \end{bmatrix} \text{ И } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -15 \end{bmatrix}.$$

СВЕ СУ СИНГУЛАРНЕ (ТЈ. ДЕТЕРМИНАНТА СВАКЕ ЈЕДНАКА ЈЕ 0).

утврдити!

ДАКЛЕ, $rang(A) < 3$.

Да ли је $rang(A) = 2$? ДА ЛИ ПОСТОЈИ РЕГУЛАРНА СУБМАТРИЦА РЕДА 2?

МЕЂУ КВ. СУБМАТРИЦАМА РЕДА 2 (А ИМА ИХ $\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}$)
ПОСТОЈИ РЕГУЛАРНА - НА ПРИМЕР: $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\left(\det. \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0\right)$.

ДАКЛЕ, $rang(A) = 2$.

[1]Na osnovu Definicije 1, u matrici A postoji bar jedna regularna submatica reda r.

Određivanje ranga matrice na osnovu definicije može biti zahtevan i dug posao, posebno kada su u pitanju matrice većih dimenzija!

Na primer, neka je data matrica $A_{6\times 8}$. S obzirom na njene dimenzije, rang može najviše da bude jednak 6. Neka je pronađena jedna bazna submatrica reda 2. Koliko kvadratnih submatrica reda 3, 4, 5 i 6 treba da bude ispitano, da bi mogli da zaključimo da je $rang(A) = 2$?

1.1 Jedan brži algoritam za računanje ranga matrice

Primetimo da se rang neke *trougaone* matrice ili rang takozvane "stepenaste matrice"[2] može lako odrediti:

Primer 2.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad rang(A) = 4$$

ТРОУГАОНА МАТРИЦА

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rang(B) = 3$$

ТРОУГАОНА МАТРИЦА

„СТЕПЕНАСТА"

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & -9 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad rang(C) = 3$$

Ideja: Za brže određivanje ranga svešćemo matricu (onu čiji rang određujemo) na oblik trougaone ili stepenaste matrice. Ovo svođenje podrazumeva konačnu primenu takozvanih *elemantarnih transformacija matrice.*

Definicija 3. Elementarne transformacije matrice su:

1) Zamena mesta dve vrste (ili kolone) matrice;

2) Množenje jedne vrste (ili kolone) matrice brojem koji je različit od nule;

3) Dodavanje elemenata jedne vrste (kolone) matrice, prethodno pomnoženih nekim brojem, odgovarajućim elementima druge vrste (ili kolone).

Definicija 4. Kažemo da su matrice A i B ekvivalentne (oznaka $A \cong B$) akko se mogu dobiti jedna iz druge primenom konačnog broja elementarnih transformacija.

[2] Opisno rečeno matrica A je *stepenasta* ako svaka njena ne-nula vrsta ima bar jedan ne-nula element ispod koga se, u odgovarajućoj koloni matrice, nalaze sve nule.

Može se dokazati sledeće tvrđenje:

Teorema 1. Elementarne transformacije ne menjaju rang matrice.

Dakle, za matricu A iz Primera 1 imamo:

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1&3\\1&1&2&-3\\-1&3&4&-15\end{bmatrix}\cong\begin{bmatrix}1&1&2&-3\\2&0&1&3\\-1&3&4&-15\end{bmatrix}\Big/\cdot(-2)\cong\begin{bmatrix}1&1&2&-3\\0&-2&-3&9\\-1&3&4&-15\end{bmatrix}\Big/\cdot 1\cong$$

$$\cong\begin{bmatrix}1&1&2&-3\\0&-2&-3&9\\0&4&6&-18\end{bmatrix}\Big/\cdot 2\cong\begin{bmatrix}1&1&2&-3\\0&-2&-3&9\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

одмах се види да је ранг ове матрице 2

На основу Теореме 1 све ове матрице имају исти ранг.

Дакле, $\operatorname{rang}(A)=2$.

Primer 3.

U zavisnosti od realnih parametara p i q odrediti rang matrice $A=\begin{bmatrix}3&5&4&-2&2\\6&4&3&-p&3\\9&3&2&-6&q\end{bmatrix}$.

$$A=\begin{bmatrix}3&5&4&-2&2\\6&4&3&-p&3\\9&3&2&-6&q\end{bmatrix}\Big/\cdot(-2)\ \Big/\cdot(-3)\cong\begin{bmatrix}3&5&4&-2&2\\0&-6&-5&4-p&-1\\0&-12&-10&0&q-6\end{bmatrix}\Big/\cdot(-2)$$

$$\cong\begin{bmatrix}3&5&4&-2&2\\0&-6&-5&4-p&-1\\0&0&0&2p-8&q-4\end{bmatrix}$$

На основу Теореме 1 све матрице имају исти ранг.

Ранг је најлакше одредити за последњу матрицу (због њене „степенасте форме")

Ако је $2p-8=0$ и $q-4=0$
тј. за $p=4$ и $q=4$ имамо: $\begin{bmatrix}3&5&4&-2&2\\0&-6&-5&0&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ па је $\operatorname{rang}(A)=2$.

Ако није ($p=4$ и $q=4$) тј.
ако је $p\neq 4$ или $q\neq 4$ тада је $\operatorname{rang}(A)=3$ јер се могу уочити регуларне субматрице реда 3: $\begin{bmatrix}3&5&-2\\0&-6&4-p\\0&0&2p-8\end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix}3&5&2\\0&-6&-1\\0&0&q-4\end{bmatrix}$.

Takođe važe i sledeća tvrđenja:

Teorema 2. Transponovanjem matrice ne menja se njen rang.

Teorema 3. Neka je data matrica $A_{m\times n}$ i neka su izdvojeni vektori vrsta: $v_i = [\, a_{i1} \dots a_{in} \,] \in F^{1\times n}$ $(i=1,\dots,m)$. Ako je $\mathrm{rang}(A) = r$, tada među vektor vrstama v_i postoji tačno r linearno nezavisnih vektora a preostlih $m-r$ vektora su linearne kombinacije ovih r vektora.

Jedna primena prethodne teoreme ilustrovana je u Primeru 4.

Teorema 4. Neka je data matrica $A_{m\times n}$ i neka su izdvojeni vektori kolona: $w_j = [\, a_{1j} \dots a_{mj} \,]^{\mathrm{T}} \in F^{m\times 1}$ $(j=1,\dots,n)$. Ako je $\mathrm{rang}(A) = r$, tada među vektor kolonama w_j postoji tačno r linearno nezavisnih vektora a preostlih $n-r$ vektora su linearne kombinacije ovih r vektora.

Primer 4. Дати су вектори $\vec{v}_1 = (3,2,1,2)$, $\vec{v}_2 = (-1,2,2,1)$ и $\vec{v}_3 = (4,8,6,6)$ из векторског простора $\mathbb{R}^4$.

Одредити број линеарно независних вектора у скупу $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Решење: Формирајмо матрицу
$$A = \begin{array}{c} \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

Према Теореми 3: rang(A) је једнак броју линеарно независних вектора врста.

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \cong \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{l} v_2 \quad /\cdot 3 \\ v_1 \quad + \\ v_3 \end{array} \cong \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \end{array}\right]\begin{array}{l} v_2 \quad /\cdot 4 \\ v_1+3v_2 \\ v_3 \quad + \end{array}$$

$$\cong \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 5 \\ 0 & 16 & 14 & 10 \end{array}\right]\begin{array}{l} v_2 \\ v_1+3v_2 \quad /\cdot(-2) \\ v_3+4v_2 \quad + \end{array} \cong \left[\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} v_2 \\ v_1+3v_2 \\ v_3+4v_2-2\cdot(v_1+3v_2) \end{array}$$

Закључујемо да је rang(A) = 2, што (на основу Теореме 3) значи да су нека два вектора лин. независна.

Из последње матрице, пратећи њену нула врсту, закључујемо: $(0,0,0,0) = \vec{v}_3 - 2\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1$

тј. $\vec{0} = \vec{v}_3 - 2\vec{v}_2 - 2\vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_3 = 2\cdot\vec{v}_1 + 2\cdot\vec{v}_2$

$\Rightarrow$ век. v_1 и v_2 су лин. независни век. а век. $\vec{v}_3$ је линеарна комбинација век. $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

2 Sistemi linearnih jednačina

2.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.

Neka je dato polje $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$. Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih, nad poljem $\mathbf{F}$, je skup (konjunkcija) jednačina oblika:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad (\mathcal{S})$$

gde su: $x_1, x_2, ...x_n$ nepoznate, $a_{ij} \in F$ $(i = 1, ...m,\ j = 1, ..., n)$ su koeficijenti sistema, $b_i \in F$ $(i = 1, ...m)$ su slobodni članovi sistema.

Ako je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, tada se sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ naziva *homogeni sistem*. U suprotom, ako postoji $b_i \neq 0$, sistem linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ se naziva *nehomogeni sistem*.

Sistem $(\mathcal{S})$ može biti zapisan i u matričnom obliku $A \cdot X = b$ tj.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b}$$

Definicija 2.

Uređena n-torka $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \in F^n$ je rešenje sistema $(\mathcal{S})$ akko zamenama $x_i := \alpha_i$, $(i = 1, ...n)$ svaka jednačina sistema postaje tačna jednakost.

Sistem je *saglasan (neprotivrečan)* akko ima bar jedno rešenje.

U suprotnom, sistem je *protivrečan* (nesaglasan).

Definicija 3. Matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ i $A^b = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ nazivaju se redom matrica sistema i proširena matrica sistema.

Definicija 4. Dva sistema linearnih jednačina su ekvivalentna akko imaju isti skup rešenja.

2.2 Gausov metod eliminacije za rešavanje sistema linearnih jednačina

Ovaj metod za rešavanje sistema studenti su već upoznali i koristili u srednjoškolskoj matematici.

Domaći zadatak:
Obnoviti Gausov metod eliminacije tj. Gausov algoritam za rešavanje sistema linearnih jednačina!

Ovde ćemo samo ukratko ponoviti neke najvažije pojmove i rezultate.
Gausovim metodom eliminacije polazni sistem se transformiše u ekvivalentan sistem, čije je rešenje lakše odrediti.
Cilj je: transformisati polazni sistem u ekvivalentni sistem u "stepenastom obliku" tj. u sistem sledećeg oblika:

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha_{1j_1}x_{j_1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \alpha_{1n}x_n & = & \beta_1 \\
\alpha_{2j_2}x_{j_2} + \dots\dots\dots\dots + \alpha_{2n}x_n & = & \beta_2 \\
\vdots & & \\
\alpha_{rj_r}x_{j_r} + \dots\dots + \alpha_{rn}x_n & = & \beta_r \\
0 & = & \beta_{r+1} \\
 & \vdots & \\
0 & = & \beta_m
\end{array}
$$

gde je $r \leq m, n$, $\quad j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ i koeficijenti $\alpha_{1,j_1}, \alpha_{2,j_2}, \ldots, \alpha_{r,j_r} \neq 0$.
Nepoznate $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots x_{j_r}$ se zovu vezane nepoznate, a ostale, ako postoje, slobodne nepoznate.

Napomena: U slučaju da je $r = m$ ovaj sistem ne sadrži jednačine oblika $0 = \beta_i$.

Transformisanje sistema u stepenasti oblik postiže se konačnom primenom *elementarnih transformacija sistema* i to transformisanje nije jedinstveno.

Definicija 5.
Elementarne transformacije sistema $(\mathcal{S})$ su sledeće transformacije njegovih jednačina:

(1) Zamena mesta dve jednačine sistema;

(2) Množenje jedne jednačine sistema brojem koji je različit od nule;

(3) Dodavanje jedne jednačine, prethodno pomnožene nekim brojem, nekoj drugoj jednačini sistema.

Sledeća teorema je u osnovi *Gausovog metoda eliminacije* tj *Gausovog algoritma* za rešavanje sistema linearnih jednačina.

Teorema 1. Elementarne transformacije ne menjaju skup rešenja sistema $(\mathcal{S})$.

Napomena 1. Elementarnom transformacijom sistema linearnih jednačina $(\mathcal{S})$ možemo smatrati i zamenu dva sabiraka u jednoj jednačini ukoliko se odgovarajuće zamene izvrše u svim jednačinama sistema tako da se iste nepoznate pišu jedne ispod drugih. Ovom transformacijom se vrši zamena redosleda u nizu nepoznatih!

Napomena 2. Za svaku **elementarnu transformaciju vrsta** proširene matrice sistema postoji odgovarajuća **elementarna transformacija sistema**, i obrnuto.

Primer 1.

Rešiti sistem Gausovim metodom eliminacije:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & -2x_2 & + & x_3 & = & -2, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Rešenje:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & (\mathrm{V}_2 := -\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2) \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 & \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 & \\ \hline \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & (\mathrm{V}_3 := -3\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_3) \\ & & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 0 & \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 & \\ \hline \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \\ & & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 0 & (\mathrm{V}_3 := -2\mathrm{V}_2 + \mathrm{V}_3) \\ & & 6x_2 & - & 8x_3 & = & -1 & \\ \hline \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 & \\ & & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 0 & \\ & & & & 0 & = & -1 & \end{array}$$

Zbog jednačine $0 = -1$ sistem je nesaglasan (protivrečan, nema rešenja).

$\square$

Primer 2.

Rešiti sistem Gausovim metodom eliminacije:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3. \end{array}$$

Rešenje:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & (\mathsf{V}_1 \longleftrightarrow \mathsf{V}_2) \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 & \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 & (\mathsf{V}_2 := 2\mathsf{V}_1 + \mathsf{V}_2) \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 & \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 & (\mathsf{V}_3 := -\mathsf{V}_1 + \mathsf{V}_3) \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 5 & \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 & \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 5 & (\mathsf{V}_3 := \mathsf{V}_2 + \mathsf{V}_3) \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -5 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Poslednji sistem, dakle i dati sistem ima beskonačno mnogo rešenja:

$$x_3 = t, \quad x_2 = t - \frac{5}{3}, \quad x_1 = t - \frac{4}{3}, \quad t \in R.$$

$\square$

3 Kroneker-Kapelijeva teorema

Sledeća teorema je jedna od centralnih teorema linearne algebre i daje kriterijum rešivosti (tj. saglasnosti) sistema linearnih jednačina:

Teorema 2. (Kroneker-Kapelijeva teorema)
Sistem linearnih jednačina je saglasan ako i samo ako je $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^b)$, gde je A matrica sistema, a A^b proširena matrica sistema.

Napomena: Kroneker-Kapelijeva teorema utvrđuje da li sistem ima rešenje ali ne pokazuje kako da se rešenje sistema odredi! Zato ćemo u konkretnim zadacima kombinovati Kroneker-Kapelijevu teoremu i Gausov algoritam.

Broj rešenja saglasnog sistema $(\mathcal{S})$ od m linearnih jednačina sa n nepoznatih, neposredno zavisi od ranga matrice sistema. Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3. Saglasan sistem jednačina $(\mathcal{S})$ ima:

1) jedinstveno rešenje, ako je $rang(A) = n$;

2) beskonačno mnogo rešenja, ako je $rang(A) < n$.

Primer 3. Primenom Kroneker–Kapelijeve teoreme ispitati saglasnost sistema u zavisnosti od realnog parametra a, i u slučaju saglasnog sistema odrediti rešenje sistema.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & - & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & a. \end{array}$$

Rešenje:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & a \end{array}\right] \begin{array}{l} /\cdot(-2) \;\; /\cdot(-3) \\ \xleftarrow{+} \\ \longleftarrow \end{array} \cong \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & a-6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ /\cdot(-2) \\ \xleftarrow{+} \end{array} \cong$$

$$\cong \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array}\right]$$

Одавде имамо: за $a \neq 4$ ранг$(A) = 2$, ранг$(A^b) = 3$

$\Rightarrow$ систем нема решења.

За $a = 4$ ранг$(A) =$ ранг$(A^b) = 2$

$\Rightarrow$ сис. је сагласан (тј. има решења).

Последња матрица је проширена матрица следећег система (који је еквивалентан полазном систему):

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\; -6x_3 - 5x_4 = -1 \end{cases}$$

чије је решење:

(x_1, x_2, x_3, x_4) тд. $x_1 = t$,

$x_3 = p$, $\quad t, p \in R$

$x_4 = \frac{1}{5} - \frac{6}{5}p$

$x_2 = \frac{3}{2}t + \frac{1}{10}p - \frac{3}{5}$

Primer 4. Primenom Kroneker–Kapelijeve teoreme ispitati saglasnost sistema u zavisnosti od parametara α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, i u slučaju saglasnog sistema odrediti rešenje sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \alpha, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= \beta, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= \gamma. \end{aligned}$$

Rešenje: Polazeći od proširene matrice A^b zaključujemo da primenom elementarnih transformacija važi[3]:

$$\begin{aligned} A^b = & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 4 & 5 & 6 & \beta \\ 7 & 8 & 9 & \gamma \end{array}\right] && (\mathrm{V}_2 := (-4)\cdot \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2,\ \mathrm{V}_3 := (-7)\cdot \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_3) \\ \cong & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 0 & -3 & -6 & \beta-4\alpha \\ 0 & -6 & -12 & \gamma-7\alpha \end{array}\right] && (\mathrm{V}_3 := (-2)\cdot \mathrm{V}_2 + \mathrm{V}_3) \\ \cong & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 0 & -3 & -6 & \beta-4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \gamma-2\beta+\alpha \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Prema Kroneker–Kapelijevoj teoremi, posmatrani sistem je saglasan ako i samo ako je

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^b) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma = 2\beta - \alpha, \ \text{ dok } \alpha, \beta \text{ mogu biti proizvoljni realni brojevi.}$$

Dakle, za takve parametre α, β, γ, iz poslednje matrice dolazimo do sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \alpha, \\ -3x_2 - 6x_3 &= \beta - 4\alpha \end{aligned} \right\}$$

koji je ekvivalentan početnom sistemu, i čije je rešenje:

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = \Big(-\frac{5}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta + t,\ \frac{4}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta - 2t,\ t\Big),$$

za $t \in \mathbb{R}$. $\square$

pri[3]čemu ovde sa V_p i V_q označavamo redom p-tu vrstu i q-tu razmatrane matrice

Primer 5. Odrediti za koje je vrednosti parametra $c \in \mathbb{R}$ sledeći realan sistem saglasan:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 13, \\ 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 9x_4 &= 26, \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 10x_4 &= c. \end{aligned}$$

U slučaju kad je prethodni sistem saglasan rešiti sistem.

Rešenje. Sistem rešavamo pomoću proširene matrice sistema, vršeći redom elementarne transformacije (koje su naznačene pored proširene matrice sistema):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 13 \\ 4 & 6 & 9 & 9 & 26 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & c \end{array}\right] \qquad (V_2 := (-2)\cdot V_1 + V_2,\ \ V_3 := (-2)\cdot V_1 + V_3)$$

$$\cong \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-26 \end{array}\right],$$

$$(K_2 \longleftrightarrow K_3)$$

$$\cong \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-26 \end{array}\right].$$

Iz prethodne proširene matrice sistema dobijamo trougaoni sistem koji je ekvivalentan polaznom:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_3 &= 13 - 3x_2 - 5x_4, \\ x_3 &= 0 + x_4, \\ 0 &= c - 26. \end{aligned}$$

Prethodni sistem je saglasan samo ako je $c = 26$ i u tom slučaju rešenje polaznog sistema je

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = \Big(\frac{13}{2} - \frac{3}{2}t - \frac{9}{2}q,\ t,\ q,\ q\Big),$$

za $t,\, q \in \mathbb{R}$. $\square$

3.1 Homogeni sistem linearnih jednačina

Definicija 6. Sistem linearnih jednačina oblika:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

naziva se *homogen* sistem.

Očigledno, za svaki homogen sistem važi: $rang(A) = rang(A^b)$ (jer poslednja kolona proširene matrice A^b, koju čine sve 0, ne utiče na rang matrice A^b).

Dakle, svaki homogen sistem je saglasan i ima rešenje $(0, 0, \ldots, 0)$ koje se naziva *trivijalno rešenje*.

Kada homogen sistem ima i druga, takozvana netrivijalna rešenja?

Iz Kroneker-Kapelijeve teoreme neposredno sledi:

Teorema 4.

1) Homogen sistem ima samo trivijalna rešenja ako i samo ako je rang matrice sistema jednak broju nepoznatih;

2) Homogen sistem ima i netrivijalna rešenja ako i samo ako je rang matrice sistema manji od broja nepoznatih.

Specijalno, za kvadratni homogeni sistem (tj. za homogeni sistem u kome je broj jednačina jednak broju nepoznatih) važi sledeća posledica:

Teorema 5.

Homogeni sistem u kome je broj jednačina jednak broju nepoznatih ima netrivijalna rešenja ako i samo ako je detreminanta sistema ($det(A)$) jednaka nuli.

(Jasno je da je $rang(A) < n \quad \Leftrightarrow \quad detA = 0$.)

Takođe važi i:

Teorema 6. Skup svih rešenja homogenog sistema ima strukturu vektorskog prostora.

(Pogledati i Teoremu 8 u materijalu Vektorski prostor!)

Primer 6. Ispitati da li homogeni sistem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0,\\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0,\\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 0; \end{aligned}$$

ima netrivijalna rešenja i ako ih ima naći sva netrivijalna rešenja i odrediti bazne vektore za vektorski prostor rešenja ovog homogenog linearnog sistema.

Rešenje: Nije teško zaključiti da je $r = \mathrm{rang}(A) = 2 < 3 = n$. Samim tim, ovaj sistem ima i netrivijalna rešenja. Dati sistem se elementarnim transformacijama svodi na ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0,\\ -3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

čija su netrivijalna rešenja:

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = (t,\ -2t,\ t)\,,$$

za $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pored netrivijalnih rešenja za prethodni homogeni sistem postoji i trivijalno rešenje:

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = (0,\ 0,\ 0).$$

Dakle, skup rešenja datog homogenog linearnog sistema je

$$V = \{\,(t,\ -2t,\ t)\,|\,t \in \mathbb{R}\,\} = \{\,t\cdot(1,\ -2,\ 1)\,|\,t \in \mathbb{R}\,\}.$$

Skup V određuje (realni) jednodimenzionalni vektorski potprostor vektorskog prostora $\mathbf{R^3} = (\mathbb{R}^3, \mathbf{R})$ i ima bazni vektor $\vec{e} = (1, -2, 1)$.

□

4 Karakteristični polinom, karakteristične vrednosti i vektori matrice

U ovom delu upoznaćemo se sa pojmovima koji osim značaja u matematici imaju i široku praktičnu primenu i u drugim naukama kao što su elektrotehnika, računarstvo, hemija, sociologija, ... Na primer, u računarstvu se razne pojave i procesi predstavljaju grafovima. U raznim situacijama i primenama potrebno je podeliti graf na manje komponente sa zadatim osobinama, uz zadata ograničenja. Nažalost, ovaj problem pripada klasi NP-complete, pa se za njegovo rešavanje koriste razne heuristike. Jedna od najpopularnijih je podela grafa analizom karakterističnih vrednosti i vektora matrice koja je tom grafu pridružena. Društvene mreže, poput Facebook-a, koriste ove analize za grupisanje prijatelja. Osnova PageRank algoritma, koji Google koristi pri pretraživanju, je vektor koji odgovara najvećoj karakterističnoj vrednosti matrice pridružene odgovarajućem grafu. Analiza rada kao i modelovanje širenja virusa u računarskim mrežama oslanjaju se takođe na analizu karakterističnih vrednosti i vektora matrica pridruženih računarskim mrežama.

Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$.

Neka je $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ nepoznata (nenula) matrica i neka je λ nepoznati skalar iz polja F.

Treba odrediti X i λ iz uslova $A \cdot X = \lambda \cdot X$ odnosno $(A - \lambda I)\cdot X = 0$.
Posmatrajmo (kvadratni, homogen) sistem "predstavljen" matričnom jednačinom $(A - \lambda I)\cdot X = 0$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(a_{11}-\lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & (a_{22}-\lambda)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & (a_{nn}-\lambda)x_n & = & 0
\end{array}$$

Ovaj (kvadratni, homogen) sistem ima netrivijalna rešenja akko $det(A - \lambda I) = 0$.

Definicija 1. Za kvadratnu matricu $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ polinom

$$P_n(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix}$$

se naziva *karakteristični (sopstveni) polinom matrice A*.
Koreni karakterističnog polinoma se nazivaju *karakteristične (sopstvene) vrednosti matrice A*.
Spektar matrice A je skup svih karakterističnih vrednosti matrice A.
Karakteristični (sopstveni) vektor matrice A je nenula matrica X za koju važi $A \cdot X = \lambda \cdot X$.

Primer 1. Odrediti karakteristične vrednosti i vektore sledećih matrica:

(i)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix},$$

(ii)
$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

(iii)
$$C = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 8 & -15 & -1 \\ 16 & -15 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: ***(i)*** Za matricu A karakteristični polinom

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 2 & 0 \\ 2 & (4-\lambda) & -2 \\ 0 & -2 & (5-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\,\lambda^2 - 39\,\lambda + 28$$

ima tri realna i različita korena: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 7$.
Prvoj karakterističnoj vrednosti $\lambda_1 = 1$ odgovara sledeći homogeni karakteristični sistem:

$$\begin{aligned} (3-\lambda_1)\,x_1 \ + \ 2\,x_2 \qquad\qquad &= 0, \\ 2\,x_1 \ + \ (4-\lambda_1)\,x_2 \ + \ (-2)\,x_3 &= 0, \\ -2\,x_2 \ + \ (5-\lambda_1)\,x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Primenimo Gausov algoritam za rešavanje prethodnog homogenog linearnog sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lll} (3-\lambda_1)\,x_1 + \ 2\,x_2 & & = 0 \\ 2\,x_1 & + (4-\lambda_1)\,x_2 - \ 2\,x_3 & = 0 \\ & -2\,x_2 \ + (5-\lambda_1)\,x_3 & = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -\,2x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (\mathrm{V}_2 := (-1)\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \\ x_2 \ - 2x_3 = 0 \\ -\,2x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (\mathrm{V}_3 := 2\mathrm{V}_2 + \mathrm{V}_3)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \\ x_2 \ - 2x_3 = 0 \\ 0 \ = 0 \end{array} \right\}$$

Netrivijalna rešenja ovog homogenog sistema su uređene trojke (x_1, x_2, x_3) takve da je $x_3 = t$, $x_2 = 2t$, $x_1 = -2t$, gde $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dakle, karakterističnoj vrednosti $\lambda_1 = 1$ odgovara karakteristični vektor oblika:

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Na sličan način dobija se da karakterističnoj vrednosti $\lambda_2 = 4$ odgovara karakteristični vektor oblika:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

dok karakterističnoj vrednosti $\lambda_3 = 7$ odogovara karakteristični vektor oblika:

$$X_3 = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ -2t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(ii) Za matricu B karakteristični polinom

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (3-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 8\,\lambda^2 - 20\,\lambda + 16$$

ima korene: $\lambda_{1,2} = 2 \quad \text{i} \quad \lambda_3 = 4$.

Karakterističnoj vrednosti $\lambda_{1,2} = 2$ odgovara homogeni sistem:

$$\begin{array}{ccccccc} (3-\lambda_{1,2})\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & (3-\lambda_{1,2})\,x_2 & + & x_3 & = & 0, \\ & & & & (2-\lambda_{1,2})\,x_3 & = & 0. \end{array}$$

Primenom Gausovog algoritma dobijamo da su netrivijalna rešenja ovog homogenog sistema uređene trojke (x_1, x_2, x_3) takve da je

$$x_1 = p,\ x_2 = q,\ x_3 = -p - q,\ \ p, q \in \mathbb{R},\ (p, q) \neq (0, 0).$$

Dakle karakteristični vektor koji odgovara ovoj karakterističnoj vrednosti je oblika:

$$X_{1,2} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ -p-q \end{bmatrix} \text{ gde } p, q \in \mathbb{R},\ (p.q) \neq (0, 0).$$

Na sličan način se određuje da trećoj karakterističnoj vrednosti $\lambda_3 = 4$ odgovara karakteristični vektor oblika:

$$X_3 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix},\ \ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

$\square$

4.1 Kejli-Hamiltonova teorema i minimalni polinom

Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$ i skalari $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ ($\alpha_n \neq 0$). Izraz

$$P_n(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

naziva se *matrični polinom* stepena n.

Teorema 1. (Kejli–Hamiltonova teorema)
Svaka kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ je nula svog karakterističnog polinoma, tj. ako je $P_n(\lambda)$ karakteristični polinom matrice A, onda je $P_n(A) = O$, gde je O nula matrica istog reda kao i A.

Primer 2.
Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

1) Odrediti karakteristični polinom matrice A.

2) Primenom Kejli-Hamiltonove teoreme odrediti matricu $B = A^{2020} - 12\,A^{2019} + 39\,A^{2018} - 28A^{2017}$.

Rešenje: Karakteristični polinom matrice A je $P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\,\lambda^2 - 39\,\lambda + 28.$

Prema Kejli-Hamiltonovoj teoremi imamo da je $P_3(A)$ nula matrica, to jest važi:

$$P_3(A) = -A^3 + 12\,A^2 - 39\,A + 28I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za matricu B dalje imamo: $B = -A^{2017} \cdot (-A^3 + 12\,A^2 - 39\,A + 28I) = -A^{2017} \cdot P_3(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\square$

Primer 3.
Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Primenom Kejli-Hamiltonove teoreme odrediti matricu A^n, $n \geq 3$.

Rešenje: Karakteristični polinom matrice A je $P_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2$. Prema Kejli-Hamiltonovoj teoremi $P_3(A)$ je nula matrica, tj. važi

$$-A^3 + 3A^2 = O.$$

Ako poslednju jednakost pomnožimo sa A^{n-3} dobijamo: $-A^3 + 3A^2 = O \big/ \cdot A^{n-3} \implies A^n = 3 \cdot A^{n-1}$.

Dalje imamo:

$$A^n = 3\cdot A^{n-1} \implies A^n = 3(3\cdot A^{n-2}) \implies A^n = 3^2(3\cdot A^{n-3}) \implies \ldots \implies A^n = 3^n\cdot A = \begin{bmatrix} 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{bmatrix}.$$

$\square$

Primer 4.

Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Primenom Kejli-Hamiltonove teoreme odrediti matricu $A^n,\ n \geq 3$.

(Rez. $A^{2k} = (-26)^{k-1} \cdot A^2,\ A^{2k+1} = (-26)^k \cdot A$.)

Definicija 2.

Neka je data kvadratna matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n\times n}$. Ako za polinom

$$m(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + +a_{k-2}\lambda^{k-2} + \ldots + +a_1\lambda + a_0$$

važi da je to polinom najmanjeg stepena takav da je $m(A) = 0$, tada kažemo da je m *minimalni polinom* date kvadratne matrice A.

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.

1) Svaka kvadratna matrica ima jedinstven minimalan polinom i on je delilac karakterističnog polinoma.
2) Svaka nula karakterističnog polinoma $P_n(\lambda)$ ujedno je i nula minimalnog polinoma $m(\lambda)$ date kvadratne matrice.

Na osnovu prethodne teoreme možemo formulisati sledeći algoritam:

Algoritam za određivanje minimalnog polinoma date kvadratne matrice $A_{n\times n}$:

1° Odrediti karakteristični polinom $P_n(\lambda)$.

2° Izvršiti faktorizaciju polinoma $P_n(\lambda)$ na nerastavljive faktore.

3° Formirati sve moguće delitelje karakteristčnog polinoma (tako da sadrže sve korene karakterističnog polinoma i da su jediničnog vodećeg koeficijenta).

4° Među deliteljima koji su formirani u koraku 3° izdvojiti one polinome koji se anuliraju u matrici A.

5° Minimalni polinom je polinom najnižeg stepena među polinomima određenim u koraku 4°.

Primer 5. Odrediti minimalni polinom matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešenje: Primenom prethodnog algoritma dobijamo:

1° $P_3(\lambda) = det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2$.

2° $P_3(\lambda) = -\lambda \cdot \lambda \cdot (\lambda - 3)$.

3° Delitelji karakterističnog polinoma $P_3(\lambda)$ koji sadrže sve korene karakterističnog polinoma i jediničnog su vodećeg koeficijenta su:
$g(\lambda) = \lambda(\lambda - 3) = \lambda^2 - 3\lambda$ i $f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3) = \lambda^3 - 3\lambda^2$.

4° Za polinome $g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$ i $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2$ važi: $g(A) = A^2 - 3A = 0$ (proveriti!) i $f(A) = A^3 - 3A^2 = 0$ (proveriti!).

5° Minimalni polinom je $m(\lambda) = g(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$.

Napomena:
Primetimo da se i minimalni polinom može iskoristiti za računanje n-tog stepena matrice A:

$$m(A) = O \iff A^2 - 3 \cdot A = O \iff A^2 = 3 \cdot A \Big/ \cdot A^{n-2} \implies A^n = 3 \cdot A^{n-1} \implies \ldots \implies A^n = 3^n \cdot A$$

□