Univerzitet u Beogradu-Elektrotehnički fakultet

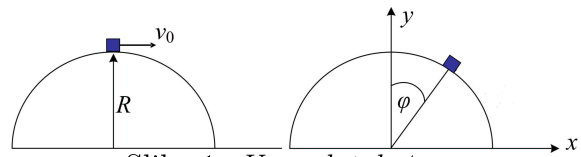
Februarski ispitni rok iz Fizike sa SI, 9.2.2015. godine

Predmetni nastavnici: Predrag Marinković, Peđa Mihailović i Marko Barjaktarović

I Kolokvijum

Trajanje kolokvijuma je $2,5\,\mathrm{h}$

1. [100] Glatka polusfera poluprečnika $R = 2\,\mathrm{m}$ je postavljenja na horizontalnu podlogu i ne može se kretati. Telo se nalazi na vrhu polusfere i na tom mestu ima brzinu $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$ u pravcu tangente na polusferu. Odrediti mesto u odnosu na centar polusfere na kome se telo odvaja od podloge (ugao φ na slici 1). Na kom rastojanju od centra polusfere telo pada na horizontalnu podlogu? Uzeti da je $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.



Slika 1: *Uz zadatak 1.*

2. [100] Projektil se kreće brzinom v ka meti iste mase. Nakon sudara brzina projektila je pod uglom od $\alpha = 60^\circ$ u odnosu na početni pravac. Odrediti pravac brzine mete u odnosu na pravac brzine projektila pre sudara (ugao φ).

3. [100] Materijalna tačka (MT) kreće se u xOy ravni. Vektor brzine MT je: $\vec{v} = A\vec{e_x} + Bt^2\vec{e_y}$, gde je $A = 1\,\mathrm{m/s}$ i $B = 1\,\mathrm{m/s^2}$. U početnom trenutku ($t = 0$) MT prolazi kroz tačku $M(x = 1\,\mathrm{m}, y = 1\,\mathrm{m})$. Odrediti jednačinu trajektorije i grubo je skicirati. Odrediti tangencijalno i normalno ubrzanje MT kada prolazi kroz tačku $N(x = 2\,\mathrm{m}, y)$. Koliki je poluprečnik krivine trajektorije u tački N?

4. [100] Brodu mase m, koji se kretao pravolinijski brzinom konstantnog intenziteta v_0, u trenutku vremena $t = 0$ otkaže motor. Brzina broda se tokom vremena t nakon otkaza motora menja u skladu sa $v(t)^{-1} = v_0^{-1} + kt/m$, gde je k nepoznata pozitivna konstanta. Ako u trenutku vremena τ od trenutka gubitka pogona brzina broda postaje $v_0/2$ i ako u tom trenutku ponovo proradi motor, odrediti intenzitet vučne sile koju on treba da stvara, pa da bzina broda ostane na nivou $v_0/2$.

Univerzitet u Beogradu-Elektrotehnički fakultet

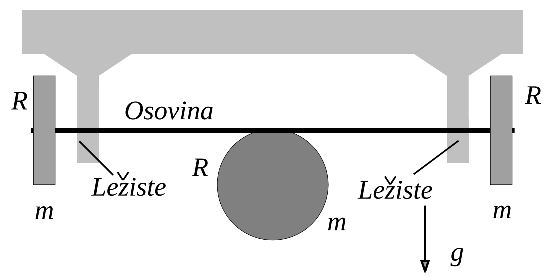
Februarski ispitni rok iz Fizike sa SI, 9.2.2015. godine

Predmetni nastavnici: Predrag Marinković, Peđa Mihailović i Marko Barjaktarović

II Kolokvijum

Trajanje kolokvijuma je $2,5\,\mathrm{h}$

1. [100] Za tanku krutu osovinu bez mase (koja je postavljena horizontalno i oslonjena u ležištima - vidi sliku 1) na njenim krajevima zavaren je po jedan homogen disk mase m i radijusa R. Ose oba diska poklapaju se sa osovinom. Na sredini osovine bočno je zavaren tanki homogeni disk radijusa R i mase m, tako da on leži u ravni u kojoj leži i osovina. Ako se zanemare sva trenja, odrediti period malih oscilacija sistema nakon što se on izvede iz ravnoteže. Ubrzanje Zemljine teže je g.

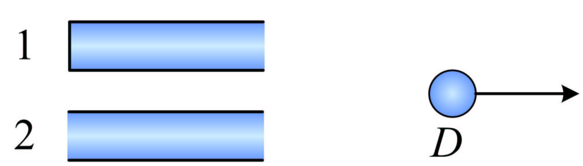


Slika 1: *Uz zadatak 4.*

2. [100] U automobilu mase $M = 1000\,\mathrm{kg}$ nalaze se četiri osobe mase od po $m = 75\,\mathrm{kg}$ bez prtljaga. Automobil se kreće zemljanim, neravnim putem, pri čemu se može smatrati da se vrhovi neravnine javljaju na svaka $l = 4\,\mathrm{m}$. Auto odskače sa maksimalnom amplitudom kada je njegova brzina $v = 72\,\mathrm{km/h}$. Koliko iznosi ekvivalentna krutost opružno-amortizacionog sistema automobila? Smatrati da koeficijent otporne sile iznosi $r = 2.6 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/s}$.

3. [100] Dugačka žica gustine ρ i poprečnog preseka S zategnuta je silom F. Odrediti brzinu transferzalnih talasa po žici. Naći kružnu učestanost transverzalnih talasa talasne dužine λ. Odrediti brzinu delića žice ako se po žici kreće harmoniski talas amplitude A. Kolika je maksimalna brzina delića žice? Izračunati srednju snagu potrebnu da se po žici stvara ovakav talas.

4. [100] Na slici su prikazane dve cevi dužina $d_1 = 1\,\mathrm{m}$, otvorene na jednom (cev 1) ili na oba kraja (cev 2). U svakoj cevi je uspostavljen treći harmonik stojećih talasa. Detektor D se kreće od cevi konstantnom brzinom - vidi sliku 2. Brzina zvuka iznosi $c = 340\,\mathrm{m/s}$. Koliki treba da je intenzitet brzine detektora v, pa da detektor registruje zvuk frekvencije f, koja odgovara prvom harmoniku: (a) u cevi 1, (b) u cevi 2?



Slika 2: *Uz zadatak 4.*

Univerzitet u Beogradu-Elektrotehnički fakultet
Februarski ispitni rok iz Fizike sa SI, 9.2.2015. godine
Predmetni nastavnici: Predrag Marinković, Peđa Mihailović i Marko Barjaktarović

III Kolokvijum
Trajanje kolokvijuma je $2,5\,\mathrm{h}$

1. [100] Laserski zrak pada na ravan zid pod incidentnim uglom α. Kada se ispred zida postavi staklena planparalelna pločica debljine d i indeksa prelamanja $n = 1.5$, paralelno sa zidom, osvetljena površina na zidu se pomeri za x. Odrediti debljinu pločice d. Laserski zrak putuje kroz vazduh.

2. [100] Tačkasti monohromatski izvor svetlosti i njegov imaginarni lik u ogledalu daju na ekranu, koji je postavljen upravno na ogledalo, interferencionu sliku. Rastojanje izvora svetlosti od ekrana je D, a od ogledala d, pri čemu je $d << D$. Gde će se na ekranu pojaviti prva svetla pruga?

3. [100] Toplotna pumpa, koja radi po Karnoovom ciklusu, ima koeficijent grejanja $\eta_{gC} = 4$. Ako bi taj uređaj, koji je radio kao toplotna pumpa, počeo da radi kao rashladni uređaj, a pri tome ne dođe do promene temperatura zagrejača i hladnjaka, koliki je koeficijent hlađenja (u oznaci η_{hC})? Na kraju, ako se smer ciklusa okrene i uređaj počne raditi kao toplotni motor, a ne promene se temperature zagrejača i hladnjaka, koliki je termički stepen korisnog dejstva (u oznaci η_{tC})? Naći odnos apsolutnih temperatura zagrejača i hladnjaka.

4. [100] Kuglica od bakra, specifične toplote c, gustine ρ i radijusa R, zagrejana je u pećnici do temperature t_{b0}. U trenutku vremena $\tau = 0$ kuglica je iznešena u vazdušnu sredinu temperature vazduha $t_0 < t_{b0}$. Ako se toplota sa kuglice prenosi na vazduh isključivo konvekcijom i ako je koeficijent prelaska toplote sa nje na vazduh α, odrediti kako se menja temperatura kuglice tokom vremena. Kolika je temperatura kuglice nakon $\dfrac{\rho R c}{3\alpha}\ln 2$ vremena? Smatrati da bakar idealno provodi toplotu.

I Kolokvijum- rešenja

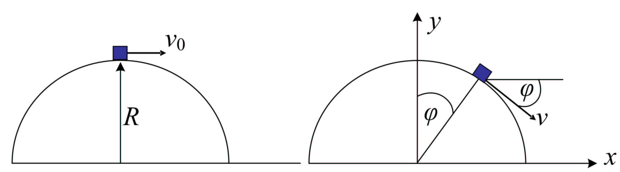
1. Zakon održanja mehaničke energije napisan za telo na vrhu sfere i u trenutku odvajanja je (slika 1)

$$mv_0^2/2 + mgR = mv^2/2 + mgR\cos\varphi\,.$$

Sledi

$$v^2 = v_0^2 + 2gR(1-\cos\varphi)\,.$$

U trenutku odvajanja jednačina kretanja u prirodnim koordinatama u normalnom pravcu daje



Slika 1: Slika uz rešenje zadatka 1.

$$ma_n = m\frac{v^2}{R} = mg\cos\varphi - N\,,$$

gde je N normalna komponenta (reakcija podloge). Kako je u trenutku odvajanja tela reakcija podloge jednaka nuli vai

$$v^2 = gR\cos\varphi\,.$$

Zamenom prethodnog izraza u prvu jednačinu, dobijaju se brzina i ugao u trenutku odvajanja tela od podloge

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\Big(\frac{v_0^2}{gR}+1\Big) = 0.9\,,$$

$$v = \sqrt{(1/2)(v_0^2+gR)} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}\ ,.$$

Na dalje, telo se kreće kao kosi hitac, a parametarske jednačine kretanja glase

$$x = R\sin\varphi + v\cos\varphi t$$

$$y = R\cos\varphi - v\sin\varphi t - gt^2/2\,.$$

U trenutku udara tela o podlogu, koordinata y iznosi nula, pa se trenutak t_1 dobija iz prethodne jednačine

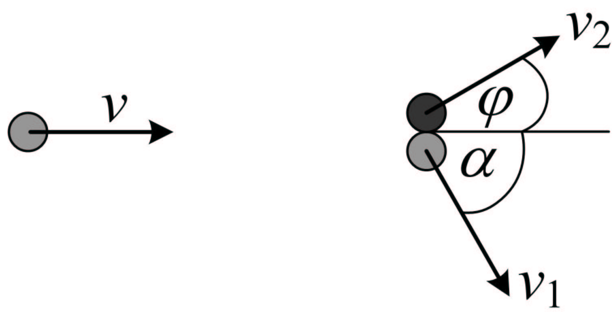
$$t_1 = \frac{v\sin\varphi}{g} + \sqrt{\frac{v^2\sin^2\varphi}{g^2} + \frac{2R}{g}\cos\varphi} = 0.44\,\mathrm{s}\,.$$

Mesto udara tela o podlogu iznosi:

$$x_1 = R\sin\varphi + v\cos\varphi t_1 = 2.56\,\mathrm{m}\,.$$

2. Zakon održanja energije

$$(1/2)mv^2 = (1/2)mv_1^2 + (1/2)mv_2^2\,,$$



Slika 2: Slika uz rešenje zadatka 2.

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2\,.$$

Zakon održanja impulsa

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 + m\vec{v}_2\,,$$

$$v = v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\varphi\,,$$

$$0 = v_1 \sin\alpha - v_2 \sin\varphi\,.$$

Rešavanjem prethodne jednačine, ima se

$$v_1 = v\frac{2}{1+\sqrt{3}/\tan\varphi}\,.$$

$$v_2 = v\frac{\sqrt{3}}{\sin\varphi(1+\sqrt{3}/\tan\varphi)}\,.$$

Zamenom u izraz za zakon održanja energije, sledi

$$v^2 = v^2\frac{4}{(1+\sqrt{3}/\tan\varphi)^2} + v^2\frac{3}{\sin^2\varphi(1+\sqrt{3}/\tan\varphi)^2}\,.$$

Odatle je

$$(1+\sqrt{3}/\tan\varphi)^2 = 4 + \frac{3}{\sin^2\varphi}\,.$$

Nakon izvesnih transformacija, dobija se

$$\tan\varphi = 1/\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \varphi = 30^\circ\,.$$

3.

$$\frac{dx}{dt} = A\,, \tag{1}$$

$$\int_{x=1\,\mathrm{m}}^{x} dx = A\int_0^t dt\,, \tag{2}$$

$$x(t) = At + 1\,\mathrm{m}\,. \tag{3}$$

Za y-koordinatu važi

$$\int_{1\,\mathrm{m}}^{y} dy = B\int_0^t t^2 dt\,, \tag{4}$$

$$y(t) = B\frac{t^3}{3} + 1\,\mathrm{m}\,, \tag{5}$$

$$t = \frac{x - 1\,\mathrm{m}}{A}\,, \tag{6}$$

$$y(x) = \frac{(x - 1\,\mathrm{m})^3}{3} + 1\,\mathrm{m}\,. \tag{7}$$

$$a_x = 0\,, \tag{8}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2Bt\,, \tag{9}$$

$$a_\tau = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\,, \tag{10}$$

$$a_\tau = \frac{2B^2t^3}{\sqrt{A^2 + B^2t^4}}\,, \tag{11}$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\,, \tag{12}$$

$$a_n = \frac{2ABt}{\sqrt{A^2 + B^2t^4}}\,, \tag{13}$$

$$a_\tau(x = 2\,\mathrm{m}) = \sqrt{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,, \tag{14}$$

$$a_n(x = 2\,\mathrm{m}) = \sqrt{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,, \tag{15}$$

$$R = \frac{v^2}{a_n}\,, \tag{16}$$

$$v^2(x = 2\,\mathrm{m}) = v^2(t = 1\,\mathrm{s}) = 2\frac{m^2}{s^2}\,, \tag{17}$$

$$R(x = 2\,\mathrm{m}) = \sqrt{2}\,\mathrm{m}\,. \tag{18}$$

4.

$$\frac{d(v^{-1})}{dt} = -v^{-2}\frac{dv}{dt} = \frac{k}{m},$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2\,.$$

Otporna sila je

$$F_{ot} = ma = -kv^2\,.$$

Iz uslova

$$v(\tau)^{-1} = 2v_0^{-1} = v_0^{-1} + \frac{k}{m}\tau\,.$$

sledi

$$k = \frac{m}{v_0\tau}.$$

Vučna sila je

$$F = \frac{m}{v_0 \tau} \frac{v_0^2}{4} = \frac{m v_0}{4\tau}\,.$$

II Kolokvijum- rešenja

1. Primenom teoreme o upravnim osama i Štajnerove teoreme dobija se da je moment inercije sistema

$$I = \frac{1}{2}\big(1/2\big)mR^2 + mR^2 + 2\big(\frac{1}{2}mR^2\big) = \frac{9}{4}mR^2 \,.$$

Moment sile koji vraća sistem u ravnotežu je

$$M = -mgR\sin\theta \simeq -mgR\theta \,.$$

Jednačina kretanja je

$$\frac{9}{4}mR^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgR\theta \,,$$

ili

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{4g}{9R}\theta = 0 \,,$$

Kružna učestanost postaje

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{9R}} .$$

Period oscilovanja je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{9R}{4g}} .$$

2. Kretanje automobila preko neravnima se može posmatrati kao prinudne oscilacije, pri čemu je frekvencija prinudne sile određena vremenskim intervalom između nailaska automobila na vrh neravnine. Maksimalna amplituda odskakanja automobila predstavlja elongaciju u rezonanciji, a rezonantna frekvencija iznosi

$$f_{rez} = \frac{v}{l} = 5\,\mathrm{Hz} \,.$$

Rezonantna učestanost data je sledećim izrazom

$$\omega_{rez} = 2\pi f_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \,,$$

gde je

$$\alpha = \frac{r}{2(M+4m)} = 1\,\mathrm{s}^{-1} \,,$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+4m}} .$$

Na osnovu prethodnog izraza dobija se sopstvena učestanost ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{4\pi^2 f_{rez}^2 + 2\alpha^2} = 31.45\,\mathrm{rad/s} \,.$$

Odakle se dobija ekvivalenta krutost opružno-amortizacionog sistema automobila $k = 1.28 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m}$.

3.

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}\,, \tag{1}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda}\,, \tag{2}$$

$$y = A \sin\left(\omega t - kx\right)\,, \tag{3}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos\left(\omega t - kx\right)\,, \tag{4}$$

$$v_{max} = A\omega\,, \tag{5}$$

$$dE_k = \frac{dmv^2}{2} = \frac{\rho S dx\left[A\omega\cos\left(\omega t - kx\right)\right]^2}{2}\,, \tag{6}$$

$$\langle dE_k \rangle_T = \frac{\rho S A^2 \omega^2}{4} dx\,, \tag{7}$$

$$\langle dE \rangle_T = \langle dE_k \rangle_T + \langle dE_p \rangle_T = 2\,\langle dE_k \rangle_T \tag{8}$$

$$\langle dE \rangle_T = \frac{\rho S A^2 \omega^2}{2} dx\,, \tag{9}$$

$$\langle P \rangle_T = \frac{\langle dE \rangle_T}{dt}\,, \tag{10}$$

$$\langle P \rangle_T = \frac{\rho S A^2 \omega^2}{2} \frac{dx}{dt}\,, \tag{11}$$

$$\langle P \rangle_T = \frac{\rho S A^2 \omega^2}{2} c\,. \tag{12}$$

4. Frekvencije prvog i trećeg harmonika u cevima 1 i 2 iznose

$$f_{1,1} = \frac{c}{4l} = 85\,\mathrm{Hz}\,,$$

$$f_{1,3} = \frac{5c}{4l} = 425\,\mathrm{Hz}\,,$$

$$f_{2,1} = \frac{c}{2l} = 170\,\mathrm{Hz}\,,$$

$$f_{2,3} = \frac{3c}{3l} = 510\,\mathrm{Hz}\,.$$

Tražena brzine dobijaju se na osnovu Doplerovog efekta

(a)

$$f_{1,1} = f_{1,3}(1 - v_a/c)\,,$$
$$v_a = c(1 - f_{1,1}/f_{1,3}) = 4c/5 = 272\,\mathrm{m/s}\,.$$

(b)

$$f_{2,1} = f_{2,3}(1 - v_b/c)\,,$$
$$v_b = c(1 - f_{2,1}/f_{2,3}) = 2c/3 = 229\,\mathrm{m/s}\,.$$

III Kolokvijum- rešenja

1.

$$\sin\alpha = n\sin\beta\,, \tag{1}$$

$$x = d\left(\tan\alpha - \tan\beta\right)\,, \tag{2}$$

$$d = x\cot\alpha\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}-\cos\alpha}x\,. \tag{3}$$

2. Na ekranu interferiraju talas koji se kreće direktno od izvora i talas koji se reflektovao od ogledala i na čijem se pravcu nalazi imaginarni lik u ogledalu. Pri refleksiji o optički gušću sredinu drugi talas menja fazu za π. Da bi nagomilao ukupnu promenu faze od 2π koliko je potrebno da bi ponovo bio u fazi sa prvim talasom, i formirao prvi maksimum, potrebno je da pređe polovinu talasne dužine vise nego prvi talas $\Delta S = \frac{\lambda}{2}$.

Geometrija ove postavke je ista kao geometrija Jungovog eksperimenta iz zadatka 3. ako realni i imaginarni izvor svetlosti zamenimo sa dva proreza na rastojanju $2d$.

$$\Delta S \approx 2y\frac{d}{D}\,, \tag{1}$$

$$\frac{\lambda}{2} \approx 2y\frac{d}{D}\,, \tag{2}$$

$$y = \lambda\frac{D}{4d}\,. \tag{3}$$

3. Koeficijet grejanja za Karnoov ciklus je

$$\eta_{gC} = \frac{T_Z}{T_Z - t_H}\,,$$

koeficijen tlađenja je

$$\eta_{hC} = \frac{T_H}{T_Z - t_H}\,,$$

dok je termički stepen kprisnog dejstva

$$\eta_{tC} = \frac{T_Z - T_H}{T_Z} = 1/\eta_{gC}\,.$$

Na osnovu prve dve jednačine nije teško pokazati da je

$$\eta_{hC} = \eta_{gC} - 1 = 3\,.$$

Termički stepen korisnog dejstva toplotnog motora je

$$\eta_{tC} = 1/\eta_{gC} = 0.25\,.$$

Odnos temperatura se može dobiti iz $\dfrac{T_H}{T_Z - T_H} = 3$, odakle je

$$\frac{T_Z}{T_H} = \frac{4}{3}.$$

4. Količina toplote koju telo izgubi u vremenskom intervalu $d\tau$ mora biti jednaka količini toplote koja se sa tela prenese konvekcijom

$$-mcdt_b = -\alpha S(t_b - t_0)d\tau\,,$$

gde je masa kiglice $m = \rho V$, a $S = 4\pi R^2$ i $V = (4/3)\pi R^3$. Odatle je

$$\frac{dt_p}{t_p - t_0} = -\frac{\alpha S}{mc}d\tau\,,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_b} \frac{dt_p}{t_p - t_0} = -\frac{\alpha S}{mc}\int\limits_0^{\tau} d\tau\,,$$

Lako se pokazuje da je

$$\ln\frac{t_p - t_0}{t_{p0} - t_0} = -\frac{\alpha S}{mc}\tau\,,$$

Temperatura tela u funkciji vremena je

$$\boxed{t_b(\tau) = t_0 + (t_{b0} - t_0)e^{-\tau/\tau_0}\,,}$$

gde je

$$\tau_0 = \frac{mc}{\alpha S} = \frac{\rho R c}{3\alpha S}.$$

Kada je $\tau = \tau_0 \ln 2$, temperatura kuglice je

$$t_b(\tau = \tau_0 \ln 2) = t_0 + (t_{b0} - t_0)e^{-\ln 2} = t_0 + (t_{b0} - t_0)/2\,.$$