1. Rimanov određeni integral

2. Potrebni i dovoljni uslovi za integrabilnost funkcija

Teorema 2.1 Ako je funkcija f integrabilna na odsečku $[a,b]$ tada je f ograničena na $[a,b]$.
Teorema 2.2 Ako je f neprekidna na $[a,b]$ tada je f integrabilna na $[a,b]$.

Teorema 2.3 Ako je f definisana i ograničena na $[a,b]$ i ako na odsečku $[a,b]$ ima konačno mnogo tačaka prekida, tada je f integrabilna na $[a,b]$.

Teorema 2.4 Ako je f monotona na odsečku $[a,b]$ tada je f integrabilna na $[a,b]$.

Primeri:

1. Koje funkcije su integrabilne na segmentu $[0,1]$:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}1/x, & x\neq 0\\ 5, & x=0\end{cases}\qquad 2)\ \frac{1}{2x-1}\qquad 3)\ \log x\qquad 4)\ |x|\qquad 5)\ g(x)=\begin{cases}x^2, & x<1/2\\ 3, & x=1/2\\ 5-x, & x>1/2\end{cases}$$

2. Odrediti (bez izračunavanja integrala) da li su funkcije f, g i h integrabilne na segmentu $[-1,2]$ i odgovor obrazložiti.

$$f(x)=\operatorname{arcctg}(x-10),\qquad g(x)=\begin{cases}e^{1/(1-x)}, & x>1\\ \ln(3-x), & x\leq 1\end{cases},\qquad h(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^2}, & x\neq 0\\ 2017, & x=0.\end{cases}$$

3. Svojstva Rimanovog određenog integrala

Teorema 3.1 Neka su funkcije f i g integrabilne na $[a,b]$. Tada važi:

1) (*Linearnost integrala*)
Funkcija $h(x)=\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ je integrabilna na $[a,b]$ i važi
$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,\mathrm{dx}=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{dx}+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{dx}.$$

2) (*Aditivnost integrala*)
Za bilo koje $c\in[a,b]$ važi: $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=\int_a^c f(x)\,\mathrm{dx}+\int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}.$$

3) (*Modularna nejednakost*)
Funkcija $|f(x)|$ je integrabilna na $[a,b]$ i važi $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{dx}\right|\leq\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{dx}.$$

4) Funkcija $f(x)\cdot g(x)$ je integrabilna na $[a,b]$.

5) Funkcija $f(x)$ je integrabilna na $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$.

6) Ako je $(\forall x\in[a,b])\ f(x)=f_1(x)$ osim u konačno mnogo tačaka, tada je funkcija $f_1(x)$ integrabilna na $[a,b]$ i važi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}=\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{dx}$.

7) $$(\forall x\in[a,b])\ f(x)\geq 0\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\geq 0$$
$$(\forall x\in[a,b])\ f(x)>0\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}>0$$

8) (*Monotonost integrala*) $$(\forall x\in[a,b])\ f(x)\leq g(x)\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\leq\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}.$$
$$(\forall x\in[a,b])\ f(x)<g(x)\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}<\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}.$$

Primeri:

1. Odrediti znak integrala (bez izračunavanja integrala): $\int_2^3 x^8 \log x \cos^3 x \, dx$.

2. Uporediti sledeće integrale po veličini (bez izračunavanja):

   a) $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x \, dx$ i $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$;

   b) $I_1 = \int_0^1 e^{-x} \, dx$ i $I_2 = \int_0^1 e^{-x^2} \, dx$

   c) $I_1 = \int_0^5 f(x) \, dx$ i $I_2 = \int_0^5 g(x) \, dx$ i $I_3 = \int_0^5 h(x) \, dx$ gde su funkcije f, g i h definisane sa:

   $$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \neq 3 \\ 10^6, & x = 3 \end{cases}, \quad g(x) = e^{-x^2} \quad \text{i} \quad h(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 3 \\ -10^6, & x = 3 \end{cases}$$

3. Ako je $h_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in [4,8] \backslash \{5,6,7\} \\ 0, & \text{za } x = 5 \\ 2, & \text{za } x = 6 \\ -10, & \text{za } x = 7 \end{cases}$ izračunati $\int_4^8 h_1(t) dt$.

4. Veza između Rimanovog određenog integrala i neodređenog integrala) (Njutn-Lajbnicova formula)

Teorema 4.1 Ako je f neprekidna funkcija na intervalu I i ako je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f na intervalu I, tada za svaki segment $[a,b] \subset I$ važi

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Primeri:

1. Da li se Njutn-Lajbnicova formula može koristiti za izračunavanje integrala:

   a) $\int_1^2 x^2 dx$ b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ d) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)}$?

2. Izračunati: $\int_{-1}^2 f(x) \, dx$ gde je:

   a) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 5, & x > 0 \end{cases}$ b) $f(x) = |x|$. c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \end{cases}$.

3. Izračunati: a) $\int_0^2 |1-x| \, dx$ b) $\int_0^{4\pi} \sqrt{1-\cos x} \, dx$ c) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} \, dx$

   d) $\int_0^{ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ e) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx$ f) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

5. Metodi integracije određenog integrala

Teorema 5.1 (Parcijalna integracija)
Ako su funkcije $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$ i $v'(x)$ neprekidne na $[a,b]$ tada je

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\,|_a^b - \int_a^b v(x)du(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x).$$

Primeri:

1. Izračunati: 1) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx$ 2) $\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$.

Teorema 5.2 (Smena promenljive kod određenog integrala)

$\boxed{\text{Smena } x = \varphi(t):}$ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$

ako važi sledeće:
- funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je neprekidna,
- $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$,
- funkcije $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ i φ' su neprekidne na $[\alpha,\beta]$
- funkcija $f(\varphi(t))$ je definisana za sve vrednosti $t \in [\alpha,\beta]$.

$\boxed{\text{Smena } t = g(x):}$ $\int_a^b f(g(x))\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\cdot(g^{-1}(t))'\,dt$

ako važi sledeće:
- funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je neprekidna,
- $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$,
- funkcija g je strogo monotona na $[a,b]$
- inverzna funkcija g^{-1} ima neprekidan izvod na $[\alpha,\beta]$.

Primeri:

1. Izračunati: a) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, b) $\int_0^{ln5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$.
2. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija za koju važi $(\forall x \in (0,\pi))g(x) > 0$.
   a) Odrediti znak integrala $\int_0^\pi g(x)\,dx$.
   b) Uvesti smenu $t = \sin x$ u integral $\int_0^\pi g(x)\,dx$.
3. Uvesti smenu $t = 1+x^2$ u integral $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ *(samo uvesti smenu, bez izračunavanja integrala).*
4. Izračunati: a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$ b) $\int_0^2 \left(ln\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^2 - \frac{4}{3}x\right)dx$.
5. Izračunati integrale: a) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$ b) $\int_0^{\sqrt{3}} x \arcsin\frac{2x}{1+x^2}\,dx$.
6. Izvesti rekurentnu formulu za integral $\mathcal{I}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$, gde $n = 0,1,2,\ldots$ a zatim izračunati ovaj integral.
7. Izvesti rekurentnu formulu za integral $\mathcal{I}_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx$, gde $n \in \mathbb{N}$, a zatim izračunati ovaj integral.
8. Izračunati integrale:
   a) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2}dx$ b) $\int_{3\pi/4}^{\pi} \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}dx$ c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$.

Teorema 5.3 Ako je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna i periodična funkcija sa periodom T, tada važi:

$$\int_0^T f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{dx}, \quad (a\in\mathbb{R}).$$

Teorema 5.4 Ako je f neprekidna funkcija na $[-a,a]$, tada važi:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } f \text{ neparna funkcija} \\ 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{dx}, & \text{ako je } f \text{ parna funkcija} \end{cases}$$

Primer:

1. Izračunati integrale:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^{17}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin 2x(\cos x)^{4/3}\,dx, \qquad \int_{-1/2}^{1/2} \cos x\cdot\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx, \qquad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \mathrm{tg}x\,dx.$$