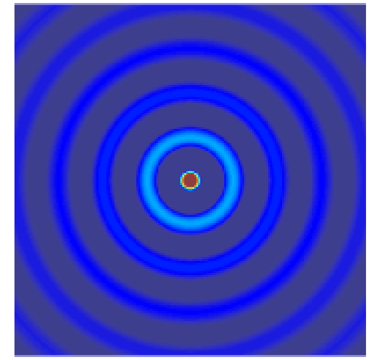
FIZIKA SI

Časovi 13-16

Talasi



Arsoski Vladimir

NANO•OPTO•BIO

NOBEL elektronika

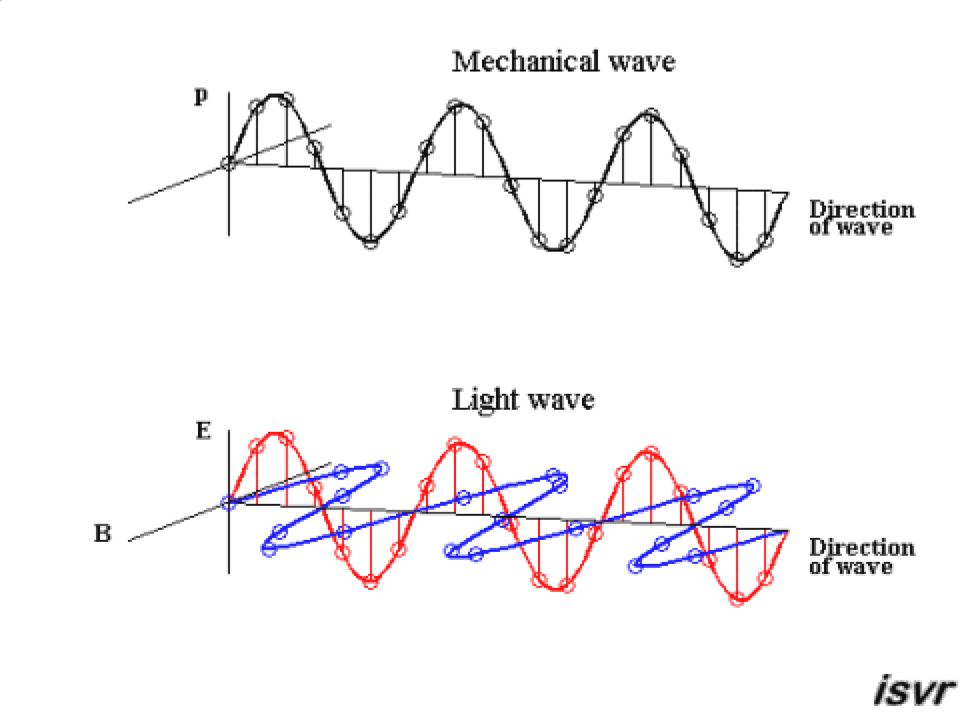
odsek za fizičku elektroniku

LASERSKA TEHNIKA

http://nobel.etf.bg.ac.yu/

Talasi

Talasi prenose energiju iz jednog u drugi deo prostora.



Mehanički (materijalni) talasi

Potreban je medijum u koji se „ubacuje“ energija mehaničkim radom ili zagrevanjem, koja se prenosi kroz prostor brzinom c (što je praćeno karakterističnim oblikom poremećaja).

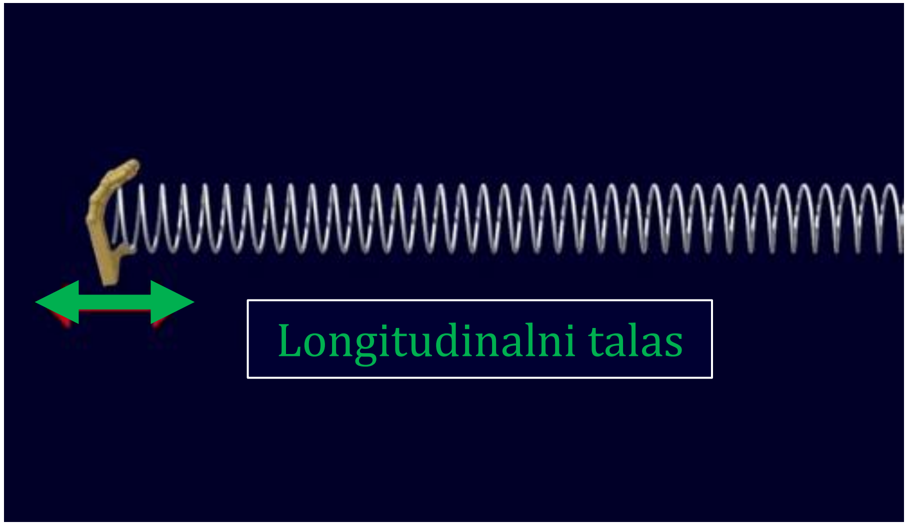
Elektromagnetni talasi

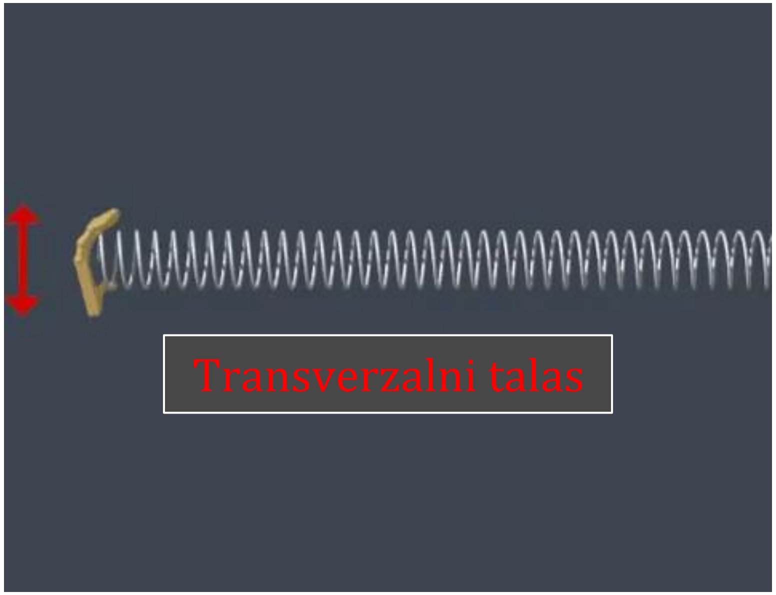
(svetlost, UV i IC talasi, X i gama fotoni itd.) ne zahtevaju medijum da bi se prostirali.

Podela talasa i pojam mehaničkih talasa

Talasi mogu biti:
– longitudinalni (oscilacije čestica sredine u pravcu prostiranja),
– transverzalni (oscilacije normalne na pravac prostiranja poremećaja – talasa).

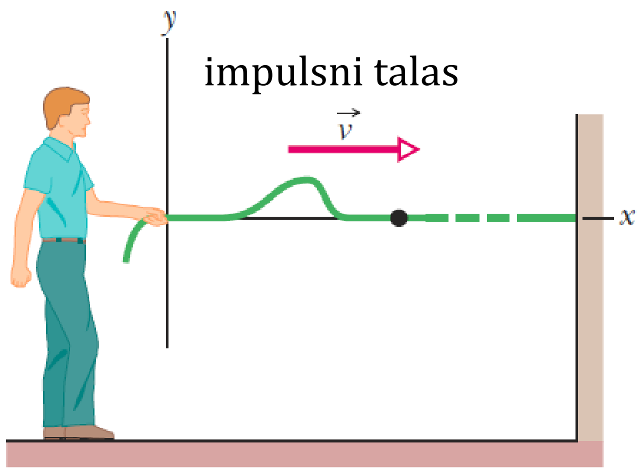
Mehanički talas je posledica poremećaja u materijalnoj sredini (mora postojati medijum koji prenosi oscilacije čestica sredine).



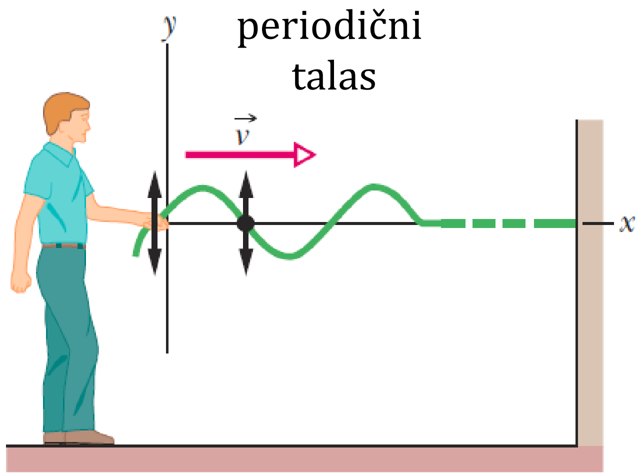


Uočite da kroz prostor putuje oblik poremećaja, a ne medijum (čestice medijuma se kreću "lokalno" – obično periodično osciluju oko ravnotežnog položaja).

Impulsni i periodični talasi

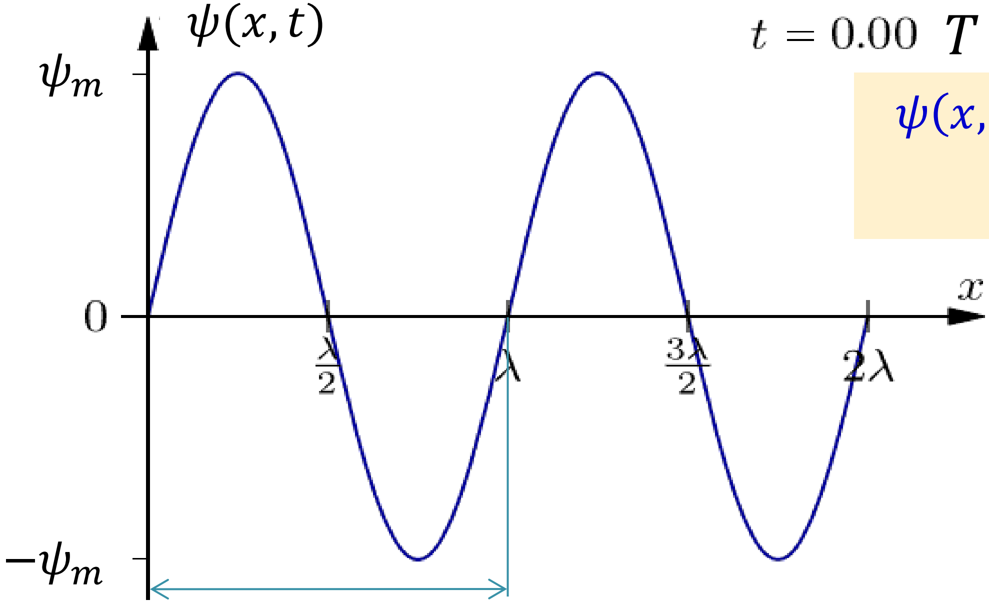


Jedan impuls (poremećaj ostvaren obično kratkotrajnom pobudom) se prostire kroz medijum.



Postoji periodična pobuda čime se formira povorka impulsa koji se prostiru kroz medijum

Periodični talasi



λ – talasna dužina

$$\psi(x,t) = \underbrace{\psi_m}_{\text{ampli–tuda}} \cdot \sin(\underbrace{\omega t - kx + \phi_0}_{\text{faza}})$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ talasni broj

x – koordinata

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ kružna učestanost

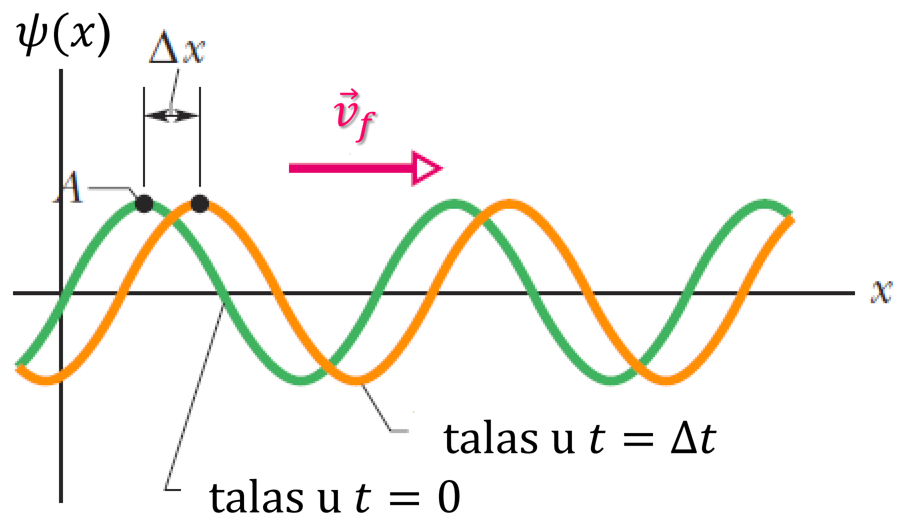
t – vreme

T – perioda

$f = \frac{1}{T}$ – frekvencija

Brzina (fazna) talasa

Posmatramo tačku poremećajadefi-nisane faze (npr. max. A). Za vreme Δt poremećaj se "pomeri" za Δx.



faza: $\omega t - kx = const$ ... d/dt

$$\omega - k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

brzina ekvifazne površi:

$$v_f = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

fazna brzina:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = c$$

Za kretanje u suprotnom smeru

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega}{k} < 0.$$

faza: $\omega t + kx = const$.

$$\psi(x,t) = \psi_0 \sin(\omega t \mp kx) = \psi_0 \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right)\right) = \psi_0 \sin\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right)\right)$$

Talasna jednačina

U opštem slučaju: $\psi(x,t) = f\left(t \mp \frac{x}{c}\right).$

Za smenu $\xi = t \mp \frac{x}{c}$:

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \mp\frac{1}{c}.$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi}, \dots \qquad \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \mp\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi}, \dots \qquad \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2}.$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}t^2} = c^2\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}}$$

Primer (22.1.2019)

Data je talasna funkcija:

$$\psi(x,t) = \frac{6}{1 + x^2 - 6xt + 9t^2}.$$

Da li data funkcija opisuje talas?

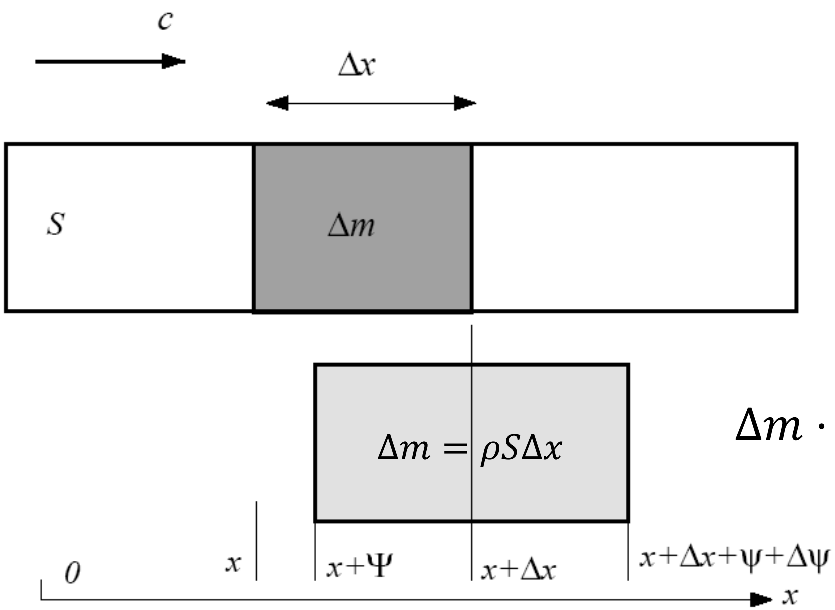
- Funkcija se može zapisati u obliku:

$$\psi(x,t) = \frac{6}{1 + 9\left(t - \frac{x}{3}\right)^2},$$

pa je $\psi(x,t) = f(t - x/c)$, gde je fazna brzina c=3 m/s. Opisuje talasni impuls koji se prostire u smeru x -ose.

Maksimalna vrednost poremećaja je $\psi_0 = 6$ („vrh impulsa“), kada je izraz u imeniocu minimalan, što je ispunjeno za $t - \frac{x}{3} = 0$.

Brzina longitudinalnih talasa u šipci



Hukov zakon:

$$E_Y = \frac{\sigma}{\delta} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \frac{F}{S} = E_Y \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

II Njutnov zakon za Δm:

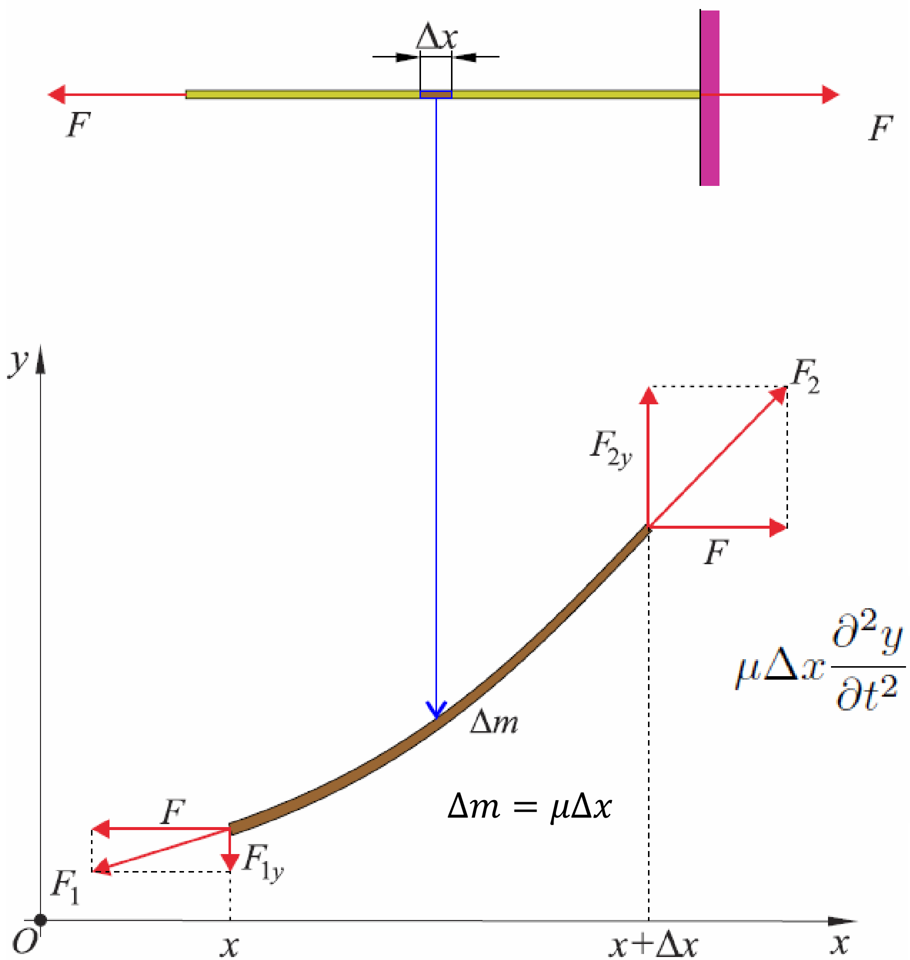
$$\Delta m \cdot a = F(x + \Delta x + \psi + \Delta \psi) - F(x + \psi)$$

$$\rho S \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \big(\sigma(x + \Delta x + \psi + \Delta \psi) - \sigma(x + \psi)\big) S$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E_Y}{\rho} \frac{\left(\frac{\partial \psi (x + \Delta x + \psi + \Delta \psi)}{\partial x} - \frac{\partial \psi (x + \psi)}{\partial x} \right)}{\Delta x} = \frac{E_Y}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E_Y}{\rho}}}$$

Brzina transverzalnih talasa na žici



$$F_{1y} = F\mathrm{tg}\theta_1 = F\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x ,$$

$$F_{2y} = F\mathrm{tg}\theta_2 = F\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} .$$

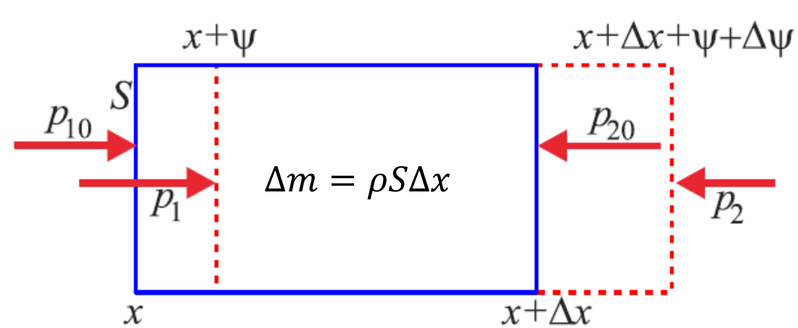
$$\mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_{2y} - F_{1y} = F\underbrace{\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x\right]}_{\approx \Delta x \partial^2 y/\partial x^2} .$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

šipka $c = \sqrt{\frac{E_S}{\rho}}$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Brzina longitudinalnih talasa u fluidima



$$p_1 = p_{10} + \Delta p_1$$

$$p_2 = p_{20} + \Delta p_2$$

$$\Delta p = -E_V \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\delta(\Delta V)}{\Delta V} = -E_V \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S\Delta\psi}{S\Delta x} = -E_V \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\Delta m a_x = F_x = Sp_1 - Sp_2 = -S(\Delta p_2 - \Delta p_1) = -S\delta(\Delta p)$$

$$\delta(\Delta p) = \Delta p_2 - \Delta p_1 \approx \left(\frac{\partial \Delta p}{\Delta x}\right)_x \Delta x = -E_V \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Delta x$$

$$\rho S\Delta x a_x = SE_V \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Delta x$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{E_V}{\rho}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{E_V}{\rho}}$$

gasovi $E_V = \kappa p = \rho \frac{\kappa RT}{M}$

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$$

Primer: talasna funkcija, brzina

Talasna funkcija za talas na žici ima oblik:

$$y(x,t) = 3\sin(10\pi t s^{-1} - \pi x\ \mathrm{m}^{-1})\ [\mathrm{cm}].$$

Odrediti:

(a) amplitudu, talasnu dužinu, period i frekvenciju,

(b) faznu brzinu i smer kretanja,

(c) maksimalnu brzinu i ubrzanje delića žice.

Rezultat:

Opšti izraz:

$$y(x,t) = Y_0 \sin(\omega t - kx)$$

(a) $Y_0 = 3\ \mathrm{cm}; \omega = 10\pi \mathrm{s}^{-1}; T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 0{,}2\ \mathrm{s}; f = \dfrac{1}{T} = 5\ \mathrm{Hz};\ k = \pi \mathrm{m}^{-1}; \lambda = \dfrac{2\pi}{k} = 2\ \mathrm{m};$

(b) $c = \dfrac{\omega}{k} = 10\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, u smeru $x -$ ose

(c) $v_y = \dot{y} = \omega Y_0 \cos(\omega t - kx) = v_{\max}\cos(\omega t - kx)$.

$a_y = \dot{v}_y = -\omega^2 Y_0 \sin(\omega t - kx) = \omega^2 Y_0 \sin(\omega t - kx + \pi) = a_{\max}\sin(\omega t - kx)$.

$v_{\max} = \omega Y_0 = 0{,}94\ \mathrm{m/s}$

$a_{\max} = \omega^2 Y_0 = 29{,}6\ \mathrm{m/s}^2$

Brzina: longitudinalni vs. transverzalni

- Sila F kojom se zategne žica proizvodi relativnu podužnu deformaciju žice dužine L: $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = 1\%$. Žica je konstantnog poprečnog preseka (deformacija žice je prema Hukovom zakonu). Koliki je odnos brzina longitudinalnog c_l i transverzalnog talasa c_t?

$$\frac{c_l}{c_t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = 10.$$

Snaga transverzalnih talasa u žici

$$P = \vec{F}\vec{v} = F_x \cancel{v_x}^{0} + F_y v_y$$

$$\boxed{F_y = -F\tan\theta = -F\frac{\partial y}{\partial x}} \quad \boxed{v_y = \frac{\partial y}{\partial t}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = -F\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

$$\left.\begin{aligned} y(x,t) &= Y_0\sin(\omega t - kx)\\ \frac{\partial y}{\partial t} &= +\omega Y_0\cos(\omega t - kx)\\ \frac{\partial y}{\partial x} &= -kY_0\cos(\omega t - kx)\end{aligned}\right\} \Rightarrow P = Fk\omega Y_0^2\cos^2(\omega t - kx) = \underbrace{\frac{F}{c}}_{Z}\omega^2 Y_0^2\cos^2(\omega t - kx)$$

$$\int_0^T \cos^2(\omega t - kx)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^T (1+\cos 2(\omega t - kx))\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{P_{sr} = \frac{1}{2}Z\omega^2 Y_0^2} \quad \boxed{Z = S\rho c = \sqrt{F\mu}}$$

karakteristična impedansa žice

Snaga longitudinalnih talasa

$$P = \vec{F}\vec{v} = F_x v_x + \cancelto{0}{F_y v_y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{šipka: } F_x = -SE_Y \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &\text{fluid: } F_x = p_x S = -SE_V \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}}$$

$$\boxed{v_x = \frac{\partial \psi}{\partial t}} \Rightarrow \boxed{P = -SE_{Y,V} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x,t) = \psi_0 \sin(\omega t - kx) \\ &\frac{\partial \psi}{\partial t} = +\omega \psi_0 \cos(\omega t - kx) \\ &\frac{\partial \psi}{\partial x} = -k \psi_0 \cos(\omega t - kx) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = SE_{Y,V} k\omega \psi_0^2 \cos^2(\omega t - kx) = \underbrace{\frac{SE_{Y,V}}{c}}_{Z} \omega^2 \psi_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\boxed{\Delta p_0 = E_V k \psi_0}$$ amplituda pritisaka

$$\boxed{P_{sr} = \frac{1}{2} Z \omega^2 \psi_0^2}$$

$$\boxed{Z = S\mathbb{Z} = S\rho c}$$

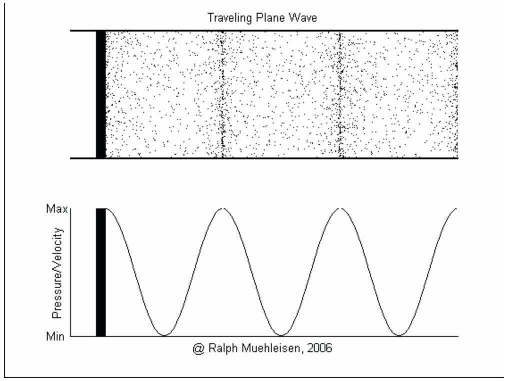
šipka $\boxed{\mathbb{Z} = \sqrt{E_Y \rho}}$ karakteristična impedansa po jedinici površine

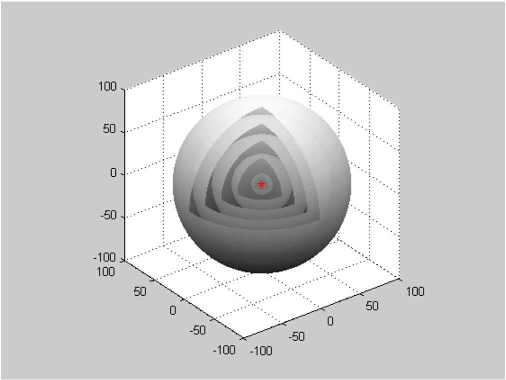
fluid $\boxed{\mathbb{Z} = \sqrt{E_V \rho}}$ akustička impedansa

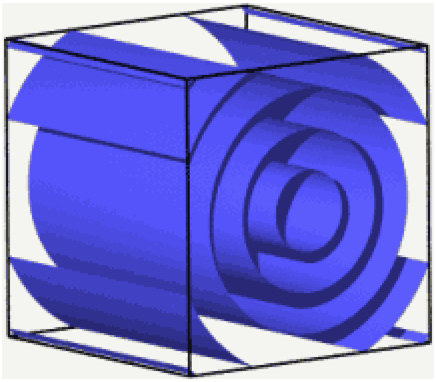
Intenzitet talasa i jačina (nivo) zvuka

$$I = \frac{P_{sr}}{S} = \frac{1}{2}\mathbb{Z}\omega^2\psi_0^2$$ intenzitet talasa $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$

Ravanski talas $I \sim const$	Sferni talasi $I \sim 1/r^2$	Cilindrični talasi $I \sim 1/r$







bez gubitaka:
$\psi_0 = const$

bez gubitaka:
$\psi_0 r = const$

bez gubitaka:
$\psi_0\sqrt{r} = const$

sa gubicima:
$\psi_0(x)e^{\frac{\mu}{2}x} = \psi_0(0)\cdot 1$

sa gubicima:
$\psi_0(r)re^{\frac{\mu}{2}r} = \psi_0(r_0)r_0e^{\frac{\mu}{2}r_0}$

sa gubicima:
$\psi_0(r)\sqrt{r}e^{\frac{\mu}{2}r} = \psi_0(r_0)\sqrt{r_0}e^{\frac{\mu}{2}r_0}$

$$I = \frac{P_{sr}}{S} = \frac{(\Delta p_0)^2}{2\mathbb{Z}}$$ intenzitet zvuka

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0}\,[\mathrm{dB}]$$ jačina (nivo) zvuka

Longitudinalni talas u proizvoljnoj tački prostora

Izvor emituje zvučne talase frekvencije f konstantne srednje snage P_{0sr}.

$$I = \frac{P_{sr}}{S} = \frac{1}{2}\mathbb{Z}\omega^2\psi_0^2 \qquad \mathbb{Z} = \sqrt{E\rho} \qquad \omega = 2\pi f$$

Snaga koja se transportuje kroz ekvifaznu površ na rastojanju r od izvora:

−bez gubitaka $P_{sr} = P_{0sr}$,

−sa gubicima $P_{sr} = P_{0sr}e^{-\mu r}$, gde je μ koeficijent slabljenja ...

Talas	Ekvifazna površ na rastojanju r
Ravanski talas	$S(r) = S_0 = const$
Sferni talasi	$S(r) = 4\pi r^2$
Cilindrični talasi	$S(r) = 2\pi rl$, gde je l dužina izvora

Amplituda talasa na ekvifaznoj površi na rastojanju r od izvora:

$$\boxed{\psi_0(r) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2P_{0sr}}{\mathbb{Z}}}\frac{e^{-\frac{\mu}{2}r}}{\sqrt{S(r)}}}$$

$$\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2P_{0sr}}{\mathbb{Z}}} = const;$$

bez apsorpcije $\mu = 0$

Izraz za oscilacije sinusnog talasa u proizvoljnoj tački: ravanski talas

Poznato je $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$ i izraz za oscilacije u tački A na ekvifaznoj površi na rastojanju r_A od izvora:

$$\psi(r_A) = \psi_0(r_A)\sin(\omega t - kr_A + \phi)\,.$$

gde je $\psi_0^A = \psi_0(r_A)$ amplituda oscilacija. Naći izraz za oscilacije u tački B na ekvifaznoj površi na rastojanju r_B od izvora.

$$\boxed{S_A = S_B = S_0 \;\text{ za ravanski talas}}$$

$$\boxed{\psi_0(r_A) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2P_{0sr}}{\mathbb{Z}}\frac{e^{-\frac{\mu}{2}r_A}}{\sqrt{S_0}}}}$$

$$\boxed{\psi_0(r_B) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2P_{0sr}}{\mathbb{Z}}\frac{e^{-\frac{\mu}{2}r_B}}{\sqrt{S_0}}}}$$

$$\boxed{\psi_0(r_B) = \psi_0(r_A)e^{-\frac{\mu}{2}(r_B - r_A)}}$$

$$\psi(r_B) = \psi_0(r_B)\sin(\omega t - kr_B + \phi) = \psi_0(r_B)\sin(\omega t - kr_A + \phi - k(r_B - r_A))$$

$$\boxed{\psi(r_B) = \psi_0(r_A)e^{-\frac{\mu}{2}(r_B - r_A)}\sin(\omega t - kr_A + \phi - k(r_B - r_A))}$$

Izraz za oscilacije sinusnog talasa u proizvoljnoj tački: sferni talas

Poznato je $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$ i izraz za oscilacije u tački A na ekvifaznoj površi na rastojanju r_A od centra izvora:

$$\psi(r_A) = \psi_0(r_A)\sin(\omega t - kr_A + \phi)\,.$$

gde je $\psi_0^A = \psi_0(r_A)$ amplituda oscilacija. Naći izraz za oscilacije u tački B na ekvifaznoj površi na rastojanju r_B od centra izvora.

$$\boxed{S_A = 4\pi r_A^2; \quad S_B = 4\pi r_B^2}$$

$$\boxed{\psi_0(r_A) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{P_{0sr}}{2\pi\mathbb{Z}}\frac{e^{-\frac{\mu}{2}r_A}}{r_A}}}$$

$$\boxed{\psi_0(r_B) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{P_{0sr}}{2\pi\mathbb{Z}}\frac{e^{-\frac{\mu}{2}r_B}}{r_B}}}$$

$$\boxed{\psi_0(r_B) = \psi_0(r_A)\frac{r_A}{r_B}e^{-\frac{\mu}{2}(r_B - r_A)}}$$

$$\psi(r_B) = \psi_0(r_B)\sin(\omega t - kr_B + \phi) = \psi_0(r_B)\sin(\omega t - kr_A + \phi - k(r_B - r_A))$$

$$\boxed{\psi(r_B) = \psi_0(r_A)\frac{r_A}{r_B}e^{-\frac{\mu}{2}(r_B - r_A)}\sin(\omega t - kr_A + \phi - k(r_B - r_A))}$$

Izraz za oscilacije sinusnog talasa u proizvoljnoj tački: cilindrični talas

Poznato je $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$ i izraz za oscilacije u tački A na ekvifaznoj površi na rastojanju r_A od ose izvora:

$$\psi(r_A) = \psi_0(r_A)\sin(\omega t - kr_A + \phi)\,.$$

gde je $\psi_0^A = \psi_0(r_A)$ amplituda oscilacija. Naći izraz za oscilacije u tački B na ekvifaznoj površi na rastojanju r_B od ose izvora.

$$\boxed{S_A = 2\pi r_A l; \quad S_B = 2\pi r_B l}$$

$$\boxed{\psi_0(r_A) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{P_{0sr}}{l\pi\mathbb{Z}}\frac{e^{-\frac{\mu}{2}r_A}}{\sqrt{r_A}}}} \qquad \boxed{\psi_0(r_B) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{P_{0sr}}{l\pi\mathbb{Z}}\frac{e^{-\frac{\mu}{2}r_B}}{\sqrt{r_B}}}}$$

$$\boxed{\psi_0(r_B) = \psi_0(r_A)\sqrt{\frac{r_A}{r_B}\,e^{-\frac{\mu}{2}(r_B - r_A)}}}$$

$$\psi(r_B) = \psi_0(r_B)\sin(\omega t - kr_B + \phi) = \psi_0(r_B)\sin(\omega t - kr_A + \phi - k(r_B - r_A))$$

$$\boxed{\psi(r_B) = \psi_0(r_A)\sqrt{\frac{r_A}{r_B}e^{-\frac{\mu}{2}(r_B - r_A)}}\sin(\omega t - kr_A + \phi - k(r_B - r_A))}$$

Numerički primer

Tačkasti izvor generiše sinusoidalne talase talasne dužine $\lambda = 4$ m, tako da je na rastojanju $r_A = 1$ m od centra izvora izraz za oscilacije:

$$\psi(r_A) = 1{,}6\sin(10\pi t s^{-1})\ [\mu\text{m}].$$

Naći izraz za oscilacije u tački B na ekvifaznoj površi na rastojanju $r_B = 2$ m od izvora. Sredina je bez apsorpcije (μ=0).

Rešenje: $\omega t - kr_A + \phi = 10\pi t s^{-1}$; $\psi_0(r_A) = 1{,}6\ \mu\text{m}$;

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}\ \text{m}^{-1}; \omega = 10\pi\text{s}^{-1}; c = \frac{\omega}{k} = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\psi(r_B) = \frac{r_A}{r_B}\psi_0(r_A)e^{-\frac{\mu}{2}(r_B - r_A)}\sin\left(\omega t - kr_A + \phi - k(r_B - r_A)\right);$$

$$\psi(r_B) = \frac{1\text{m}}{2\text{m}}1{,}6\ \mu\text{m}\ e^{-\frac{0}{2}(r_B - r_A)}\sin\left(10\pi t s^{-1} - \frac{\pi}{2}\,(2-1)\right)$$

$$\psi(r_B) = 0{,}8\ \mu\text{m}\ \sin\left(10\pi t s^{-1} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\psi(r_A) = -0{,}8\cos(10\pi t s^{-1})\ [\mu\text{m}]$$