Rang matrice, Kroneker-Kapelijeva teorema, sopstvene vrednosti i vektori

Milica Jovalekić Odsek Softversko inženjerstvo, Elektrotehnički fakultet, Beograd

April 2020.

Rang matrice

Zadatak 1. *U zavisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$, odrediti rang matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & a & 10 & 1 \\ 7 & 1 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Rešenje. $\operatorname{rang} A$ = broj linearno nezavisnih vrsta matrice = broj linearno nezavisnih kolona matrice. Primenom elementarnih transformacija matrice, rang matrice se ne menja. Primenom elemenatrnih transformacija matrice, svodimo matricu na trougaoni oblik. Izraz $K_1 \leftrightarrow K_2$ označava da menjamo mesta prvoj i drugoj koloni; izraz $V_2 \to -4V_1 + V_2$ označava da od druge vrste oduzimamo prvu vrstu pomnoženu sa 4 i rezultat upisujemo u drugu vrstu; itd.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & a & 10 & 1 \\ 7 & 1 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \overset{\substack{V_2 \to -4V_1 + V_2 \\ V_3 \to -7V_1 + V_3 \\ V_4 \to -2V_1 + V_4}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & a-12 & 6 & -15 \\ 0 & -20 & 10 & -25 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \overset{\substack{V_3 \to \frac{1}{5}V_3 \\ V_4 \to -\frac{1}{5}V_3 + V_4}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & a-12 & 6 & -15 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{V_2 \leftrightarrow V_3}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & a-12 & 6 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{V_3 \to -3V_2 + V_3}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -5 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{K_2 \leftrightarrow K_3}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je $a = 0$, onda je $\operatorname{rang} A = 2$. Ako je $a \neq 0$, onda je $\operatorname{rang} A = 3$. □

Domaći zadatak 2. *U zavisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$, odrediti rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3. *Odrediti vrednost parametra $a \in \mathbb{R}$ za koju je $\operatorname{rang} A = 3$, gde je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & a+1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1&-1\\-1&1&-3&a&1\\1&1&1&0&2\\1&0&2&0&a+1\end{bmatrix}\overset{\substack{V_2\to V_1+V_2\\V_3\to -V_1+V_3\\V_4\to -V_1+V_4}}{\cong}\begin{bmatrix}1&0&2&1&-1\\0&1&-1&a+1&0\\0&1&-1&-1&3\\0&0&0&-1&a+2\end{bmatrix}\overset{V_3\to -V_2+V_3}{\cong}\begin{bmatrix}1&0&2&1&-1\\0&1&-1&a+1&0\\0&0&0&-a-2&3\\0&0&0&-1&a+2\end{bmatrix}$$

$$\overset{V_3\leftrightarrow V_4}{\cong}\begin{bmatrix}1&0&2&1&-1\\0&1&-1&a+1&0\\0&0&0&-1&a+2\\0&0&0&-a-2&3\end{bmatrix}\overset{V_4\to -(a+2)V_3+V_4}{\cong}\begin{bmatrix}1&0&2&1&-1\\0&1&-1&a+1&0\\0&0&0&-1&a+2\\0&0&0&0&3-(a+2)^2\end{bmatrix}$$

Za $a\in\{-2+\sqrt{3},-2-\sqrt{3}\}$ je $\operatorname{rang}A=3$.
Za sve ostale vrednosti parametra, tj. $a\notin\{-2+\sqrt{3},-2-\sqrt{3}\}$, važi $\operatorname{rang}A=4$. □

Domaći zadatak 4. *Odrediti vrednost parametra $a\in\mathbb{R}$ za koju je $\operatorname{rang}A=2$, gde je*

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\2&0&a&0\\0&-4&5&2\end{bmatrix}.$$

Kroneker-Kapelijeva teorema

Zadatak 5. *U zavisnosti od vrednosti parametra $a\in\mathbb{R}$ rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina*

$$\begin{aligned}x+y+z&=3\\x-ay+2z&=1\\2x+2y-az&=6\end{aligned}$$

primenom Kroneker-Kapelijeve teoreme.

Rešenje. Matricu čiji su elementi koeficijenti uz nepoznate promenljive u sistemu, obeležimo slovom A, tj. $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-a&2\\2&2&-a\end{bmatrix}$. Kada matrici A dodamo na kraj kolonu rezultata iz sistema dobijamo matricu koju obeležavamo slovom B, tj. $B=\begin{bmatrix}1&1&1&3\\1&-a&2&1\\2&2&-a&6\end{bmatrix}$. Iz Kroneker-Kapelijeve teoreme zaključujemo da treba da odredimo $\operatorname{rang}A$ i $\operatorname{rang}B$ da bismo mogli da vidimo kada sistem ima jedinstveno rešenje, kada ima beskonačno mnogo rešenja i kada nema rešenje.

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&3\\1&-a&2&1\\2&2&-a&6\end{bmatrix}\overset{\substack{V_2\to -V_1+V_2\\V_3\to -2V_1+V_3}}{\cong}\begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&-a-1&1&-2\\0&0&-a-2&0\end{bmatrix}\overset{V_3\to(a+2)V_2+V_3}{\cong}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&-(a+1)&1&-2\\0&-(a+1)(a+2)&0&-2(a+2)\end{bmatrix}\overset{K_2\leftrightarrow K_3}{\cong}\begin{bmatrix}1&1&1&3\\0&1&-(a+1)&-2\\0&0&-(a+1)(a+2)&-2(a+2)\end{bmatrix}=\widetilde{B}$$

Dakle, važi:
Za $a=-2$ je $\operatorname{rang}B=2$, a za $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ je $\operatorname{rang}B=3$.
Prve tri kolone matrice B čine matricu A, pa važi:
Za $a\in\{-1,-2\}$ je $\operatorname{rang}A=2$, a za $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$ je $\operatorname{rang}A=3$.

Dalje imamo:
1. slučaj Za $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$ važi $\operatorname{rang}A=\operatorname{rang}B=3$, pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima jedinstveno rešenje. Matrica $\widetilde{B}$, koja je dobijena transformacijom matrice B, zadaje sledeći

sistem: $\begin{array}{rcl} x+z+y &=& 3 \\ z-(a+1)y &=& -2 \\ -(a+1)(a+2)y &=& -2(a+2) \end{array}$. Treba obratiti pažnju da smo u transformisanju matrice B zamenili drugu i treću kolonu, pa su koeficijenti u drugoj koloni matrice $\widetilde{B}$ uz z, a koeficijenti u trećoj koloni matrice $\widetilde{B}$ uz y.
Rešenje sistema u ovom slučaju je $y = \frac{2}{a+1}$, $z = (a+1)y - 2 = 0$, $x = 3 - y - z = 3 - \frac{2}{a+1}$.

2. slučaj Za $a = -2$ važi rang$A$ = rang$B = 2 < 3$, pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Slično kao u 1. slučaju, važi: $\begin{array}{rcl} x+z+y &=& 3 \\ z+y &=& -2 \\ 0 &=& 0 \end{array}$.
Rešenje sistema u ovom slučaju je $x = 5$, $z = t$, $y = -2 - t$, gde je $t \in \mathbb{R}$ parametar.
3. slučaj Za $a = -1$ važi rang$A \neq$ rang$B$, pa prema KK teoremi sistem nema rešenja. □

Domaći zadatak 6. *U zavisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina* $\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x+ay+a^2z &=& 1 \\ ax+y+a^2z &=& -1 \end{array}$ *primenom Kroneker-Kapelijeve teoreme.*

Zadatak 7. *U zavisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina* $\begin{array}{rcl} 2x+5y+3z+t &=& 1 \\ x+3y+2z+t &=& 2 \\ 6x+14y+8z+2t &=& a-3 \end{array}$ *primenom Kroneker-Kapelijeve teoreme.*

Rešenje. Isto kao u prethodnom zadatku, tražimo rang$A$ i rang$B$.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 14 & 8 & 2 & a-3 \end{bmatrix} \overset{V_1 \leftrightarrow V_2}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 14 & 8 & 2 & a-3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{V_2 \to -2V_1+V_2 \\ V_3 \to -6V_1+V_3}}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & -4 & -4 & a-15 \end{bmatrix} \overset{V_3 \to -4V_2+V_3}{\cong} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

1. slučaj Za $a = 3$ važi rang$A$ = rang$B = 2 < 4$, pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem ima beskonačno mnogo rešenja. Sistem se svodi na:
$$\begin{array}{rcl} x+3y+2z+t &=& 2 \\ -y-z-t &=& -3 \\ 0 &=& 0 \end{array}.$$
Rešenje sistema u ovom slučaju je $z = \alpha$, $y = \beta$, $t = 3 - \alpha - \beta$, $x = -1 - \alpha - 2\beta$, gde je $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parametar.
2. slučaj Za $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ važi rang$A = 2$ i rang$B = 3$, odnosno rang$A \neq$ rang$B$ pa prema Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem nema rešenja. □

Domaći zadatak 8. *U zavisnosti od vrednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ rešiti sistem linearnih algebarskih jednačina* $\begin{array}{rcl} x+y-z+t &=& 2 \\ 3x+y+z+t &=& -3 \\ 4x+2y+2t &=& a \end{array}$ *primenom Kroneker-Kapelijeve teoreme.*

Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori

Zadatak 9. *Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 21 \\ 1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Sopstvene vrednosti su nule karakterističnog polinoma, a karakteristični polinom je $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, gde je I jedinična matrica iste dimenzije kao matrica A. Nadjimo sopstvene vrednosti tj. za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ važi $\varphi(\lambda) = 0$:

$$0 = \varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 21 \\ 1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 21 \\ 1 & 6-\lambda & -7 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{razvoj po } V_3}{=} (5-\lambda)\left((2-\lambda)(6-\lambda) - (-3)\right) = (5-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = (5-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Sopstvene vrednosti su nule karakterističnog polinoma, pa postoje dve sopstvene vrednosti i to su $\lambda_{1,2} = 5, \lambda_3 = 3$.
Još treba da nadjemo sopstvene vektore.

Sopstveni vektori koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ su nenula vektori oblika $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ za koje važi $(A - \lambda I)X = \mathbf{0}$, gde je $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Nadjimo sopstvene vektore X_1 koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti $\lambda_{1,2} = 5$:

$$\mathbf{0} = (A - 5I)X_1 = \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 21 \\ 1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 21 \\ 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 - 3x_2 + 21x_3 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dobijamo homogeni sistem sa tri jednačine i tri nepoznate: $\begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 + 7x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$. Rešenje ovog sistema je $x_1 = t$, $x_2 = s$, $x_3 = \frac{s+t}{7}$, gde je $(s,t) \neq (0,0)$. Dakle, sopstvenoj vrednosti $\lambda_{1,2} = 5$ odgovaraju sopstveni vektori $X_1 = \begin{bmatrix} t \\ s \\ \frac{s+t}{7} \end{bmatrix}$, $(s,t) \neq (0,0)$.

Nadjimo sopstvene vektore X_2 koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti $\lambda_3 = 3$:

$$\mathbf{0} = (A - 3I)X_2 = \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 21 \\ 1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 21 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 - 3x_2 + 21x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ 2x_3 \end{bmatrix}.$$

Dobijamo homogeni sistem sa tri jednačine i tri nepoznate: $\begin{array}{rcl} -x_1 - 3x_2 + 21x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 & = & 0 \\ 2x_3 & = & 0 \end{array}$. Rešenje ovog sistema je $x_3 = 0$, $x_2 = t$, $x_1 = -3t$, gde je $t \neq 0$. Dakle, sopstvenoj vrednosti $\lambda_3 = 3$ odgovaraju sopstveni vektori $X_2 = \begin{bmatrix} -3t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$. □

Domaći zadatak 10. *Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$.

Zadatak 11. *Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rešenje. Najpre nalazimo sopstvene vrednosti kao nule karakterističnog polinoma:

$$0 = \varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \cdots \\ \text{domaći} \end{matrix} \right\} = (2-\lambda)^2(\lambda^2 + 2\lambda - 2).$$

Postoje tri sopstvene vrednosti i to su $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = \sqrt{3} - 1, \lambda_4 = -\sqrt{3} - 1$.
Nadjimo sopstvene vektore X_1 koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti $\lambda_{1,2} = 2$:

$$\mathbf{0} = (A - 2I)X_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Rešenje sistema je $x_4 = 0, x_2 = t, x_3 = s, x_1 = s + t$, gde je $(s, t) \neq (0, 0)$. Dakle, sopstvenoj vrednosti $\lambda_{1,2} = 2$ odgovaraju sopstveni vektori $X_1 = \begin{bmatrix} s+t \\ t \\ s \\ 0 \end{bmatrix}$, $(s, t) \neq (0, 0)$.

Nadjimo sopstvene vektore X_2 koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti $\lambda_3 = \sqrt{3} - 1$:

$$\mathbf{0} = (A - (\sqrt{3} - 1)I)X_2 = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2-\sqrt{3} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} (2-\sqrt{3})x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + (2-\sqrt{3})x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + (2-\sqrt{3})x_3 - x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - \sqrt{3}x_4 & = & 0 \end{array}.$$

Rešenje sistema je $x_2 = x_3 = t, x_1 = -t, x_4 = -\sqrt{3}t$, gde je $t \neq 0$. Dakle, sopstvenoj vrednosti $\lambda_3 = \sqrt{3} - 1$ odgovaraju sopstveni vektori $X_2 = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \\ -\sqrt{3}t \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

Sopstvenoj vrednosti $\lambda_4 = -\sqrt{3} - 1$ odgovaraju sopstveni vektori $X_3 = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \\ \sqrt{3}t \end{bmatrix}$, $t \neq 0$ (domaći).

□

Domaći zadatak 12. *Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Napomena. U rešenju Zadatka 9. sa prošlih vežbi (Linearna zavisnost) ima greska u poslednjem pasusu. Poslednji pasus treba da glasi:
Ako je $k = 2$ onda je $\alpha_4 \neq 0$, pa neka je, na primer, $\alpha_4 = 1$. Tada je $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$ i $\alpha_1 = -2$, pa su vektori v_1, v_2, v_3, v_4 linearno zavisni i oblik zavisnosti je $-2v_1 + v_4 = \mathbf{0}$.

Literatura

Zbirka zadataka iz algebre, drugi deo; Petar Vasić, Bratislav Iričanin, Mirko Jovanović, Tatjana Madžarević, Bojana Mihailović, Zoran Radosavljević, Slobodan Simić, Dragoš Cvetković; Elektrotehnički fakultet; Akademska misao.