Diferencijalne jednačine

Ivana Jovović, *Odsek Softversko inženjerstvo, Elektrotehnički fakultet, Beograd*

Mart 2020.

Diferencijalne jednačine I reda

Diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive

Diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive je jednačina oblika

$$f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

gde su funkcije f i g neprekidne na nekim intervalima. Opšte rešenje date jednačine je

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(y)\,\mathrm{d}y = C.$$

Zadatak 1. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $x\,\ln x\,dy - y\,\ln y\,dx = 0$*, na intervalu* $(1, +\infty)$.

Rešenje. Na intervalu $(1, +\infty)$ data diferencijalna jednačina je ekvivalentna jednačini koja razdvaja promenljive $\dfrac{\mathrm{d}y}{y\,\ln y} - \dfrac{\mathrm{d}x}{x\,\ln x} = 0$. Opšte rešenje jednačine koja razdvaja promenljive je $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y\,\ln y} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x\,\ln x} = C$, odnosno $\ln|\ln y| - \ln|\ln x| = C$. Dalje imamo $\dfrac{\ln y}{\ln x} = \widetilde{C}$. Naše konačno rešenje je $y(x) = x^{\widetilde{C}}$. □

Domaći zadatak 2. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $x\,y' = y\,\ln y$ *na intervalu* $(0, +\infty)$*;*

(b) $\sin y\,\cos x\,y' = -\cos y\,\sin x$ *na intervalu* $(0, \frac{\pi}{2})$*;*

(c) $y' = 1 + \dfrac{1}{y}$*;*

(d) $y' = \dfrac{y-1}{x+1}$ *na intervalu* $(-1, +\infty)$*;*

(e) $y' = e^{x-y}$.

Zadatak 3. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$(xy - x)\,dx + (xy + x - y - 1)\,dy = 0,$$

na intervalu $(1, +\infty)$.

Rešenje. Data diferencijalna jednačina može se transformisati u jednačinu

$$x\,(y-1)\,\mathrm{d}x + (x\,(y+1) - (y+1))\,\mathrm{d}y = 0,$$

odnosno jednačinu

$$x\,(y-1)\,\mathrm{d}x + (x-1)\,(y+1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Na intervalu $(1, +\infty)$ poslednja jednačina je ekvivalentna jednačini koja razdvaja promenljive $\frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{y+1}{y-1}\,\mathrm{d}y = 0$, čije je opšte rešenje $\int \frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{y+1}{y-1}\,\mathrm{d}y = C$, odnosno $x + \ln|x-1| - y + 2\ln|y-1| = C$. □

Zadatak 4. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y' = 4\,x^2 + 4\,x\,y + y^2 - 6.$$

Rešenje. Primetimo da datu diferencijalnu jednačinu možemo zapisati i u obliku $y' = (2\,x+y)^2 - 6$. Uvođenjem smene $z = 2\,x + y$, $z' = 2 + y'$, dobijamo diferencijalnu jednačinu $z' - 2 = z^2 - 6$. Dva rešenja ove jednačine su $z = \pm 2$. Pod pretpostavkom da je $z \neq \pm 2$, kako je $z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ dobijamo diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive $\frac{\mathrm{d}z}{z^2-4} = \mathrm{d}x$ čije je opšte rešenje $\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-4} - \int \mathrm{d}x = C$, odnosno $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| - x = C$. Opšte rešenje polazne jednačine je $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2\,x+y-2}{2\,x+y+2}\right| - x = C$. □

Domaći zadatak 5. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y' = (x-y)^2 + 1$;

(b) $y' = \cos(x - y + 1)$;

(c) $y' = \sqrt{y - x}$;

(d) $y' = \dfrac{1}{x+y-1}$;

(e) $y' = \dfrac{x + 3\,y - 1}{2\,x + 6\,y - 5}$.

Homogena diferencijalna jednačina

Homogena diferencijalna jednačina je diferencijalna jednačina oblika

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

gde je funkcija f neprekidna na intervalu (a, b).
Ukoliko je f identičko preslikavanje na intervalu (a, b), u pitanju je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive. Ukoliko nije, smenom $z = \dfrac{y}{x}$ homogenu diferencijalnu jednačinu svodimo na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive. Iz $z = \dfrac{y}{x}$ sledi $y = x\,z$ i $y' = z + x\,z'$. Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo $z + x\,z' = f(z)$, tj. $x\,\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = f(z) - z$, i na kraju diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive $\dfrac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, čije je opšte rešenje $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{f(z) - z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C$.

Zadatak 6. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $x\,y' = x + y$ na intervalu $(0, +\infty)$.*

Rešenje. Primetimo da je data diferencijalna jednačina na intervalu $(0, +\infty)$ ekvivalentna homogenoj diferencijalnoj jednačini $y' = 1 + \dfrac{y}{x}$. Uvođenjem smene $z = \dfrac{y}{x}$ dobijamo diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive $\dfrac{\mathrm{d}z}{1 + z - z} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, čije je opšte rešenje $\displaystyle\int \mathrm{d}z - \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = C$, odnosno $z(x) - \ln x = C$. Opšte rešenje polazne jednačine je $y(x) = C\,x + x \ln x$. □

Domaći zadatak 7. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y' = \dfrac{x + y}{x}$;

(b) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$;

(c) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$;

(d) $x\,y' = y\,\ln\dfrac{y}{x}$;

(e) $x\,y' - y = x\,tg\,\dfrac{y}{x}$.

Partikularno rešenje diferencijalne jednačine je ono koje se dobija iz opšteg rešenja za konkretnu (konačnu ili beskonačnu) vrednost konstante.

Singularno rešenje diferencijalne jednačine je ono koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za jednu vrednost (konačnu ili beskonačnu) konstanate.

Integralna kriva diferencijalne jednačine je svako njeno partikularno ili singularno rešenje.

Zadatak 8. *Rešiti diferencijalnu jednačinu*

$$(x^2 + 2\,x\,y - y^2)\,dx + (y^2 + 2\,x\,y - x^2)\,dy = 0$$

na intervalu $(0, +\infty)$*, a zatim odrediti integralne krive koje prolaze kroz tačke* $A(2,2)$ *i* $B(1,-1)$*.*

Rešenje. Primetimo da je data diferencijalna jednačina na intervalu $(0, +\infty)$ ekvivalentna homogenoj diferencijalnoj jednačini $\left(1 + 2\,\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\,\frac{y}{x} - 1\right)\,\mathrm{d}y = 0.$ Uvođenjem smene $z = \frac{y}{x}$, $\mathrm{d}\,y = z\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,z$, dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$\left(1 + 2\,z - z^2\right)\,\mathrm{d}x + \left(z^2 + 2\,z - 1\right)\,(z\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,z) = 0,$$

odnosno jednačinu

$$\left(1 + 2\,z - z^2 + z^3 + 2\,z^2 - z\right)\,\mathrm{d}x + x\,\left(z^2 + 2\,z - 1\right)\,\mathrm{d}\,z = 0,$$

t. j.

$$\left(1 + z + z^2 + z^3\right)\,\mathrm{d}x + x\,\left(z^2 + 2\,z - 1\right)\,\mathrm{d}\,z = 0.$$

Jedno rešenje ove jednačine je $z = -1$. Pod pretpostavkom da je $z \neq -1$ dobijamo diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive $\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{z^2 + 2\,z - 1}{(1+z)\,(1+z^2)}\,\mathrm{d}z = 0$, čije je opšte rešenje

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{z^2 + 2\,z - 1}{(1+z)\,(1+z^2)}\,\mathrm{d}z = C.$$

Rešimo integral $\int \frac{z^2 + 2\,z - 1}{(1+z)\,(1+z^2)}\,\mathrm{d}z$. U pitanju je interal racionalne funkcije. Predstavimo podintegralnu funkciju $\frac{z^2 + 2\,z - 1}{(1+z)\,(1+z^2)}$ kao zbir parcijalnih razlomaka

$$\frac{z^2 + 2\,z - 1}{(1+z)\,(1+z^2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B\,z + C}{z^2+1}.$$

Važi da je $A\,\left(z^2+1\right) + (B\,z + C)\,(z+1) = z^2 + 2\,z - 1$, odnosno

$$(A+B)\,z^2 + (B+C)\,z + A + C = z^2 + 2\,z - 1.$$

Dobijamo sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{array}{rcl} A + B & = & 1 \\ B + C & = & 2 \\ A + C & = & -1 \end{array}$$

čije je rešenje $A = -1$, $B = 2$ i $C = 0$. Prema tome,

$$\int \frac{z^2 + 2\,z - 1}{(1+z)\,(1+z^2)}\,\mathrm{d}z = -\int \frac{\mathrm{d}\,z}{z+1} + \int \frac{2\,z\,\mathrm{d}\,z}{z^2+1} = \ln\left|\frac{z^2+1}{z+1}\right| + const.$$

Imamo dalje da je opšte rešenje diferencijalne jednačine $\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{z^2 + 2\,z - 1}{(1+z)\,(1+z^2)}\,\mathrm{d}z = 0$ dato sa $\ln|x| + \ln\left|\frac{z^2+1}{z+1}\right| = C$, odnosno sa $\frac{x\,\left(z^2+1\right)}{z+1} = \widetilde{C}$. Vraćanjem smene dobijamo opšte rešenje polaznje jednačine $\frac{y^2+x^2}{y+x} = \widetilde{C}$, odnosno $y^2 + x^2 = \widetilde{C}\,(y+x)$. Zamenom $x = y = 2$ u prethodnoj jednačini dobijamo $\widetilde{C} = 2$. Integralna kriva koja prolazi kroz tačku $A(2,2)$ je kružnica $y^2 + x^2 = 2\,(y+x)$ sa centrom u tački $(1,1)$ i poluprečnikom $\sqrt{2}$. Jednačinu $y^2 + x^2 = \widetilde{C}\,(y+x)$, možemo zapisati i u obliku $y + x = \widehat{C}\,(y^2+x^2)$, gde je $\widehat{C} = \frac{1}{\widetilde{C}}$. Za $x = 1$ i $y = -1$ dobijamo da je $\widehat{C} = 0$. Integralna kriva koja prolazi kroz tačku $A(1,-1)$ je prava $y + x = 0$. □

Domaći zadatak 9. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $x(x+2\,y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0;$

(b) $\dfrac{dx}{2\,x^2 - 2\,x\,y + 2\,y^2} = \dfrac{dy}{y^2 - 4\,x\,y};$

(c) $2\,x^2\,dy - (x^2+y^2)\,dx = 0;$

(d) $x^2 + y^2 - 2\,x\,y\,y' = 0;$

(e) $y' = \dfrac{x^3 + 2\,x^2\,y - y^3}{x^3 + x^2\,y}.$

Linearna diferencijalna jednačina I reda

Linearna diferencijalna jednačina I reda je diferencijalna jednačina oblika

$$y'(x) + P(x)\,y(x) = Q(x)$$

gde su funkcije P i Q neprekidne na intervalu (a,b). Do opšteg rešenja diferencijalne jednačine dolazimo množenjem date jednačine sa $e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$

$$y'(x) + P(x)\,y(x) = Q(x) \quad \Big/\, e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

Imamo

$$e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,y'(x) + P(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,y(x) = Q(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x},$$

odnosno

$$\left(e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,y(x)\right)' = Q(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x},$$

tj.

$$e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,y(x) = \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C.$$

Opšte rešenje date jednačine je

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right).$$

Zadatak 10. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y' + 2\,x\,y = 4\,x$.

Rešenje. Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $y(x) = e^{-\int 2\,x\,\mathrm{d}x}\left(\int 4\,x\,e^{\int 2\,x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$. Imamo da je $y(x) = e^{-x^2}\left(\int 4\,x\,e^{x^2}\,\mathrm{d}x + C\right)$, odnosno $y(x) = e^{-x^2}\left(2\,e^{x^2} + C\right)$. Opšte rešenje polazne jednačine je $y(x) = 2 + C\,e^{-x^2}$. $\square$

Domaći zadatak 11. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y' - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,y = \cos x - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\,\sin x$;

(b) $y' + \dfrac{2}{x}\,y = \dfrac{1+3\,x^3}{x^3}$;

(c) $y' + \dfrac{2}{x+1}\,y = (x+1)^3$;

(d) $(x^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$;

(e) $(y\,\sin x - 1)\,dx + \cos x\,dy = 0$.

Zadatak 12. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y' = \frac{1}{x + \cos y + \sin y}.$$

Rešenje. Kako je $y' = \dfrac{1}{x'}$, data diferencijalna jednačina je linearna diferencijalna jednačina po promenljvoj y. Imamo da je $x' = x + \cos y + \sin y$, odnosno $x' - x = \cos y + \sin y$. Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $x(y) = e^{\int \mathrm{d}y}\left(\int (\cos y + \sin y)\,e^{-\int \mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C\right)$. Imamo da je

$$x(y) = e^{y}\left(\int (\cos y + \sin y)\,e^{-y}\,\mathrm{d}y + C\right) = e^{y}\left(\int \cos y\,e^{-y}\,\mathrm{d}y + \int \sin y\,e^{-y}\,\mathrm{d}y + C\right).$$

Primenom metode parcijalne integracije na integral $\int \cos y\,e^{-y}\,\mathrm{d}y$ dobijamo

$$\int \cos y\,e^{-y}\,\mathrm{d}y = \left\{\begin{array}{cc} u = \cos y & \mathrm{d}v = e^{-y}\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}u = -\sin y\,\mathrm{d}y & v = -e^{-y} \end{array}\right\} = -\cos y\,e^{-y} - \int \sin y\,e^{-y}\,\mathrm{d}y.$$

Opšte rešenje polazne jednačine je $x(y) = C\,e^{y} - \cos y$. $\square$

Domaći zadatak 13. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y' = \dfrac{y}{2\,y\,\ln y + y - x}$;

(b) $dx - x\,dy = e^{y}\,dy$;

(c) $x\,dy - 2\,y\,dx = y^3\,\ln y\,dy$;

(d) $(y^2 - 2\,x)\,dy + 2\,y\,dx = 0$;

(e) $(1 + y^2)\,dx = (\sqrt{1+y^2}\,\cos y - x\,y)\,dy = 0$.

Zadatak 14. *Pogodno odabranom smenom odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$3\,x\,y^2\,y' + y^3 = 2\,x,$$

na intervalu $(0, +\infty)$.

Rešenje. Uvođenjem smene $z = y^3$, $z' = 3\,y^2\,y'$ dobijamo jednačinu $x\,z' + z = 2\,x$, koja je na intervalu $(0, +\infty)$ ekvivalentna linearnoj diferencijalnoj jednačini $z' + \frac{z}{x} = 2$. Opšte rešenje date jednačine je $z(x) = e^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}} \left(\int 2\,e^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}\,\mathrm{d}x + C \right)$. Imamo da je $z(x) = e^{-\ln x} \left(\int 2\,e^{\ln x}\,\mathrm{d}x + C \right)$, odnosno $z(x) = \frac{1}{x} \left(\int 2\,x\,\mathrm{d}x + C \right)$. Opšte rešenje polazne jednačine je $y(x) = \sqrt[3]{x + \frac{C}{x}}$. □

Domaći zadatak 15. *Pogodno odabranom smenom odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $(2\,x + 1)\,y' + 4\,e^{-y} + 2 = 0$;

(b) $y' - 1 = e^{x+2\,y}$;

(c) $y'\,\sin y + x\,\cos y + x = 0$;

(d) $(x^2 - 1)\,y'\,\sin y + 2\,x\,\cos y = 2\,x - 2\,x^3$;

(e) $y' + \mathrm{tg}\,y = \frac{x}{\cos y}$.

BERNOULLLIjeva diferencijalna jednačina

BERNOULLLI*jeva diferencijalna jednačina* je diferencijalna jednačina oblika

$$y'(x) + P(x)\,y(x) = Q(x)\,y^{\alpha}(x)$$

gde su funkcije P i Q neprekidne na intervalu (a, b), $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Ako je $\alpha = 0$ onda je $y'(x) + P(x)\,y(x) = Q(x)$ linearna diferencijalna jednačina.
- Ako je $\alpha = 1$ onda je $y'(x) + P(x)\,y(x) = Q(x)\,y(x)$, tj. $y'(x) + (P(x) - Q(x))\,y(x) = 0$ diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive.

- Ako je $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ onda deljenjem sa $y^{\alpha}(x)$ jednačinu svodimo na

$$y^{-\alpha}(x)\, y'(x) + P(x)\, y^{1-\alpha}(x) = Q(x),$$

koja se uvođenjem smene $z = z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, $z'(x) = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}(x)\, y'(x)$, svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z'(x) + (1-\alpha)P(x)\, z(x) = (1-\alpha)Q(x).$$

Zadatak 16. *Rešiti diferencijalnu jednačinu* $y' + \dfrac{x}{1-x^2}\, y = x\sqrt{y}$ *na intervalu* $(-1,1)$.

Rešenje. U pitanju je Bernulijeva diferencijalna jednačina. Deljenjem sa $2\sqrt{y}$ dobijamo jednačinu $\dfrac{y'}{2\sqrt{y}} + \dfrac{x}{2\,(1-x^2)}\sqrt{y} = \dfrac{x}{2}$, koja se smenom $z = \sqrt{y}$, $z' = \dfrac{y'}{2\sqrt{y}}$, svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu $z' + \dfrac{x}{2\,(1-x^2)} z = \dfrac{x}{2}$, čije je rešenje

$$z(x) = e^{-\int \frac{x\, \mathrm{d}x}{2(1-x^2)}} \left(\int \frac{x}{2}\, e^{\frac{x\, \mathrm{d}x}{2(1-x^2)}}\, \mathrm{d}x + C \right).$$

Imamo da je

$$z(x) = e^{-\frac{1}{4}\ln\left(1-x^2\right)} \left(\int \frac{x}{2}\, e^{\frac{1}{4}\ln\left(1-x^2\right)}\, \mathrm{d}x + C \right),$$

odnosno

$$z(x) = \sqrt[4]{1-x^2} \left(\int \frac{x\, \mathrm{d}x}{2\sqrt[4]{1-x^2}} + C \right) = \sqrt[4]{1-x^2} \left(-\frac{1}{3}\sqrt[4]{(1-x^2)^3} + C \right).$$

Vraćanjem smene dobijamo rešenje Bernulijeve jednačine $y(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{3} + C\sqrt[4]{1-x^2} \right)^2$.

□

Domaći zadatak 17. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y' = x^3\, y^2 + x\, y$;

(b) $y' - x\, y = -y^3\, e^{-x^2}$;

(c) $x\, y' + y = y^3 \ln x$, *na intervalu* $(0, +\infty)$;

(d) $x\, dx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$;

(e) $y'(x\, y - y^3\, x^4) = 1$.

RICCATIjeva diferencijalna jednačina

RICCATI*jeva diferencijalna jednačina* je diferencijalna jednačina oblika

$$y'(x) = P(x)\,y^2(x) + Q(x)\,y(x) + R(x),$$

gde su P,Q i R neprekidne funkcije na intervalu (a, b). U opštem slučaju RICCATIjeva diferencijalna jednačina se ne može rešiti pomoću konačnog broja integracija, tj. jednačina nema rešenje pomoću kvadratura. RICCATIjeva diferencijalna jednačina se uvek može rešiti ako je poznato njeno proizvoljno partikularno rešenje. Ako je poznato jedno partikularno rešenje $y_1 = y_1(x)$ polazne RICCATIjeve jednačine, onda se smenom $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ dobija linearna diferencijalna jednačina. Kako je y_1 partikularno rešenje polazne jednačine, važi

$$y_1'(x) = P(x)\,y_1^2(x) + Q(x)y_1(x) + R(x).$$

Uvođenjem smene $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ dobijamo

$$y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} = P(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{z(x)}\right)^2 + Q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{z(x)}\right) + R(x),$$

odnosno

$$y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} = P(x)\left(y_1^2(x) + 2y_1(x)\frac{1}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right) + Q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{z(x)}\right) + R(x).$$

Kako je y_1 partikularno rešenje dobijamo

$$-\frac{z'(x)}{z^2(x)} = P(x)\left(2y_1(x)\frac{1}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right) + Q(x)\frac{1}{z(x)},$$

tj.

$$z'(x) = -2P(x)y_1(x)z(x) - P(x) - Q(x)z(x),$$

odnosno linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z'(x) + (2P(x)y_1(x) + Q(x))z(x) = -P(x).$$

Zadatak 18. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = y^2 - x\,y + 1$, ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika $y_1 = a\,x + b$.*

Rešenje. Odredimo realne parametre a i b tako da $y_1 = a\,x + b$ bude partikularno rešenje date diferencijalne jednačine. Zamenom $y_1 = a\,x + b$ i $y_1' = a$ u jednačinu dobijamo identitet. Imamo da je $a = (a\,x+b)^2 - x\,(a\,x+b)+1$, tj. $a = (a^2-a)\,x^2+(2\,a\,b-\,b)\,x+b^2+1$. Odakle dobijamo sistem

$$\begin{aligned} a^2 - a &= 0 \\ 2\,a\,b - b &= 0 \\ b^2 + 1 &= a. \end{aligned}$$

Rešenje sistema je $a = 1$ i $b = 0$. Jedno partikularno rešenje je $y_1(x) = x$.

Dalje, uvodimo smenu $y = y_1 + \dfrac{1}{z} = x + \dfrac{1}{z}$, $y' = y_1' - \dfrac{z'}{z^2} = 1 - \dfrac{z'}{z^2}$. Dobijamo da je

$$1 - \frac{z'}{z^2} = \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - x\left(x + \frac{1}{z}\right) + 1,$$

odnosno $1 - \dfrac{z'}{z^2} = x^2 + \dfrac{2\,x}{z} + \dfrac{1}{z^2} - x^2 - \dfrac{x}{z} + 1$, tj. $-\dfrac{z'}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{x}{z}$. Množenjem prethodne jednačine sa $-z^2$ prethodna jednačina postaje linearna diferencijalna jednačina

$$z' + x\,z = -1,$$

čije je opšte rešenje $z(x) = e^{-\int x\,\mathrm{d}x}\left(-\int e^{\int x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(-\int e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + C\right)$ Vraćanjem smene dobijamo opšte rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine

$$y(x) = x + \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{-\int e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x + C}.$$

□

Domaći zadatak 19. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y' + y^2 - 2\,x\,y + x^2 - 5 = 0$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika* $y_1 = a\,x + b$;

(b) $y' = 4\,x^2 + 4\,x\,y + y^2 - 6$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika* $y_1 = a\,x + b$;

(c) $y' = y^2 + 2\,y - 9\,e^{4\,x}$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika* $y_1 = a\,e^{2\,x}$;

(d) $y' + y^2 \sin x = \dfrac{2\,\sin x}{\cos^2 x}$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje* $y_1 = \dfrac{1}{\cos x}$;

(e) $y' = \dfrac{1}{1 - x^3}\,y^2 - \dfrac{x^2}{1 - x^3}\,y - \dfrac{2\,x}{1 - x^3}$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika* $y_1 = a\,x^2$.

Linearne diferencijalne jednačine višeg reda

Linerana diferencijalna jednačina II reda

LIOUVILLE*ova formula:* Ako je y_1 netrivijalno partikularno rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine II reda

$$y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_2(x)y(x) = 0,$$

onda je

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int f_1(x)\, dx}\, dx$$

takođe partikularno rešenje date jednačine linearno nezavisno od y_1.

Ako su y_1 i y_2 linearno nezavisna rešenja diferencijalne jednačine

$$y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_2(x)y(x) = 0,$$

onda je $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ njeno opšte rešenje.

Zadatak 20. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$(2\,x^2 + x)\, y'' + 2\,(x+1)\, y' - 2\,y = 0,$$

ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika $y = a\,x^2 + b\,x + c$.

Rešenje. Za funkciju $y_1(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ važi $y_1'(x) = 2\,a\,x + b$ i $y_1''(x) = 2\,a$. Zamenom funkcije y_1 i njenih izvoda u datu diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$2\,a\,(2\,x^2 + x) + 2\,(x+1)\,(2\,a\,x + b) - 2\,\left(a\,x^2 + b\,x + c\right) = 0,$$

odnosno

$$4\,a\,x^2 + 2\,a\,x + 4\,a\,x^2 + 4\,a\,x + 2\,b\,x + 2\,b - 2\,a\,x^2 - 2\,b\,x - 2\,c = 0,$$

tj.,

$$6\,a\,x^2 + 6\,a\,x + 4\,a + 2\,b - 2\,c = 0,$$

odakle sledi da je $a = 0$ i $b = c$. Za $b = c = 1$ dobijamo jedno partikularno rešenje $y_1(x) = x + 1$. Drugo linearno nezavisno rešenje dobijamo primenom Liouvilleove formule na jednačinu $y'' + \dfrac{2\,(x+1)}{2\,x^2 + x}\, y' - \dfrac{2}{2\,x^2 + x}\, y = 0$. Imamo

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e^{-\int \frac{2\,(x+1)}{2\,x^2 + x}\, d\,x}\, d\,x = (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e^{-2\int \frac{x+1}{x\,(2\,x+1)}\, d\,x}\, d\,x \\
&= (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e^{-2\int \frac{2x+1-x}{x\,(2\,x+1)}\, d\,x}\, d\,x = (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e^{-2\int \frac{d\,x}{x} + \int \frac{2\,d\,x}{2\,x+1}\, d\,x} \\
&= (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e^{\ln \frac{2\,x+1}{x^2}}\, d\,x = (x+1) \int \frac{2\,x+1}{x^2\,(x+1)^2} d\,x \\
&= (x+1) \int \frac{x^2 + 2\,x + 1 - x^2}{x^2\,(x+1)^2} d\,x = (x+1) \int \left(\frac{d\,x}{x^2} - \int \frac{d\,x}{(x+1)^2} \right) \\
&= (x+1) \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \right) = 1 - \frac{x+1}{x} = \frac{x - x - 1}{x} = -\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Opšte rešenje date jednačine je $y(x) = C_1\, y_1(x) - C_2\, y_2(x) = C_1\,(x+1) + C_2\, \dfrac{1}{x}$. □

Domaći zadatak 21. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $x^2(\ln x - 1)\,y'' - x\,y' + y = 0$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika* $y_1 = a\,x + b$;

(b) $(x^2+1)\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = 0$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika* $y_1 = a\,x^2 + b\,x + c$;

(c) $(x^2+3\,x)\,y'' - (2\,x+3)\,y' + 2\,y = 0$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika* $y_1 = a\,x + b$;

(d) $x\,y'' + (2x\,\ln x + 1)\,y' + (x\,\ln^2 x + \ln x + 1)\,y = 0$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje* $y_1 = \left(\dfrac{e}{x}\right)^x$;

(e) $x^4\,y'' + 2\,x^3\,y' + y = 0$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje* $y_1 = \cos\dfrac{1}{x}$.

Metoda varijacije konstanata: Neka su $y_1,\ y_2,\ \ldots\ ,\ y_n$ linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = 0.$$

Tada je opšte rešenje nehomogene jednačine

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = F(x)$$

dato sa

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ funkcije čije izvode nalazimo rešavanjem sistema jednačina:

$$\begin{aligned}
C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) &= 0\\
C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) &= 0\\
&\vdots\\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= F(x).
\end{aligned}$$

Zadatak 22. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$(1-x)\,y'' + x\,y' - y = (x-1)^2\,e^x,$$

ako se zna da je jedno partikularno rešenje odgovarajuće homogene jednačine oblika $y_1 = a\,x + b$.

Rešenje. Za funkciju $y_1(x) = a\,x + b$ važi $y_1'(x) = a$ i $y_1''(x) = 0$. Zamenom funkcije y_1 i njenih izvoda u odgovarajuću homogenu diferencijalnu jednačinu $(1-x)\,y'' + x\,y' - y = 0$ dobijamo $a\,x - (a\,x + b) = 0$, odakle sledi da je $b = 0$ i za $a = 1$ dobijamo jedno partikularno rešenje $y_1(x) = x$. Drugo linearno nezavisno rešenje dobijalmo primenom LIOUVILLEove formule na jednačinu $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = 0$. Imamo

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= x \int \frac{1}{x^2}\, e^{\int \frac{x}{x-1}\,\mathrm{d}\,x}\,\mathrm{d}\,x = x \int \frac{e^{x+\ln|x-1|}}{x^2}\,\mathrm{d}\,x = x \int \frac{x-1}{x^2}\, e^x\,\mathrm{d}\,x \\
&= x\left(\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}\,x - \int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x\right) = \left\{\begin{matrix} u = \frac{1}{x}, & \mathrm{d}\,v = e^x\,\mathrm{d}\,x, \\ \mathrm{d}\,u = -\frac{\mathrm{d}\,x}{x}, & v = e^x \end{matrix}\right\} \\
&= x\left(\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x - \int \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}\,x\right) = e^x.
\end{aligned}
$$

Opšte rešenje homogene jednačine je

$$y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) = C_1\,x + C_2\,e^x.$$

Odredimo sada rešenje nehomogene jednačine $y'' - \dfrac{x}{x-1}y' + \dfrac{1}{x-1}y = (1-x)\,e^x$ korišćenjem metode neodređenih koeficijenata. Rešavamo sistem

$$
\begin{aligned}
C_1'(x)\,x + C_2'(x)\,e^x &= 0 \\
C_1'(x) + C_2'(x)\,e^x &= (1-x)\,e^x.
\end{aligned}
$$

Dobijamo da je $C_1'(x) = e^x$ i $C_2'(x) = -x$. Sledi da je $C_1(x) = \int e^x\,\mathrm{d}\,x = e^x + D_1$ i $C_2(x) = \displaystyle\int -x\,\mathrm{d}\,x = -\frac{x^2}{2} + D_2$. Opšte rešenje nehomogene jednačine je $y(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) = D_1\,x + D_2\,e^x + x\,e^x - \dfrac{x^2}{2}\,e^x$. □

Domaći zadatak 23. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $x^2\,(\ln x - 1)\,y'' - x\,y' + y = \dfrac{(1-\ln x)^2}{x}$, *ako se zna da je jedno partikularno rešenje odgovarajuće homogene jednačine oblika* $y_1 = a\,x + b$;

(b) $(x^2+1)\,y'' - 2\,x\,y' + 2\,y = x^2 + 1$, *ako se zna da je jedno partikularno rešenje odgovarajuće homogene jednačine oblika* $y_1 = a\,x^2 + b\,x + c$;

(c) $x\,(x+1)\,y'' + (x+2)\,y' - y = x + \dfrac{1}{x}$, *ako se zna da je jedno partikularno rešenje odgovarajuće homogene jednačine oblika* $y_1 = a\,x + b$;

(d) $(x^3+1)\,y'' - 3\,x^2\,y' + 3\,x\,y = 4\,(x^3+1)^2$, *ako se zna da je jedno partikularno rešenje odgovarajuće homogene jednačine oblika* $y_1 = a\,x + b$;

(e) $(1+x)\,y'' + x\,y' - y = (1+x)^2\,e^x$, *ako se zna da je jedno partikularno rešenje odgovarajuće homogene jednačine oblika* $y_1 = e^{a\,x}$.

Linearne diferencijalne jednačine višeg reda sa konstantnim koeficijentima

Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima je diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + a_1\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}\, y'(x) + a_n\, y(x) = 0,$$

gde su a_1, a_2, ... , a_n konstante.
Potražimo rešenje date jednačine u obliku $y(x) = e^{\lambda x}$. Kako je $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$ zamenom u datu jednačinu dobijamo algebarsku jednačinu

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

koju nazivamo karakterističnom jednačinom, koja je pridružena polaznoj diferencijalnoj jednačini. Svakom korenu karakteristične jednačine odgovara jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine. Tako dobijena partikularna rešenja čine skup linearno nezavisnih funkcija (fundamentalni skup rešenja).

- Ako je λ prost realan koren karakteristične jednačine, onda je odgovarajuće partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y_p(x) = e^{\lambda x}$.
- Ako je λ realan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, onda su odgovarajuća partikularna rešenje diferencijalne jednačine $y_{p_1}(x) = e^{\lambda x}$, $y_{p_2}(x) = x\, e^{\lambda x}$, ... , $y_{p_k}(x) = x^{k-1}\, e^{\lambda x}$.
- Ako je $\lambda = \alpha + i\,\beta$ prost kompleksan koren karakteristične jednačine, onda je i $\bar{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ prost kompleksan koren karakteristične jednačine, a odgovarajuća partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1}(x) = e^{\alpha\, x} \cos(\beta\, x)$ i $y_{p_2}(x) = e^{\alpha\, x} \sin(\beta\, x)$.
- Ako je $\lambda = \alpha + i\,\beta$ kompleksan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, onda je i $\bar{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ kompleksan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, a odgovarajuća partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1}(x) = e^{\alpha\, x}\, \cos(\beta\, x), y_{p_2}(x) = x\, e^{\alpha\, x}\, \cos(\beta\, x), \ldots, y_{p_k}(x) = x^{k-1}\, e^{\alpha\, x}\, \cos(\beta\, x), y_{p_{k+1}}(x) = e^{\alpha\, x}\, \sin(\beta\, x), y_{p_{k+2}}(x) = x\, e^{\alpha\, x} \sin(\beta\, x), \ldots, y_{p_{2k}}(x) = x^{k-1}\, e^{\alpha\, x}\, \sin(\beta\, x)$.

Zadatak 24. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y'' - y = 0$;

(b) $y''' - 5\, y'' + 8\, y' - 4\, y = 0$;

(c) $y^{(5)} + y^{(4)} + 2\, y''' + 2\, y'' + y' + y = 0$.

Rešenje.

(a) Pridružena karakteristična jednačina je $\lambda^2 - 1 = 0$. Koreni date jednačine su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1}(x) = e^x$ i $y_{p_2}(x) = e^{-x}$. Opšte rešenje date jednačine je $y(x) = C_1\, y_{p_1}(x) + C_2\, y_{p_2}(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-x}$.

(b) Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je $\lambda^3 - 5\,\lambda^2 + 8\,\lambda - 4 = 0$. Prema teoremi o racionalnim nulama polinoma konkurenti za racionalne korene date jednačine su elementi skupa $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Direktnom proverom uočavamo da je jedan koren ove jednačine $\lambda_1 = 1$. Koristeći Hornerovu šemu

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -5 & 8 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

dobijamo da su druga dva korena koreni jednačine $\lambda^2 - 4\,\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$. Data jednačina ima jedan realan koren reda dva, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Partikularna rešenja polazne jednačine su $y_{p_1}(x) = e^x$, $y_{p_2}(x) = e^{2x}$ i $y_{p_3}(x) = x\,e^{2x}$. Opšte rešenje je

$$y(x) = C_1\,y_{p_1}(x) + C_2\,y_{p_2}(x) + C_3\,y_{p_3}(x) = C_1\,e^x + C_2\,e^{2x} + C_3\,x\,e^{2x}.$$

(c) U ovom primeru karakteristična jednačina je

$$\begin{aligned} \lambda^5 + \lambda^4 + 2\,\lambda^3 + 2\,\lambda^2 + \lambda + 1 &= \lambda^4(\lambda+1) + 2\,\lambda^2(\lambda+1) + \lambda + 1 \quad = \\ (\lambda+1)(\lambda^4 + 2\,\lambda^2 + 1) &= (\lambda+1)\left(\lambda^2+1\right)^2 \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Navedena jednačina ima jedan prost koren $\lambda_1 = -1$ i dva korena reda dva $\lambda_2 = \lambda_3 = i$ i $\lambda_4 = \lambda_5 = -i$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1}(x) = e^x$, $y_{p_2}(x) = \cos x$, $y_{p_3}(x) = x\,\cos x$, $y_{p_4}(x) = \sin x$ i $y_{p_5}(x) = x\,\sin x$. Opšte rešenje diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\,y_{p_1}(x) + C_2\,y_{p_2}(x) + C_3\,y_{p_3}(x) + C_4\,y_{p_4}(x) + C_5\,y_{p_5}(x) \\ &= C_1\,e^x + C_2\,\cos x + C_3\,x\,\cos x + C_4\,\sin x + C_5\,x\,\sin x. \end{aligned}$$

□

Domaći zadatak 25. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y''' - 5\,y'' + 6\,y' = 0$;

(b) $y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y = 0$;

(c) $y^{(4)} + 2\,y'' + y = 0$.

Zadatak 26. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Rešenje. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je $y_h(x) = C_1\,e^x + C_2\,e^{-x}$. Primenimo metodu varijacije konstanata. Rešavamo sistem

$$\begin{aligned} C_1'(x)\,e^x + C_2'(x)\,e^{-x} &= 0 \\ C_1'(x)\,e^x - C_2'(x)\,e^{-x} &= 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Imamo da je $C_1'(x) = \left(2\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\,x\,\sqrt{x}}\right)\, e^{-x}$ i $C_2'(x) = -\left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2\,x\,\sqrt{x}}\right)\, e^{x}$. Važi da je

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{2\,x\,\sqrt{x}}\right)\, e^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \int 2\sqrt{x}\, e^{-x}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{e^{-x}}{2\,x\,\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left\{\begin{array}{ll} u = 2\sqrt{x}, & \mathrm{d}\,v = e^{-x}\,\mathrm{d}\,x, \\ \mathrm{d}\,u = \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}}, & v = -e^{-x} \end{array}\right\} = -2\sqrt{x}\, e^{-x} + \int \frac{e^{-x}\,\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}} + \int \frac{e^{-x}}{2\,x\,\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \left\{\begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \mathrm{d}\,v = e^{-x}\,\mathrm{d}\,x, \\ \mathrm{d}\,u = -\dfrac{\mathrm{d}\,x}{2\,x\,\sqrt{x}}, & v = -e^{-x} \end{array}\right\} \\
&= -2\sqrt{x}\, e^{-x} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} - \int \frac{e^{-x}}{2\,x\,\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x + \int \frac{e^{-x}}{2\,x\,\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = -2\sqrt{x}\, e^{-x} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + D_1.
\end{aligned}$$

Sličnim izračunavanjem dobijamo da je $C_2(x) = -2\sqrt{x}\, e^{x} + \dfrac{e^{x}}{\sqrt{x}} + D_2$. Opšte rešenje nehomogene jednačine je

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1(x)\, y_{p_1}(x) + C_2(x)\, y_{p_2}(x) \\
&= \left(-2\sqrt{x}\, e^{-x} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + D_1\right)\, e^{x} + \left(-2\sqrt{x}\, e^{x} + \frac{e^{x}}{\sqrt{x}} + D_1\right)\, e^{-x} \\
&= D_1\, e^{x} + D_2\, e^{-x} - 4\sqrt{x}.
\end{aligned}$$

□

Domaći zadatak 27. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y'' - y = \dfrac{e^{x}}{e^{x} + 1}$;

(b) $y'' - 2\,y' + y = \dfrac{x^2 + 2\,x + 2}{x^3}$;

(c) $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^3}\, e^{x}$;

(d) $y'' - 5\,y' + 6\,y = \dfrac{6\,x^2 + 17\,x + 13}{(x+1)^3}$;

(e) $y'' + 4\,y = \dfrac{1}{\cos(2\,x)}$.

Metoda neodređenih koeficijenata:

Neka je data linearna nehomogena diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantim koeficijentima $y^{(n)}(x) + a_1\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}\, y'(x) + a_n\, y(x) = F(x)$, gde je nehomogeni deo F oblika $F(x) = e^{\alpha\, x}\,(P_1(x)\,\cos(\beta\, x) + P_2(x)\,\sin(\beta\, x))$. Partikularno rešenje y_p date jednačine je oblika:

- $y_p(x) = e^{\alpha x}\,(Q_1(x)\,\cos(\beta x) + Q_2(x)\,\sin(\beta x))$, ako $\alpha + i\,\beta$ nije koren karakteristične jednačine;
- $y_p(x) = x^k\,e^{\alpha x}\,(Q_1(x)\,\cos(\beta x) + Q_2(x)\,\sin(\beta x))$, ako je $\alpha + i\,\beta$ koren karakteristične jednačine reda $k, k \geq 1$;

gde je $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.

Ako je nehomogeni deo F oblika $F(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_k(x)$, za $F_i(x) = e^{\alpha_i x}\,(P_{i_1}(x)\,\cos(\beta_i\,x) + P_{i_2}(x)\,\sin(\beta_i\,x))$, onda partikularno rešenje polazne jednačine dobijamo kao zbir partikularnih rešenja jednačina

$$y^{(n)}(x) + a_1\,y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}\,y'(x) + a_n\,y(x) = F_i(x),$$

$1 \leq i \leq k$.

Zadatak 28. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y''' - 3\,y'' + 4\,y' - 2\,y = e^x + \cos x.$$

Rešenje.
I korak
Karakteristična jednačina homogene diferencijalne jednačine $y''' - 3\,y'' + 4\,y' - 2\,y = 0$ je $\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 4\,\lambda - 2 = 0$. Prema teoremi o racionalnim nulama polinoma konkurenti za racionalne korene date jednačine su elementi skupa $\{\pm 1, \pm 2\}$. Direktnom proverom uočavamo da je jedan koren ove jednačine $\lambda_1 = 1$. Koristeći Hornerovu šemu

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

dobijamo da su druga dva korena koreni jednačine $\lambda^2 - 2\,\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1 = 0$. Data jednačina ima konjugovano kompleksne korene $\lambda_2 = 1 + i$ i $\lambda_3 = 1 - i$. Partikularna rešenja polazne jednačine su $y_{p_1}(x) = e^x$, $y_{p_2}(x) = e^x\,\cos x$ i $y_{p_3}(x) = e^x\,\sin x$. Opšte rešenje je $y(x) = C_1\,y_{p_1}(x) + C_2\,y_{p_2}(x) + C_3\,y_{p_3}(x) = C_1\,e^x + C_2\,e^x\,\cos x + C_3\,e^x\,\sin x$.

II korak
Razmotrimo sada nehomogenu diferencijalnu jednačinu $y''' - 3\,y'' + 4\,y' - 2\,y = e^x$. Ispitujemo da li je $\lambda = 1$ koren pridružene karakteristične jednačine $\lambda^3 - 3\,\lambda^2 + 4\,\lambda - 2 = 0$. Pošto je $\lambda = 1$ prost koren karakteristične jednačine partikularno rešenje tražimo u obliku $y_1(x) = A\,x\,e^x$. Važi da je $y_1(x) = A\,x\,e^x$, $y_1'(x) = A\,(1 + x)\,e^x$, $y_1''(x) = A\,(2 + x)\,e^x$ i $y_1'''(x) = A\,(3 + x)\,e^x$. Zamenom funkcije y_1 i njenih izvoda u jednačinu $y''' - 3\,y'' + 4\,y' - 2\,y = e^x$ dobijamo $A\,(3+x)\,e^x - 3\,A\,(2+x)\,e^x + 4\,A\,(1+x)\,e^x - 2\,A\,x\,e^x = e^x$, tj. $A = 1$ i $y_1(x) = x\,e^x$.

III korak
Nadalje, rešavamo diferencijalnu jednačinu $y''' - 3\,y'' + 4\,y' - 2\,y = \cos x$. Kako $\lambda = i$ nije rešenje karakteristične jednačine imamo da je partikularno rešenje prve jednačine oblika $y_2(x) = B\,\cos x + C\,\sin x$. Odgovarajući izvodi su $y_2'(x) = -B\,\sin x + C\,\cos x$,

$y_2''(x) = -B\cos x - C\sin x$ i $y_2'''(x) = B\sin x - C\cos x$. Zamenom u diferencijalnu jednačinu $y''' - 3\,y'' + 4\,y' - 2\,y = \cos x$ dobijamo

$$B\sin x - C\cos x - 3(-B\cos x - C\sin x) + 4(-B\sin x + C\cos x) - 2(B\cos x + C\sin x) = \cos x$$

tj. $(-3\,B + C)\sin x + (B + 3\,C)\cos x = \cos x$. Za konstante B i C važi $-3\,B + C = 0$ i $B + 3\,C = 1$, tj. $B = \dfrac{1}{10}$ i $C = \dfrac{3}{10}$, a za partikularno rešenje y_2 imamo $y_2(x) = \dfrac{1}{10}\cos x + \dfrac{3}{10}\sin x$. Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_1(x) + y_2(x) = C_1\,e^x + C_2\,e^x\cos x + C_3\,e^x\sin x + x\,e^x + \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\sin x.$$

□

Zadatak 29. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y''' - y'' - y' + y = 3\,x + (24\,x - 4)\,e^x.$$

Rešenje.
I korak
Karakteristična jednačina homogene diferencijalne jednačine $y''' - y'' - y' + y = 0$ je $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$. Navedena jednačina ima jedan prost koren $\lambda_1 = -1$ i jedan koren reda dva $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1}(x) = e^{-x}$, $y_{p_2}(x) = e^x$ i $y_{p_3}(x) = x\,e^x$. Opšte rešenje diferencijalne jednačine je $y(x) = C_1\,y_{p_1}(x) + C_2\,y_{p_2}(x) + C_3\,y_{p_3}(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^x + C_3\,x\,e^x$.

II korak
Razmotrimo sada nehomogenu diferencijalnu jednačinu $y''' - y'' - y' + y = 3\,x$. Ispitujemo da li je $\lambda = 0$ koren pridružene karakteristične jednačine $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Pošto nije, partikularno rešenje tražimo u obliku $y_1(x) = A\,x + B$. Važi da je $y_1'(x) = A$, $y_1''(x) = 0$ i $y_1'''(x) = 0$. Zamenom funkcije y_1 i njenih izvoda u jednačinu $y''' - y'' - y' + y = 3\,x$ dobijamo $-A + A\,x + B = 3\,x$, tj. $A = B = 3$ i $y_1(x) = 3\,x + 3$.

III korak
Nadalje, rešavamo diferencijalnu jednačinu $y''' - y'' - y' + y = (24\,x - 4)\,e^x$. Ispitujemo da li je $\lambda = 1$ koren pridružene karakteristične jednačine $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Pošto je $\lambda = 1$ koren reda dva karakteristične jednačine partikularno rešenje tražimo u obliku $y_1(x) = x^2\,(A\,x + B)\,e^x$. Važi da je $y_2(x) = \left(A\,x^3 + B\,x^2\right)\,e^x$,

$$y_2'(x) = \left(A\,x^3 + (3\,A + B)\,x^2 + 2\,B\,x\right)\,e^x,$$

$$y_2''(x) = \left(A\,x^3 + (6\,A + B)\,x^2 + (6\,A + 4\,B)\,x + 2\,B\right)\,e^x \text{ i}$$
$$y_2'''(x) = \left(A\,x^3 + (9\,A + B)\,x^2 + (18\,A + 6\,B)\,x + 6\,A + 6\,B\right)\,e^x.$$

Zamenom funkcije y_2 i njenih izvoda u jednačinu $y''' - y'' - y' + y = (24\,x - 4)\,e^x$ dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left(A\,x^3 + (9\,A + B)\,x^2 + (18\,A + 6\,B)\,x + 6\,A + 6\,B\right)\,e^x\\
-&\left(A\,x^3 + (6\,A + B)\,x^2 + (6\,A + 4\,B)\,x + 2\,B\right)\,e^x\\
-&\left(A\,x^3 + (3\,A + B)\,x^2 + 2\,B\,x\right)\,e^x\\
+&\left(A\,x^3 + B\,x^2\right)\,e^x = (24\,x - 4)\,e^x,
\end{aligned}$$

tj. $12\,A\,x + 6\,A + 4\,B = 24\,x - 4$. Zaključujemo da je $A = 2$ i $B = -4$. Partikluarno rešenje je $y_1(x) = x^2\,(2\,x - 4)\,e^x$. Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y(x) = y_h(x) + y_1(x) + y_2(x) = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^x + C_3\,x\,e^x + 3\,x + 3 + x^2\,(2\,x - 4)\,e^x.$$

□

Domaći zadatak 30. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y'' + y' - 2\,y = 3\,e^x + 8^{\,2\,x}$;

(b) $y'' - 2\,y' + y = 2\,x\,e^x + 5$;

(c) $y''' - 3\,y'' + 4\,y' - 2\,y = e^x + x^2$;

(d) $y'' - y = 2\,\sin x - 4\,\cos x$;

(e) $y'' + 4\,y = \cos^2 x$.

Zadatak 31. *U zavisnosti od vrednosti realnog parametra a odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$y'' - a^2\,y = e^x.$$

Rešenje.
I korak
Rešavamo odgovarajuću homogenu diferencijalnu jednačinu $y'' - a^2\,y = 0$. Karakteristična jednačina date jednačine je $\lambda^2 - a^2 = 0$. Koreni ove jednačine su $\lambda_1 = a$ i $\lambda_2 = -a$. Ako je $a \neq 0$ koreni su realni i različiti, pa je opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $y_h(x) = C_1\,e^{a\,x} + C_2\,e^{-a\,x}$. Ako je $a = 0$ jednačina ima realni koren reda dva, pa je opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $y_h(x) = C_1 + C_2\,x$.

II korak
Rešavamo nehomogenu diferencijalnu jednačinu $y'' - a^2\,y = e^x$ metodom neodređenih koeficijenata.

Ako je $a \neq \pm 1$, onda $\lambda = 1$ nije koren karakteristične jednačine, pa je partikularno rešenje y_p nehomogene diferencijalne jednačine oblika $y_p(x) = A\,e^x$. Imamo da je $y_p'(x) = A\,e^x$ i $y_p''(x) = A\,e^x$. Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo $A\,e^x - a^2\,A\,e^x = e^x$, odakle sledi da je $A = \dfrac{1}{1 - a^2}$ i $y_p(x) = \dfrac{e^x}{1 - a^2}$.

Ako je $a = 1$ *ili* $a = -1$, polazna jednačina je oblika $y'' - y = e^x$. Pa je $\lambda = 1$ prost realan koren karakteristične jednačine. Odnosno partikularno rešenje y_p nehomogene diferencijalne jednačine je oblika $y_p(x) = A\,x\,e^x$. Imamo da je u ovom slučaju $y_p'(x) = A\,(1+x)\,e^x$ i $y_p''(x) = A\,(2+x)\,e^x$. Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo

$$A\,(2+x)\,e^x - A\,x\,e^x = e^x,$$

odakle sledi da je $A = \dfrac{1}{2}$ i $y_p(x) = \dfrac{1}{2}\,x\,e^x$.

Zaključujemo, da je opšte rešenje diferencijalne jednačine dato sa

$$y = \begin{cases} C_1 + C_2\,x + e^x, & a = 0, \\ C_1\,e^x + C_2\,e^{-x} + \dfrac{1}{2}\,x\,e^x, & a = 1 \vee a = -1, \\ C_1\,e^{a\,x} + C_2\,e^{-a\,x} + \dfrac{e^x}{1-a^2}, & a \neq \pm 1 \wedge a \neq 0. \end{cases}$$

□

Domaći zadatak 32. *U zavisnosti od vrednosti realnog parametra a odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

(a) $y'' - (1+a)\,y' + a\,y = \mathrm{ch}\,x$;

(b) $y'' + a\,y = e^{-x}$;

(c) $y'' + (2\,a+1)\,y' + a\,(a+1)\,y = e^{-x} + x + 1$;

(d) $y'' + 2\,(1-a)\,y' + (1-2\,a)\,y = 2\,e^{-x}$;

(e) $y''' - y'' - a^2\,y' + a^2\,y = 3$.

Literatura

Zadaci su preuzeti iz knjige *Matematička analiza, teorija i hiljadu zadataka, za studente tehnike*, autora Milana Merklea.