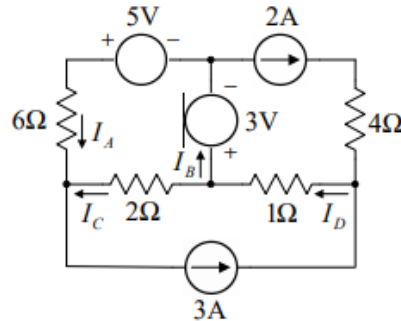


Jul 2020

1. a) [11] Primenom **metode potencijala čvorova** izračunati potencijale svih čvorova u kolu sa slike.

b) [9] Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke izračunati struje I_A , I_B , I_C i I_D . Za svaki od generatora u kolu izračunati snagu koju **predaje**, kao i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 2Ω .



$$a) V_1 \left(\frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right) - \frac{1}{2\Omega} \cdot V_2 = \frac{5V}{6\Omega} - 3A / 6\Omega$$

$$V_2 = 3V$$

$$V_3 \left(\frac{1}{1\Omega} \right) - \frac{1}{1\Omega} \cdot V_2 = 3A + 2A$$

$$4V_1 - 3V_2 = 5V - 18V$$

$$V_2 = 3V$$

$$V_3 = V_2 = 5V$$

$$4V_1 = -13V + 9V$$

$$V_2 = 3V$$

$$V_3 = 8V$$

$$4V_1 = -4V$$

$$V_2 = 3V$$

$$V_3 = 8V$$

$$V_1 = -1V$$

$$V_2 = 3V$$

$$V_3 = 8V$$

$$b) I_A = \frac{0 + 5V + 1V}{6\Omega} = 1A$$

$$I_B = I_D - I_C = I_A + 2A = 3A$$

$$I_C + I_A = 3A \Rightarrow I_C = 3A - I_A = 2A$$

$$I_D = I_B + I_C = 3A + 2A = 5A$$

$$U_{2A} = 8V + 4\Omega \cdot 2A = 16V$$

$$P_{2A} = I_{2A} \cdot U_{2A} = 2A \cdot 16V = 32W$$

$$P_{3A} = I_{3A} \cdot U_{3A} = 3A \cdot 9V = 27W$$

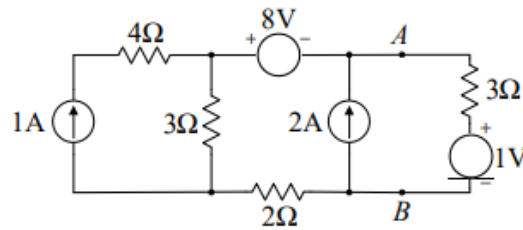
$$P_{3V} = U_{3V} \cdot I_B = -3V \cdot 3A = -9W$$

$$P_{5V} = U_{5V} \cdot I_A = 5V \cdot 1A = 5W$$

$$P_{2\Omega} = U_{2\Omega} \cdot I_C = 4V \cdot 2A = 8W$$

2. a) [8] U kolu sa slike, odrediti Tevenenov generator kojim se može zameniti deo kola levo od tačaka A i B.

b) [2] Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, izračunati snagu koju **predaje** idealni naponski generator od 1V.



a)

$U_{AB}^I = -8V$

$U_{AB}^{II} = 3V$

$U_{AB}^{III} = 10V$

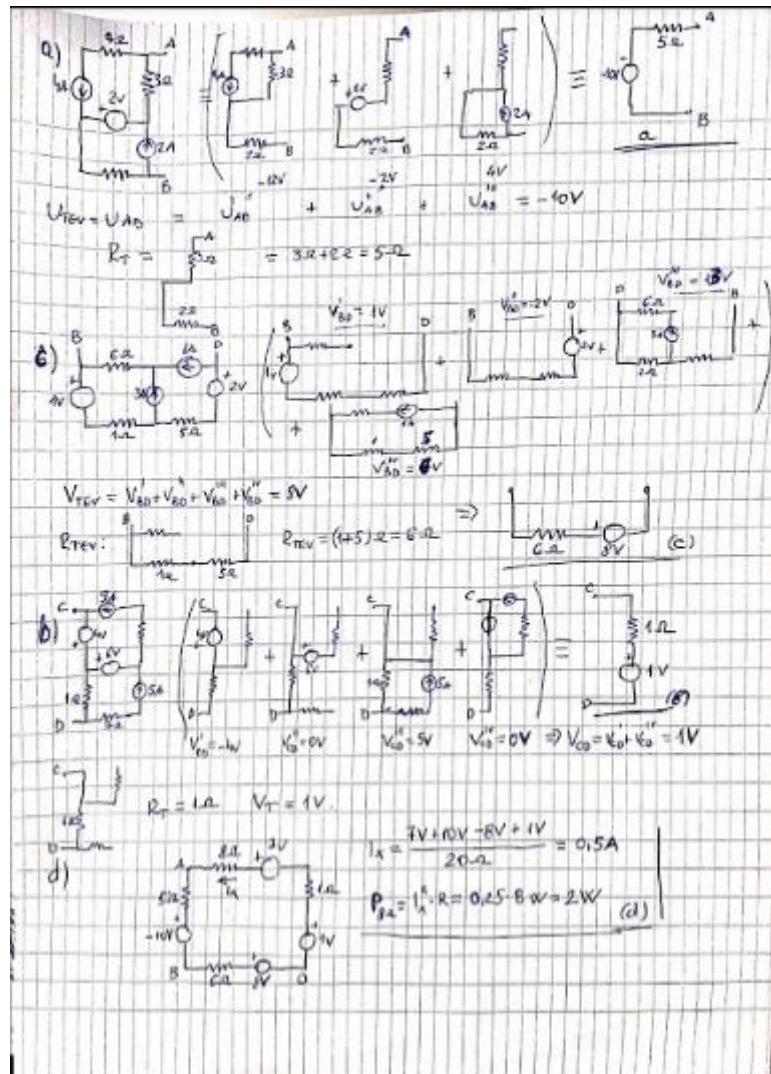
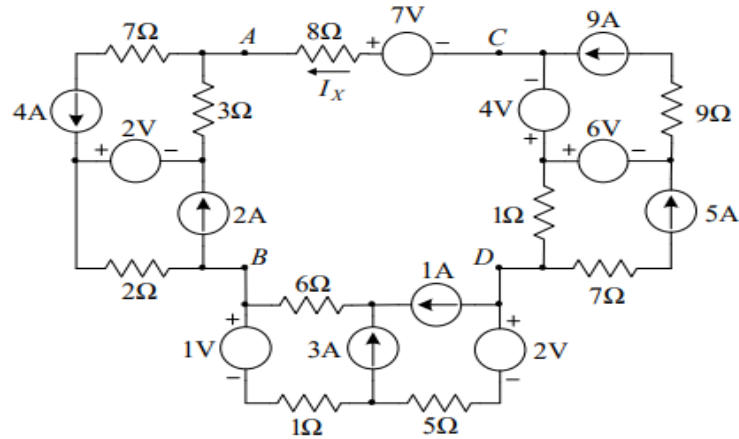
$U_{TEV} = U_{AB}^I + U_{AB}^{II} + U_{AB}^{III} = 5V$

$R_T = 5\Omega$

b) $I = \frac{1V - 5V}{8\Omega} = -0,5A$ $P_{1V} = U_{1V} \cdot I = 1V \cdot (-0,5A) = -0,5W$

Februar 2020

1. a) [20] Odrediti parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačka A i B.
- b) [20] Odrediti parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačka C i D.
- c) [20] Odrediti parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora za deo kola ispod tačka B i D.
- d) [20] Korišćenjem rezultata iz prethodne tri tačke, odrediti struju I_x , kao i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 8Ω .



2. [20] Za kolo sa slike je poznato R i β . Odrediti odnos napona v_i/v_g .

$$i_1 = \frac{v_g - v_i}{10R}$$

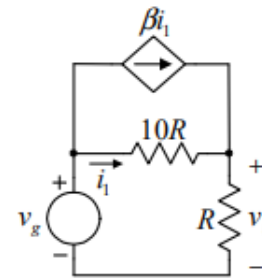
$$v_i = (\beta + 1) i_1 \cdot R$$

$$v_i = (\beta + 1) \frac{v_g - v_i}{10R} \cdot R$$

$$v_i + (\beta + 1) \frac{v_i}{10} = v_g \frac{(\beta + 1)}{10}$$

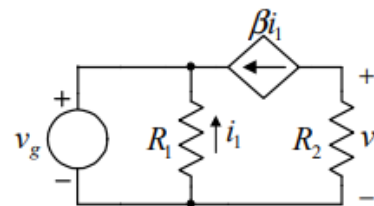
$$v_i \left(1 + \frac{(\beta + 1)}{10} \right) = v_g \frac{(\beta + 1)}{10}$$

$$\frac{v_i}{v_g} = \frac{\frac{(\beta + 1)}{10}}{\frac{10 + \beta + 1}{10}} = \frac{\beta + 1}{\beta + 11}$$



Januar 2020

2. [20] Za kolo sa slike je poznato R_1 , R_2 i β . Odrediti odnos napona v_i/v_g .

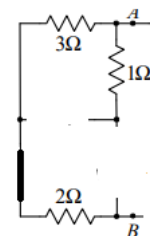
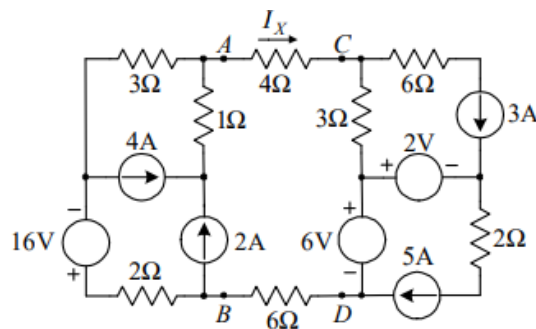


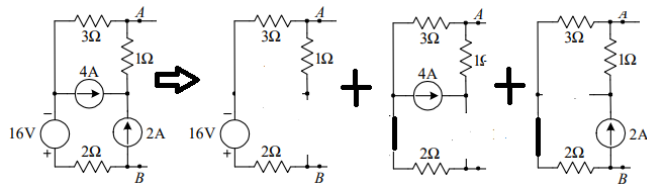
$$i_1 = -\frac{v_g}{R_1}, \quad v_i = -\beta i_1 R_2 = -\beta \left(-\frac{v_g}{R_1} \right) R_2 = v_g \beta \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{v_i}{v_g} = \beta \frac{R_2}{R_1}$$

1. a) [30] Odrediti parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačka A i B.

b) [30] Odrediti parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačka C i D.

c) [20] Korišćenjem rezultata iz prethodne dve tačke, odrediti struju I_x , kao i snagu koja se disipira na otporniku otpornosti 4Ω .





Supernozicia

$$U_{AB} = U_{AB}^I + U_{AB}^{II} + U_{AB}^{III}$$

$$R_T = 3\Omega + 2\Omega = 5\Omega$$

$$U_{AB}^I = -16V$$

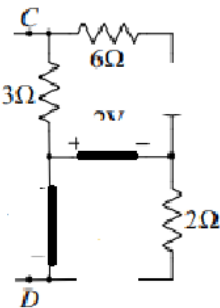
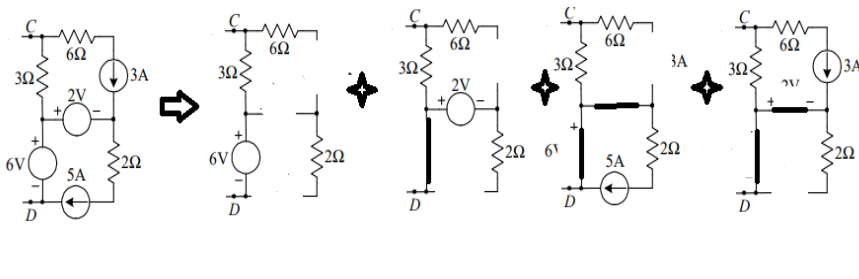
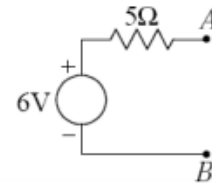
$$U_{AB}^{II} = 4A \cdot 3\Omega = 12V$$

$$U_{AB}^{III} = 2A \cdot (3\Omega + 2\Omega) = 10V$$

$$U_{AB} = -16V + 12V + 10V = 6V$$

Kolo za Tevenenov

a) $U_{TEV1} = 6V$, $R_{TEV1} = 5\Omega$.



$$U_{CD} = U_{CD}^I + U_{CD}^{II} + U_{CD}^{III} + U_{CD}^{IV}$$

$$R_{CD} = 3\Omega$$

$$U_{CD}^I = 6V$$

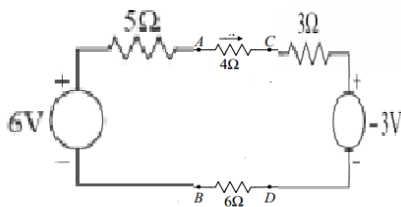
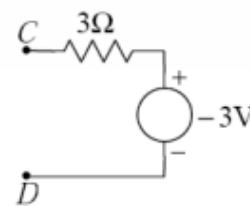
$$U_{CD}^{II} = 0V$$

$$U_{CD}^{III} = 0V$$

$$U_{CD}^{IV} = -9V$$

$$\Rightarrow U_{CD} = -3V$$

b) $U_{TEV2} = -3V$, $R_{TEV2} = 3\Omega$.



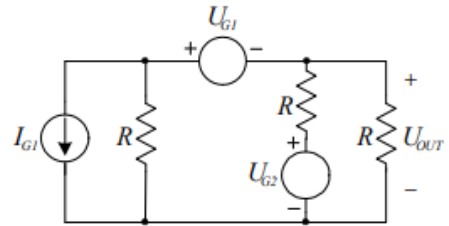
$$I_x = \frac{6V - (-3V)}{5\Omega + 3\Omega + 6\Omega + 4\Omega} = \frac{9V}{18\Omega} = 0.5A$$

$$P_{4\Omega} = I_x^2 \cdot 4\Omega = 0.25 \cdot 4W = 1W$$

Prvi kolokvijum 2019/2020

1. Za kolo sa slike je poznato I_{G1} , U_{G1} , U_{G2} i R .

- a) [18] **Primenom principa superpozicije** odrediti napon U_{OUT} .
 b) [7] Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, odrediti snagu koju **predaje** idealni strujni generator I_{G1} .



Преместите у архиву

$$U_{out}^I = -\frac{I_{G1} R}{3}$$

$$U_{out}^{U_1} = -\frac{U_{G1}}{3}$$

$$U_{out}^{U_2} = \frac{U_{G2}}{3}$$

$$U_{out} = -\frac{I_{G1} R}{3} - \frac{U_{G1}}{3} + \frac{U_{G2}}{3}$$

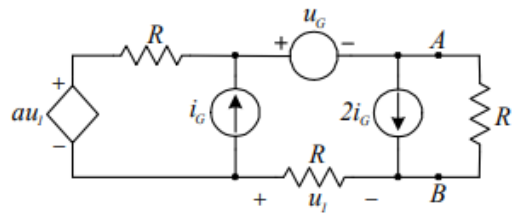
$$U_{ic} = U_{ic} \cdot I_g = -(U_{G1} + (-\frac{I_{G1} R}{3} - \frac{U_{G1}}{3} + \frac{U_{G2}}{3})) \cdot I_g$$

$$P_{ic} = (\frac{I_{G1} R}{3} - \frac{2}{3} U_{G1} - \frac{U_{G2}}{3}) \cdot I_g$$

2. Za kolo sa slike je poznato i_G , u_G , a i R .

a) [19] Odrediti parametre Nortonovog generatora za deo kola levo od tačaka A i B.

b) [6] Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, odrediti snagu koja se disipira na otporniku R desno od tačaka A i B.



$R_{TEV} = R_N$ određujemo tako što isključimo sve nezavisne generatore a uključimo testni generator i tražimo odnos $\frac{U_t}{I_t} = R_{TEV}$

$$I_t = \frac{U_t - aU_i}{2R}$$

$$U_i = I_t \cdot R$$

$$\Rightarrow I_t = \frac{U_t - a \cdot I_t \cdot R}{2R}$$

$$2RI_t = U_t - aI_t R$$

$$(2R + aR)I_t = U_t \Rightarrow R_{TEV} = \frac{U_t}{I_t} = \underline{(2+a)R}$$

Sada superpozicijom određujemo U_{TEV} : Uključujemo jedan po jedan nezavisni generator

U_{i_1} nema struje pa ni pada napona
 $U_i = 0 \rightarrow a \cdot U_i = 0$
 $U_{AB}^I = -U_G$

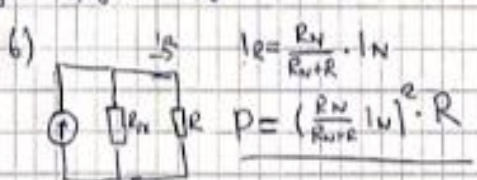
Ugrani 2-B - nema struje $U_i = 0$, $a \cdot U_i = 0$
 $U_{AB}^{II} = I_G \cdot R$

$U_i = -2I_G \cdot R$, $a \cdot U_i = -2I_G \cdot R \cdot a$
 $U_{AB}^{III} = -2I_G \cdot 2R - 2I_G \cdot R \cdot a$

$$U_{AB} = U_{AB}^I + U_{AB}^{II} + U_{AB}^{III} = -U_G + I_G R - 4I_G R - 2aI_G R = -(U_G + 3I_G R + 2aI_G R)$$

$$U_{AB} = -(U_G + I_G R(2a+3))$$

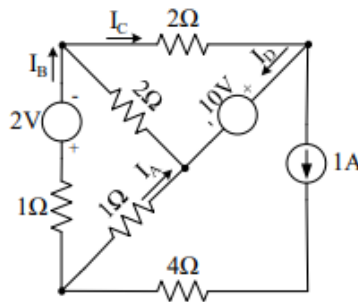
$$I_N = \frac{U_{AB}}{R_{TEV}} = -\frac{U_G + I_G R(2a+3)}{(a+2)R}$$

$$R_N = R_{TEV} = \underline{(a+2)R}$$


3. a) [11] U kolu sa slike, **primenom metode potencijala čvorova**, izračunati potencijale svih čvorova.

b) [8] Koristeći rezultate iz prethodne tačke izračunati struje I_A , I_B , I_C i I_D .

c) [6] Izračunati snagu koju svaki od nezavisnih generatora **predaje** ostatku kola.



$$3. a) \quad V_1: \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega}\right)V_2 - \frac{1}{1\Omega}V_3 = 1A + \frac{2V}{1\Omega}$$

$$V_2: -\frac{1}{1\Omega}V_1 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{2\Omega}\right)V_2 - \frac{1}{2\Omega}V_3 = -\frac{2V}{1\Omega}$$

$$V_3: \boxed{V_3 = 10V}$$

$$2sV_1 - 1sV_2 = 3A$$

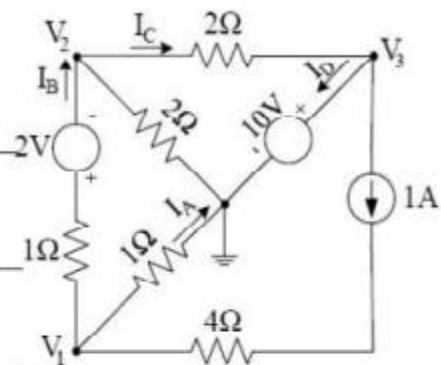
$$-1sV_1 + 2sV_2 = 3A \quad / \cdot 2$$

$$2sV_1 - 1sV_2 = 3A$$

$$-2sV_1 + 4sV_2 = 6A$$

$$3sV_2 = 9A \Rightarrow \boxed{V_2 = 3V}$$

$$2sV_1 - 1s \cdot 3V = 3A \Rightarrow \boxed{V_1 = 3V}$$



$$b) \quad I_A = \frac{V_1}{1\Omega} \quad I_B = \frac{V_1 - (V_2 + 2V)}{1\Omega} \quad I_C = \frac{V_2 - V_3}{2\Omega} \quad I_D = I_C - 1A$$

$$\boxed{I_A = 3A} \quad \boxed{I_B = 2A} \quad \boxed{I_C = -3.5A} \quad \boxed{I_D = -4.5A}$$

$$c) \quad P_{2V} = 2V \cdot (-I_B) \quad P_{10V} = 10V \cdot (-I_D) \quad P_{1A} = 1A \cdot (V_1 + 1A \cdot 4\Omega - V_3)$$

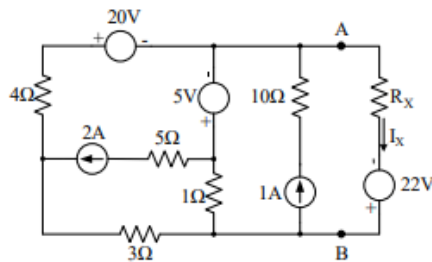
$$\boxed{P_{2V} = -4W} \quad \boxed{P_{10V} = 45W} \quad P_{1A} = 1A \cdot (3V + 4V - 10V)$$

$$\boxed{P_{1A} = -3W}$$

4. a) [15] Za deo kola, levo od tačkaka A i B, izračunati parametre Thevenenovog generatora.

b) [6] Primenom rezultata iz prethodne tačke odrediti otpornost R_X tako da struja I_X iznosi 8A.

c) [4] Izračunati snagu koja se disipira na otporniku R_X (za otpornost izračunatu u prethodnoj tački) kao i snagu koju predaje naponski generator od 22V.



4. a)

$$V_1: V_1 = 5V$$

$$V_2: \left(\frac{1}{4\Omega} + \frac{1}{3\Omega}\right)V_2 - \frac{1}{3\Omega}V_3 = \frac{20V}{4\Omega} + 2A$$

$$V_3: -\frac{1}{1\Omega}V_1 - \frac{1}{3\Omega}V_2 + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{3\Omega}\right)V_3 = -1A$$

$$\frac{7}{12}sV_2 - \frac{1}{3}sV_3 = 7A$$

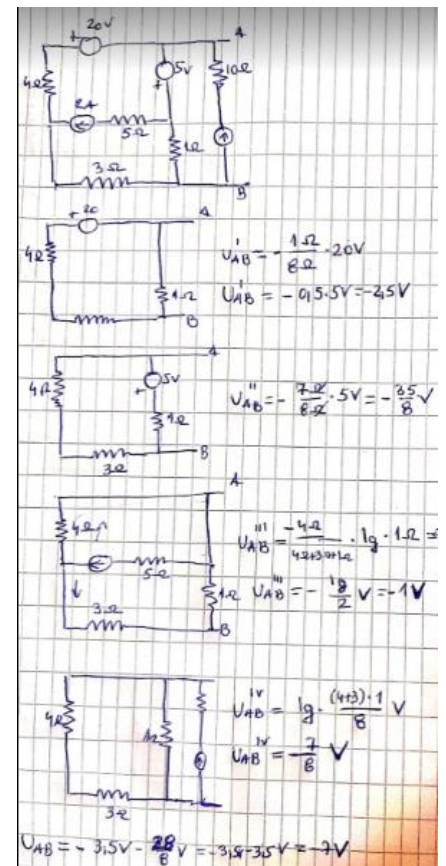
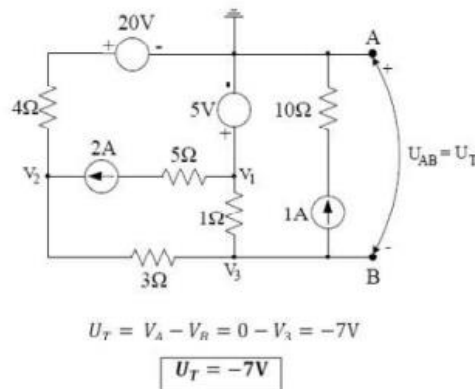
$$-\frac{1}{3}sV_2 + \frac{4}{3}sV_3 = 4A$$

$$7sV_2 - 4sV_3 = 84A$$

$$-1sV_2 + 4sV_3 = 12A$$

$$6sV_2 = 96A \Rightarrow V_2 = 16V$$

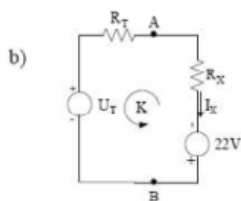
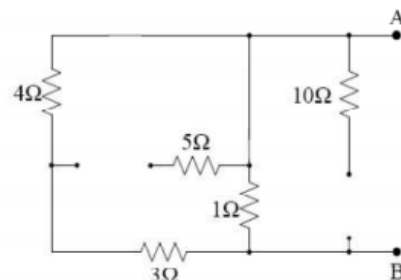
$$-16V + 4sV_3 = 12V \Rightarrow 4sV_3 = 28V \Rightarrow V_3 = 7V$$



$$R_T = (4\Omega \oplus 3\Omega) \parallel 1\Omega$$

$$R_T = \frac{(4\Omega + 3\Omega) \cdot 1\Omega}{(4\Omega + 3\Omega) + 1\Omega}$$

$$R_T = \frac{7}{8}\Omega$$



$$-U_T + I_X(R_T + R_X) - 22V = 0$$

$$I_X(R_T + R_X) = 22V + U_T$$

$$R_X = \frac{22V + U_T}{I_X} - R_T$$

$$R_X = \frac{22V + (-7V)}{8A} - \frac{7}{8}\Omega$$

$$R_X = 1\Omega$$

c)

$$P_{R_X} = R_X \cdot I_X^2$$

$$P_{R_X} = 1\Omega \cdot 64A^2$$

$$P_{R_X} = 64W$$

$$P_{22V} = 22V \cdot I_X$$

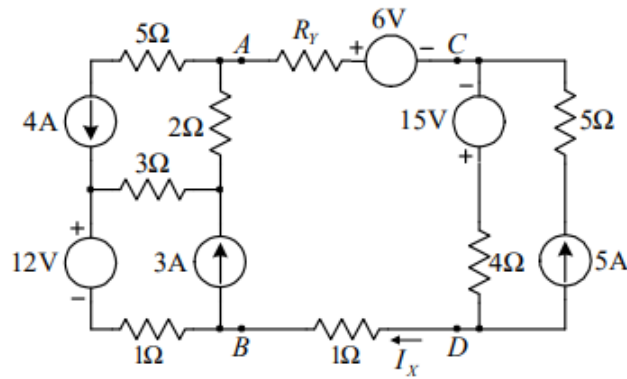
$$P_{R_X} = 22V \cdot 8A$$

$$P_{R_X} = 172W$$

Septembar 2019

1. U kolu sa stalnim jednosmernim strujama sa slike je poznato $R_Y = 3\Omega$. Odrediti:

- [4] parametre Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačka A i B,
- [4] parametre Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačka C i D,
- [4] struju I_x ,
- [4] snagu koja se disipira na otporniku R_Y ,
- [4] snagu koju predaje idealni naponski generator od 6V.



Handwritten solution on grid paper:

a)
$$U_{AB} = U_{AB}^I + U_{AB}^{II} + U_{AB}^{III} = 4V$$

$$U_{AB} = 12V + (-20V) + 12V$$

b)
$$U_{CD} = U_{CD}^I + U_{CD}^{II}$$

$$U_{CD} = -15V + 20V = 5V$$

$$R_T = 4\Omega$$

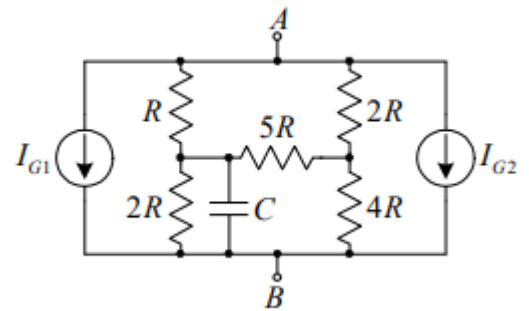
c)
$$I_x = \frac{4V - 6V - 5V}{14\Omega} = \frac{-7}{14} A = -0.5A$$

d) $P_Y = R_Y \cdot I_x^2 = 3\Omega \cdot 0.25 A^2 = 0.75W$

e) $P_{6V} = U_{6V} \cdot I_{6V} = U_{6V} \cdot (-I_x) = 6V \cdot 0.5A = 3W$

1. Smatrajući da idealni strujni generatori u kolu sa slike generišu konstantne struje i da su R , C , I_{G1} i I_{G2} poznate veličine, odrediti:

- [4] napon U_{AB} ,
- [3] parametre Tevenenovog generatora za kolo između tačaka A i B,
- [3] snagu koju predaje idealni strujni generator I_{G1} ,
- [3] snagu koja se disipira na otporniku $5R$,
- [3] napon na kondenzatoru C ,
- [4] kolika treba da bude otpornost potrošača R_p koji bi se povezao između tačaka A i B tako da se na njemu disipira maksimalna moguća snaga.



a)

$R \cdot 4R = 2R \cdot 2R \Rightarrow$ most je uravnotežen
Grama $5R$ se može ukloniti jer kroz nju ne protiče struja

Superpozicija

$U_{AB} = -I_{G1} \cdot 2R$

$U_{AB} = -I_{G2} \cdot 2R$

b)

$$U_{AB} = -(I_{G1} + I_{G2}) \cdot 2R = -2(I_{G1} + I_{G2})R$$

c)

$$R_{TEV} = 3R \parallel 6R = 2R, \quad E_{TEV} = -2(I_{G1} + I_{G2})R$$

d)

$$P_{G1} = I_{G1} \cdot U_{G1} = I_{G1} \cdot (-U_{AB}) = I_{G1} \cdot 2(I_{G1} + I_{G2})R = \underline{2I_{G1}(I_{G1} + I_{G2})R}$$

e)

$$I_{5R} = 0 \Rightarrow P_{5R} = I_{5R} \cdot U_{5R} = 0W$$

f)

$$N_C = |U_{2R}| = |I_{2R} \cdot 2R| = \left| \frac{U_{AB}}{R+2R} \cdot 2R \right| = \left| \frac{2(I_{G1} + I_{G2})R}{3R} \cdot 2R \right| = \left| -\frac{4(I_{G1} + I_{G2})R}{3} \right|$$

$$|U_C| = \frac{4}{3} (I_{G1} + I_{G2})R$$

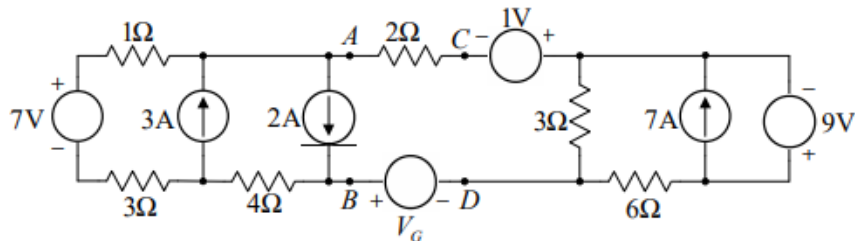
g)

$R_p = R_{TEV} = 2R$

Jul 2019

Februar 2019

- [20] Odrediti parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora za deo kola levo od tačka A i B.
- [20] Odrediti parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora za deo kola desno od tačka C i D.
- [20] Korišćenjem rezultata iz prethodne tačke, odrediti napon idealnog naponskog generatora V_G tako da snaga koju on **predaje** bude 5W. Poznato je da se u tom slučaju na otporniku otpornosti 2Ω (između tačka A i C) disipira snaga od 2W.
- [20] Pod uslovom iz prethodne tačke, kolika treba da bude otpornost potrošača R_p koji bi se povezao između tačka A i D tako da se na njemu disipira maksimalna moguća snaga? Koliko iznosi ta snaga?



a)

$U_{TEV} = U_{AB} = 7V + 12V - 16V = 3V$, $R_{TEV} = 1\Omega + 3\Omega + 4\Omega = 8\Omega$

b)

$U_{TEV} = U_{CD} = -4V$, $R_{TEV} = \frac{3 \cdot 6}{9} \Omega = 2\Omega$

c)

$U_G = 5V$

$V_G \cdot I_x = 5W$
 $R_2 \cdot I_x^2 = 2W$
 $I_x \cdot R_2 = \pm \sqrt{1A^2} = \pm 1A$
 $V_G \cdot I_x = \pm 5V$

Sada vršimo proveru u kolu
 $I_x = \frac{3V + 4V + U_G}{12\Omega}$
 za $U_G = 5V \Rightarrow I_x = \frac{12V}{12\Omega} = 1A$ Tačno!
 za $U_G = -5V \Rightarrow I_x = \frac{2V}{12\Omega} = \frac{1}{6}A \neq -1A$ pa ovo rešenje otpada!

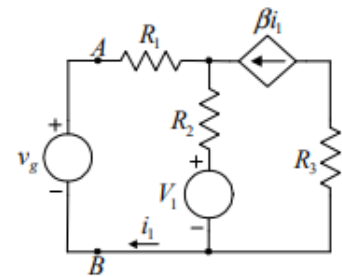
d)

$U_{AD} = U_G + 3V - 8\Omega \cdot 1A = 0V$
 $R_{AD} = 8\Omega // 4\Omega = \frac{8}{3}\Omega$

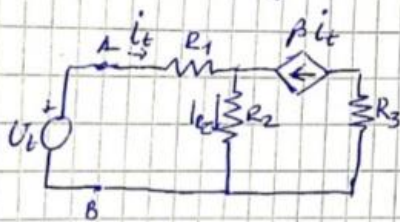
$P_p = I_{R_p} \cdot R_p = 0$
 Bez obzira na vrednost R_p snaga je 0W jer ne protiče nikakva struja kroz tu granu!

Februar 2019

2. [20] Za kolo sa slike je poznato R_1 , R_2 , R_3 , V_1 i β . Odrediti ekvivalentnu otpornost za deo kola desno od tačka A i B.



Ekvivalentnu otpornost za deo kola desno od tačka A i B određujemo na taj način što pa tačke A i B priključimo testni generator, isključimo sve nezavisne generatore i tražimo odnos $\frac{U_t}{i_t}$.



$$i_t + \beta i_t = \frac{U_t - i_t R_1}{R_2} = i_{R_2}$$

$$R_2 i_t (\beta + 1) = U_t - i_t R_1$$

$$i_t (R_1 + R_2 (\beta + 1)) = U_t$$

$$R_{\text{EKV}} = \frac{U_t}{i_t} = R_1 + R_2 (\beta + 1)$$

Resenja: Merisa Harcinovic