Linearna algebra

Ivana Jovović
ivana@etf.rs

1 Vektorski prostor

Primer 1. *Za koje vrednosti realnih parametra a i b su vektori $u = (a,b,3)$ i $v = (2,a-b,1)$ linearno zavisni u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$?*

Rešenje. Vektori $u, v \in \mathbb{R}^3$ su linearno zavisni ako postoje realni brojeve α i β, $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, za koje važi

$$\alpha u + \beta v = \mathbf{0},$$

odnosno

$$\alpha(a,b,3)+\beta(2,a-b,1)=\mathbf{0},$$

tj.

$$(a\alpha, b\alpha, 3\alpha)+(2\beta,(a-b)\beta,\beta)=\mathbf{0}$$

ili

$$(a\alpha+2\beta, b\alpha+(a-b)\beta, 3\alpha+\beta)=\mathbf{0}.$$

Poslednja jednakost je ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} a\alpha+2\beta &= 0\\ b\alpha+(a-b)\beta &= 0\\ 3\alpha+\beta &= 0. \end{aligned}$$

Vektori $(a,b,3)$ i $(2,a-b,1)$ su linearno zavisni ako dati homogeni sistem ima netrivijalno rešenje. Iz treće jednačine dobijamo da je $\beta = -3\,\alpha$. Zamenom $\beta = -3\,\alpha$ u prvu jednačinu dobijamo da je $a = 6$, a drugu $4b-3a = 0$, tj. da je $b = \frac{9}{2}$. □

Primer 2. *Za koje vrednosti realnog parametra k su vektori $u = (2, k, -4)$, $v = (0, k+2, -8)$ i $w = (1, -1, k-1)$ linearno zavisni u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$?*

Rešenje. Vektori $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ su linearno zavisni ako postoje realni brojeve α, β i γ, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0$, za koje važi

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = \mathbf{0},$$

odnosno

$$\alpha(2,k,-4)+\beta(0,k+2,-8)+\gamma(1,-1,k-1)=\mathbf{0},$$

tj.

$$(2\alpha, k\alpha, -4\alpha)+(0,(k+2)\beta,-8\beta)+(\gamma,-\gamma,(k-1)\gamma)=\mathbf{0}$$

ili

$$(2\alpha+\gamma, k\alpha+(k+2)\beta-\gamma, -4\alpha-8\beta+(k-1)\gamma)=\mathbf{0}.$$

Poslednja jednakost je ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} 2\alpha+\gamma &= 0\\ k\alpha+(k+2)\beta-\gamma &= 0\\ -4\alpha-8\beta+(k-1)\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Vektori u, v i w su linearno zavisni ako dati homogeni sistem ima netrivijalno rešenje, t.j. ako je determinanta matrice sistema jednaka nuli.

Za determinantu matrice sistema važi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1\\ k & k+2 & -1\\ -4 & -8 & k-1 \end{vmatrix} &= 2(k+2)(k-1)-8k+4(k+2)-16\\ &= (k+2)(2k-2)-8(k+2)+4(k+2)\\ &= (k+2)(2k-6)=2(k+2)(k-3). \end{aligned}$$

Prema tome, za $k=-2$ ili $k=3$ vektori u, v i w su linearno zavisni. Za $k=3$ imamo da je $u=(2,3,-4)$, $v=(0,5,-8)$ i $w=(1,-1,2)$. Lako se može zaključiti da je $u=2w+v$. Ovu vezu između vektora u, v i w dobijamo iz jednačine $\alpha v+\beta u+\gamma w=\mathbf{0}$, odnosno nalaženjem netrivijalnog rešenja sistema

$$\begin{aligned} 2\alpha+\gamma &= 0\\ 3\alpha+5\beta-\gamma &= 0\\ -4\alpha-8\beta+2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine dobijamo da je $\gamma=-2\alpha$, što zamenom u drugu i treću jednačinu daje $\beta=-\alpha$. Skup svih rešenja homogenog sistema je $\{(t,-t,-2t)\mid t\in\mathbb{R}\}$. Za proizvoljno t različito od nule dobijamo linearnu zavisnost vektora u, v i w. $\square$

Sledeći primer ilustruje važnost polja nad kojim razmatramo dati vektorski prostor.

Primer 3. *Pokazati da su vektori $u=(2+i,1+2i)$ i $v=(1-2i,2-i)$ vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$ linearno nezavisni, ako vektorski prostora $\mathbb{C}^2$ razmatramo nad poljem $\mathbb{R}$, i da su linearno zavisni ako vektorski prostora $\mathbb{C}^2$ razmatramo nad poljem $\mathbb{C}$.*

Rešenje. Vektori u i v su linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{R}$ ako za svako $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ važi implikacija $\alpha u+\beta v=\mathbf{0}\Rightarrow\alpha=\beta$. Jednačina

$$\alpha\,(2+i,1+2i)+\beta\,(1-2i,2-i)=\mathbf{0},$$

odnosno

$$((2+i)\,\alpha,(1+2i)\,\alpha)+((1-2i)\,\beta,(2-i)\,\beta)=\mathbf{0},$$

tj.

$$((2+i)\,\alpha+(1-2i)\,\beta,(1+2i)\,\alpha+(2-i)\,\beta)=\mathbf{0}$$

ili

$$((2\,\alpha+\beta)+(\alpha-2\,\beta)i,((\alpha+2\,\beta)+(2\,\alpha-\beta)\,i)=\mathbf{0}$$

je ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} 2\alpha+\beta &= 0 & \alpha-2\beta &= 0 \\ \alpha+2\beta &= 0 & 2\alpha-\beta &= 0, \end{aligned}$$

a dati sistem ima jedino trivijalno rešenje.

Vektori u i v su linearno zavisni nad poljem $\mathbb{C}$ ako postoje brojevi $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, koji nisu istovremeno jednaki 0, za koje važi $\alpha u+\beta v=\mathbf{0}$. Jednačina

$$\alpha(2+i,1+2i)+\beta(1-2i,2-i)=\mathbf{0},$$

tj.

$$((2+i)\,\alpha+(1-2i)\,\beta,(1+2i)\,\alpha+(2-i)\,\beta)=\mathbf{0}$$

je ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} (2+i)\alpha+(1-2i)\beta &= 0 \\ (1+2i)\alpha+(2-i)\beta &= 0, \end{aligned}$$

čija je determinanta matrice sistema

$$\begin{vmatrix} 2+i & 1-2i \\ 1+2i & 2-i \end{vmatrix} = (2+i)(2-i)-(1+2i)(1-2i)=(4+1)-(1+4)=0.$$

Prema tome, sistem ima netrivijalno rešenje i vektori su linearno zavisni. $\square$

Primer 4. *Ispitati da li je* $V=\{(0,x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ *vektorski potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^3$.

Rešenje. Na osnovu prethodne teoreme treba pokazati da je $V\neq\emptyset$ i da je

$$(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R})(\forall(0,x,y),(0,z,w)\in V)\ \alpha(0,x,y)+\beta(0,z,w)\in V.$$

Očigledno je $V\neq\emptyset$. Važi

$$\begin{aligned} \alpha(0,x,y)+\beta(0,z,w) &= (0,\alpha x,\alpha y)+(0,\beta z,\beta w) \\ &= (0,\alpha x+\beta z,\alpha y+\beta w). \end{aligned}$$

Kako su $\alpha,\beta,x,y,z,w\in\mathbb{R}$ imamo da je $\alpha x+\beta z,\alpha y+\beta w\in\mathbb{R}$, pa je prema tome $(0,\alpha x+\beta z,\alpha y+\beta w)\in V$. $\square$

Primer 5. *Odrediti skup V svih matrica permutabilnih u odnosu na operaciju množenja matrica sa matricom* $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. *Zatim pokazati da je V vektorski potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^{2\times 2}$, *gde je* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *skup svih kvadratnih matrica nad poljem* $\mathbb{R}$.

Rešenje. Može se pokazati da je $V = \left\{ X \,\middle|\, X = \begin{bmatrix} x & y \\ 3y & x \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Pokažimo da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i svako $X, Z \in V$ važi $\alpha X + \beta Z \in V$. Imamo da je

$$\alpha X + \beta Z = \alpha \begin{bmatrix} x & y \\ 3y & x \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} z & w \\ 3w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta w \\ 3(\alpha y + \beta w) & \alpha x + \beta z \end{bmatrix}.$$

Odakle zaključujemo da je $\alpha X + \beta Z \in V$. □

Primer 6. *Neka su dati vektori $u = (1,1,1)$ i $v = (2,3,0)$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Odrediti lineal vektora u i v.*

Rešenje. Lineal $\mathscr{L}(u,v)$ je skup svih linearnih kombinacija vektora u i v, tj.

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(u,v) &= \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(1,1,1) + \beta(2,3,0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

□

Primer 7. *Dimenzija vektorskog prostora $V = \{(0,x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ nad poljem $\mathbb{R}$ je 2, a jedna baza je $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.*

Primer 8. *Dimenzija vektorskog prostora $V = \left\{ X \,\middle|\, X = \begin{bmatrix} x & y \\ 3y & x \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ nad poljem $\mathbb{R}$ je 2, a jedna baza je $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.*

Primer 9. *Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$, svih uređenih parova kompleksnih brojeva, nad poljem $\mathbb{C}$, je 2, a jedna baza je $\{(1,0),(0,1)\}$, dok je dimenzija ovog vektorskog prostora nad poljem $\mathbb{R}$ jednaka 4, sa jednom bazom $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$.*

Primer 10. *Dokazati da je skup $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, gde je $v_1 = (1,1,2,1)$, $v_2 = (1,-1,0,1)$, $v_3 = (0,0,-1,1)$ i $v_4 = (1,2,2,0)$, jedna baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$. Predstaviti vektor $u = (1,1,1,1)$ u ovoj bazi.*

Rešenje. Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ je 4. Na osnovu prethodne teoreme, skup od četiri linearno nezavisna vektora iz $\mathbb{R}^4$ je baza tog vektorskog prostora. Prema tome, dovoljno je pokazati da su vektori v_1, v_2, v_3 i v_4 linearno nezavisni, tj. da važi implikacija $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Važi

$$\begin{aligned} &\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \\ &\alpha_1(1,1,2,1) + \alpha_2(1,-1,0,1) + \alpha_3(0,0,-1,1) + \alpha_4(1,2,2,0) = \\ &(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4, 2\alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Prethodna jednačina je ekvivalentna sistemu

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 + \alpha_2 \phantom{{}-\alpha_3} + \alpha_4 &=& 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 \phantom{{}-\alpha_3} + 2\alpha_4 &=& 0 \\ 2\alpha_1 \phantom{{}+\alpha_2} - \alpha_3 + 2\alpha_4 &=& 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \phantom{{}+2\alpha_4} &=& 0. \end{array}$$

Vektori v_1, v_2, v_3 i v_4 su linearno nezavisni ako i samo ako dati homogen sistem ima jedinstveno rešenje, tj. ako i samo ako je determinanta sistema različita od 0. Imamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot(1+1) = -4 \neq 0.$$

Kako je skup $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$, svaki vektor iz $\mathbb{R}^4$ se može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija vektora v_1, v_2, v_3 i v_4. Prema tome, postoje jedinstveni realni brojevi β_1, β_2, β_3 i β_4 takvi da važi

$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4,$$

odnosno

$$\begin{aligned} (1,1,1,1) &= \beta_1(1,1,2,1) + \beta_2(1,-1,0,1) + \beta_3(0,0,-1,1) + \beta_4(1,2,2,0) \\ &= (\beta_1+\beta_2+\beta_4, \beta_1-\beta_2+2\beta_4, 2\beta_1-\beta_3+2\beta_4, \beta_1+\beta_2+\beta_3). \end{aligned}$$

Prethodna jednačina je ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} \beta_1+\beta_2 \quad\; + \;\; \beta_4 &= 1 \\ \beta_1-\beta_2 \quad\; + 2\beta_4 &= 1 \\ 2\beta_1 \quad - \beta_3 + 2\beta_4 &= 1 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 \qquad &= 1. \end{aligned}$$

tj. sistemu

$$\begin{aligned} \beta_1+\beta_2 \quad\; + \;\; \beta_4 &= 1 \\ \beta_1-\beta_2 \quad\; + 2\beta_4 &= 1 \\ \beta_1+\beta_2-\beta_3 \qquad &= 0 \\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 \qquad &= 1. \end{aligned}$$

Rešenje datog sistema je $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

□

1.1 Literatura

1. Matematika 1 – Algebra autori: *D. Cvetković, I. Lacković, M. Merkle, Z. Radosavljević, S. Simić, P. Vasić*
2. Linearna algebra autori: *M. Rašajski, B. Malešević, T. Lutovac, B. Mihailović, N. Cakić*
3. Zbirka zadataka iz algebre I deo autori: *P. Vasić, B. Iričanin, M. Jovanović, B. Malešević, T. Madžarević, B. Mihailović, Z. Radosavljević, S. Simić, D. Cvetković*
4. Zbirka zadataka iz algebre II deo autori: *P. Vasić, B. Iričanin, M. Jovanović, T. Madžarević, B. Mihailović, Z. Radosavljević, S. Simić, D. Cvetković*