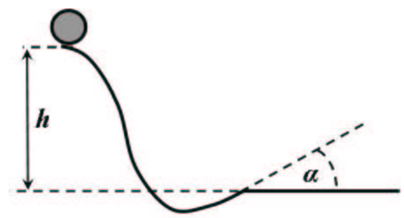
Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu
I kolokvijum iz Fizike za Si, 30.10.2014. godine
Predmetni nastavnici: Predrag Marinković i Peđa Mihailović.
Trajanje ispita je 2 h.

1.Tri idealno elastične kugle, masa m_1, m_2 i m_3, leže u glatkom pravom kanalu i miruju. Kada se prvoj kugli saopšti početna brzina, ona se sudara sa drugom, a zatim se druga kugla sudara sa trećom. Odrediti masu m_2 druge kugle, tako da se treća nakon sudara kreće najvećom mogućom brzinom.

2.Homogena kuglica, poluprečnika R, pusti se iz stanja mirovanja da se kotrlja niz tobogan visinske razlike h, $R \ll h$ (slika 1). Ako se kuglica kotrlja bez proklizavanja i ako je otpor vazduha zanemarljiv, odrediti domet kuglice D u horizontalnoj ravni, mereno od kraja tobogana. Kuglica izleće iz tobogana pod uglom $\alpha = 30^o$ u odnosu na horizontalu.



Slika 1: *Uz zadatak 2.*

3.Homogena lopta mase m i radijusa R može da rotira oko vertikalne ose koja prolazi kroz njen centar. Na obodu lopte, u horizontalnoj ravni koja prolazi kroz njen centar, nalazi se plitki kanal u kome je više puta namotan konac koji je na jednom mestu učvršćen za loptu. Krajevi konca odvajaju se od lopte u dijametralno suprotnim tačkama u suprotnim smerovima pod pravim uglom prema dijametru lopte i leže u horizontalnoj ravni. Na svaki kraj deluje sila čiji se intenzitet menja tokom vremena linerano, tako da je u početnom trenutku vremena ($t = 0$) sila intenziteta F_0, a u trenutku vremena T_0 sila postaje nula i dalje se zadržava na toj vrednosti. Odrediti maksimalnu ugaonu brzinu lopte. Zanemariti sva trenja.

4.Na hrapavoj strmoj ravni, nagibnog ugla θ prema horizontali, stoji telo na koje počne delovati sila u pravcu strme ravni naviše intenziteta $F(t) = kt$, gde je k pozitivna, ali nepoznata konstanta, a t je vreme. Iazmeđu tela i strme ravni postoji trenje karakterisano koeficijentom tenja μ ($\mu > \tan\theta$). Ako je u trenutku vremena T_0 (koje se računa od trenutka $t = 0$ kada je sila $F(t)$ jednaka nuli) sila trenja između tela i strme ravni jednaka nuli, u kom trenutku vremena, prema početnom trenutku, telo počne da se kreće uz strmu ravan?

5. Tačka je izbačena kao horizontalan hitac sa visine h početnom brzinom v_0. Odrediti: (a) poluprečnik krivine trajektorije na mestu udara tačke o zemlju i (b) tangencijalno i normalno ubrzanje na tom mestu. Zanemariti sva trenja. Ubrzanje zemljine teže je g.

Rešenja

1. Pošto su u pitanju elastični sudari za oba sudara možemo pisati zakon o održanju impulasa i zakon o održanju kinetičke energije. Veličine nakon prvog sudara obeležimo sa $'$, a nakon drugog sa $''$. Važi

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \,, \tag{1}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \,, \tag{2}$$

$$v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2' \,, \tag{3}$$

$$v_1^2 = \left(v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2' \right)^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^{\,2} \,, \tag{4}$$

$$\frac{m_2}{m_1} v_2' \left[v_2' \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) - 2v_1 \right] = 0 \,. \tag{5}$$

Pošto je $v_2 \neq 0$, sledi

$$v_2' = \frac{2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_1 \,. \tag{6}$$

Jednačine (1) i (2) važe i u slučaju drugog sudara, ako se indeks 1 zameni sa 2 a indeks 2 zameni sa indeksom 3, i odmah možemo pisati:

$$v_3'' = \frac{2}{1 + \frac{m_3}{m_2}} v_2' \,, \tag{7}$$

$$v_3'' = \frac{4}{(1 + \frac{m_2}{m_1})(1 + \frac{m_3}{m_2})} v_1 \,. \tag{8}$$

Da bi postojao ekstremum v_3'' po m_2 potrebno je da $\frac{\partial v_3''}{\partial m_2} = 0$, odnosno

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3''}{\partial m_2} &= \\ &= 4 m_1 v_1 \frac{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3) - m_2(m_1 + m_3 + 2m_2)}{(m_1 + m_2)^2 (m_2 + m_3)^2} = 0 \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Sledi

$$m_2 = \sqrt{m_1 m_3} \,. \tag{10}$$

2.Kuglica pretvara svoju potencijalnu energiju u kinetičku energiju translacije i rotacije. Ako nulti nivo potencijalne energije postavimo u ravni Zemlje:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \,, \tag{11}$$

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \,. \tag{12}$$

Pošto se kuglica kotrlja bez proklizavanja:

$$\omega = \frac{v}{R} \,, \tag{13}$$

$$gh = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{5}\,, \tag{14}$$

$$v^2 = \frac{10}{7} gh\,. \tag{15}$$

Nakon napuštanja tobogana centar kuglice se kreće putanjom kosog hica, pa je domet

$$D = \frac{v^2}{g}\sin 2\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{7}h\,. \tag{16}$$

3. Potrebno je primeniti teoremu o promeni momenta količine kretanja za mehanički sistem

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_O(\vec{F}_i^e)\,.$$

Na loptu deluju sledeće eksterne sile: gravitaciona sila, sila u ležištima osovine i sile u koncima. Kao pol može se odabrati centar lopte, tj. tačka O. Prema tom polu postoje samo momenti sila u koncima, tako da se može pisati

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = 2RF(t)\,,$$

gde je $L_O = I_z\omega$, a intenzitet sile u koncu

$$F(t) = F_0(1 - t/T_0)\,.$$

Moment inercije lopte prema osi koja prolazi kroz tačku O je (zanemaruje se mali kanal)

$$I_z = (2/5)mR^2\,.$$

Iz prethodnih jednačina sledi

$$\int_0^{\omega_{max}=\omega(T_0)} d\omega = \frac{2R}{I_z}\int_0^{T_0} F(t)dt\,,$$

odakle je maksimalna ugaona brzina

$$\omega_{max} = \frac{2R}{I_z}\frac{1}{2}F_0T_0 = \frac{5}{2}\frac{F_0T_0}{mR}\,.$$

4. Do trenutka $t = 0$ zahvaljujući sili trenja, koja je orijentisana na gore, telo stoji na strmoj ravni. Ta sila trenja nije maksimalno moguća i iznosi

$$F_{tr} = mg\sin\theta$$

i manja je od maksimalno moguće ($\mu mg\cos\theta$). Kada počne delovati sila $F(t)$, važi

$$-mg\sin\theta + F_{tr} + kt = 0\,,$$

a telo još stoji. U trenutku vremena T_0 sila trenja postaje nula, pa važi

$$kT_0 = mg\sin\theta\,,$$

odakle je

$$k = \frac{mg\sin\theta}{T_0}\,.$$

S obzirom na to da intenzitet sile $F(t)$ i dalje raste, sila trenja menja smer (deluje niz strmu ravan) i dostiže maksimalnu vrednost u trenutku T_1. Tada važi

$$mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta = kT_1\,.$$

Lako se pokazuje da je

$$T_1 = T_0(1 + \mu\cot\theta)\,.$$

5. (a) Tokom kretanja tačke ubrzanje je uvek $\vec{a} = -g\vec{e}_y$. Projekcije brzine su

$$v_x = v_0\,,$$

$$v_y = -gt\,.$$

Parametarske jednačine kretanja su

$$x = v_0 t\,,$$

$$y = h - gt^2/2\,.$$

U tački udara tela o zemlju važi da je $y = 0$, pa je vreme leta $\tau = \sqrt{2h/g}$. Brzina u tački udara o zemlju (neka je to tačka B) ima projekcije $v_{xB} = v_0$ i $v_{yB} = -g\sqrt{2h/g} = -\sqrt{2gh}$. Poluprečnik krivine trajektorije na tom mestu je

$$R_B = \frac{v_B^2}{a_{nB}} = \frac{v_0^2 + 2gh}{a_{nB}}\,,$$

gde je

$$a_{nB} = g\cos\beta = g\frac{v_{xB}}{\sqrt{v_{xB}^2 + v_{yB}^2}} = g\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\,.$$

Sledi

$$R_B = \frac{v_0^2 + 2gh}{g\dfrac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}} = \frac{(v_0^2 + 2gh)^{3/2}}{v_0 g}\,.$$

(b) Normalno ubrzanje je

$$a_{nB} = g\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\,.$$

Tangencijalno ubrzanje je

$$a_{\tau B} = g\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\,.$$