Kombinatorika

Tamara Koledin

Mart 2020.

Zadatak 1. *Zastava ima 13 horizontalnih pruga koje mogu biti crvene, plave ili bele, pri čemu dve susedne pruge ne mogu biti iste boje. Koliko ima ovakvih zastava?*

Rešenje. Svaka takva zastava može biti predstavljena nizom dužine 13, $(x_1, x_2, \ldots, x_{13})$, pri čemu svaki element tog niza predstavlja odgovarajuću boju zastave. Element x_1 može biti crvena, plava ili bela boja, dok element x_2 može biti neka od dve boje, tj. ne sme biti ista boje kao element x_1. Isto važi i za sve ostale elemente x_i, $i \neq 1$: x_i može biti neka od dve boje, tj. ne sme biti iste boje kao element x_{i-1}. Dakle, prema principu proizvoda, broj traženih zastava jeste $3 \cdot 2^{12}$. □

Domaći zadatak 2. *Koliko ima četvorocifrenih brojeva čije su susedne cifre različite?*

Rešenje. $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$ □

Zadatak 3. *Koliko ima šestocifrenih brojeva čiji je zbir cifara paran?*

Rešenje. Prva cifra traženog broja može biti neka od devet cifara (ne i nula), a na drugom, trećem, ..., petom mestu je neka od deset cifara; konačno, na šestom mestu može stajati neka od pet cifara tačno određene parnosti (iste kao što je i zbir prethodnih pet cifara). Prema principu proizvoda dobijamo: $9 \cdot 10^4 \cdot 5 = 450000$.

Možemo i ovako razmišljati: šestocifrenih brojeva čiji je zbir cifara paran ima isto onoliko koliko i šestocifrenih brojeva čiji je zbir cifara neparan. Dakle, traženi broj je polovina od ukupnog broja svih šestocifrenih brojeva: $\frac{9 \cdot 10^5}{2} = 450000$. □

Domaći zadatak 4. *Koliko ima maksimalno šestocifrenih brojeva čiji je zbir cifara paran?*

Rešenje. $10 \cdot 10^4 \cdot 5 - 1 = 499999$ □

Zadatak 5. *Koliko ima funkcija koje preslikavaju skup $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ u skup $P = \{1, 2\}$?*

Rešenje. Svaka funkcija $f : M \to P$ može se predstaviti nizom dužine pet (svojih slika), $(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5))$, gde $f(i)$ predstavlja sliku elementa i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Budući da je kodomen funkcije f dvoelementni skup $P = \{1, 2\}$, znači da elementi niza $(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5))$ mogu uzimati samo dve vrednosti: 1 ili 2 (odnosno, za svako i, $1 \le i \le 5$, $f(i) = 1$ ili $f(i) = 2$). Dakle, broj funkcija koje preslikavaju skup $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ u skup $P = \{1, 2\}$ jeste $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. Primetimo da je u pitanju broj varijacija sa ponavljanjem klase 5 skupa od dva elementa. □

Domaći zadatak 6. *Koliko ima funkcija koje preslikavaju skup cifara u skup $\{a, b, c\}$?*

Rešenje. 3^{10} □

Zadatak 7. *Na koliko načina od 3 učenika i 8 profesora možemo formirati petočlanu komisiju u kojoj će biti bar jedan učenik?*

Rešenje. Tražena komisija može biti formirana na tri različita načina:

1. u komisiji je tačno jedan učenik (od tri učenika) i četiri profesora (od osam profesora); takvih komisija ima $\binom{3}{1}\binom{8}{4}$;

2. u komisiji je tačno dva učenika (od tri učenika) i tri profesora (od osam profesora); takvih komisija ima $\binom{3}{2}\binom{8}{3}$;

3. u komisiji je tačno tri učenika (od tri učenika) i dva profesora (od osam profesora); takvih komisija ima $\binom{3}{3}\binom{8}{2}$.

Dakle, ukupan broj traženih komisija je, na osnovu principa zbira, jednak $\binom{3}{1}\binom{8}{4} + \binom{3}{2}\binom{8}{3} + \binom{3}{3}\binom{8}{2} = 406$.

Drugi način da uradimo ovaj zadatak je da od ukupnog broja svih različitih petočlanih komisija koje se mogu sastaviti od 3 učenika i 8 profesora, dakle od 11 ljudi, a koji je jednak $\binom{11}{5}$, oduzmemo one petočlane komisije u kojima nema nijednog učenika, dakle koje su sastavljene samo od profesora, a kojih ima $\binom{8}{5}$. Taj broj je $\binom{11}{5} - \binom{8}{5} = 406$. □

Domaći zadatak 8. *Na koliko načina od 2 matematičara i 8 inženjera možemo formurati petočlanu komisiju u kojoj će biti bar jedan matematičar?*

Rešenje. $\binom{10}{5} - \binom{8}{5} = 196$. □

Zadatak 9. *Koliko delilaca (uključujući jedan i sam taj broj) ima broj 16200?*

Rešenje. Prosti činioci broja 16200 su 2,3 i 5, i važi $16200 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^2$. Svaki delilac broja 16200 ima iste te proste činioce, i pri tome stepen bilo kog prostog činioca delitelja ne sme biti veći nego što je stepen tog prostog činioca u samom broju 16200. Dakle, svaki delilac datog broja je oblika $2^m \cdot 3^k \cdot 5^l$, pri čemu je $0 \le m \le 3$, $0 \le k \le 4$ i $0 \le l \le 2$, odnosno svaki delilac može biti predstavljen uređenom trojkom (m, k, l), gde m može biti 0, 1, 2 ili 3, k može biti 0, 1, 2, 3 ili 4, a l može biti 0, 1 ili 2, pa traženih delilaca (prema principu proizvoda) ima $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$. □

Domaći zadatak 10. *Ako su p i q prosti, a m i n prirodni brojevi, odrediti broj delilaca broja $p^m q^n$.*

Rešenje. $(m+1)\cdot(n+1)$. □

Zadatak 11. *Koliko ima permutacija skupa $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ u kojima cifra 0 zauzima jedno od prva tri mesta, a cifra 1 zauzima jedno od poslednja četiri mesta?*

Rešenje. Postoje tri mogućnosti za cifru 0 (jedno od prva tri mesta), i četiri mogućnosti za cifru 1 (jedno od poslednja četiri mesta), dakle, prema principu proizvoda, ukupno 12 mogućnosti za raspored ove dve cifre u traženim permutacijama. Pri svakoj od tih dvanaest mogućnosti ostalih osam cifara se slobodno, bez ikakvih uslova, može permutovati u okviru preostalih osam mesta, pa je ukupan broj traženih permutacija jednak $12 \cdot 8!$. □

Domaći zadatak 12. *Koliko ima sedmocifrenih brojeva koji se čitaju isto s početka i s kraja?*

Rešenje. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$. □

Literatura

Zbirka zadataka iz algebre, prvi deo; Petar Vasić, Bratislav Iričanin, Mirko Jovanović, Tatjana Madžarević, Bojana Mihailović, Zoran Radosavljević, Slobodan Simić, Dragoš Cvetković; Elektrotehnički fakultet; Akademska misao.

Praktikum iz Matematike 2: Zbornik rešenih testova osnovnog znanja; Ivana Jovović, Tamara Koledin, Bratislav Iričanin.