

Ekstremne vrednosti realnih funkcija dve ili tri realne promenljive

Ivana Jovović
ivana@etf.rs

Sadržaj

1 Kratak teorijski pregled

- Parcijalni izvodi prvog reda
- Parcijalni izvodi drugog reda
- Tačke lokalnog ekstrema

2 Zadaci

- Matematika II – zadaci, str. 271, zadatak 16
- Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I, str. 131, zadatak 1
- Zadaci i rešeni primeri iz matematičke analize za fakultete, str. 220, primer 1
- Matematika II – zadaci, str. 272, zadatak 17
- Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I, str. 132, zadatak 2
- Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I, str. 133, zadatak 3
- Zadaci za vežbu

$$z = f(x, y)$$

$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ parcijalni priraštaj po promenljivoj x

$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ parcijalni priraštaj po promenljivoj y

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ totalni priraštaj

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ parcijalni izvod prvog reda po promenljivoj x

$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ parcijalni izvod prvog reda po promenljivoj y

$$\frac{\partial}{\partial x} z = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} z = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Diferencijal prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ je

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Parcijalni izvodi drugog reda

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} z \right) = \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} z \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} z \right) = \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} \quad z''_{yx} = (z'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} z \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Diferencijal drugog reda funkcije $z = f(x, y)$ je

$$\begin{aligned} d^2 z &= z''_{xx} dx^2 + 2z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2 \\ &= \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} dy^2 \end{aligned}$$

Ako su u nekoj tački M_0 parcijalni izvodi prvog reda funkcije $z = f(x, y)$ jednaki 0, onda tačku M_0 nazivamo **stacionarnom tačkom**.

Za tačku $M_0(x_0, y_0)$ kažemo da je **tačka lokalnog minimuma** funkcije $z = f(x, y)$, ako važi:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

tj. ako je totalni priraštaj funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ veći ili jednak 0:

$$\Delta z_0 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \geq 0.$$

Za tačku $M_0(x_0, y_0)$ kažemo da je **tačka lokalnog maksimuma** funkcije $z = f(x, y)$, ako važi:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

tj. ako je totalni priraštaj funkcije $z = f(x, y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ manji ili jednak 0:

$$\Delta z_0 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \leq 0.$$

Tačke lokalnog minimuma i maksimuma se jednim imenom nazivaju **tačke lokalnih ekstrema**.

Ako je M_0 stacionarna tačka i ako je $d^2f(M_0) > 0$, onda u tački M_0 funkcija ima lokalni minimum.

Ako je M_0 stacionarna tačka i ako je $d^2f(M_0) < 0$, onda u tački M_0 funkcija ima lokalni maksimum.

Ako je M_0 stacionarna tačka i ako je $d^2f(M_0) = 0$, onda su potrebna dodatna ispitivanja.

Označimo sa $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$ i $C = f''_{yy}(M_0)$.

Stacionarna tačka M_0 je tačka lokalnog minimuma ako je $AC - B^2 > 0$ i $A > 0$.

Stacionarna tačka M_0 je tačka lokalnog maksimuma ako je $AC - B^2 > 0$ i $A < 0$.

Stacionarna tačka M_0 nije tačka lokalnog ekstrema ako je $AC - B^2 < 0$.

Za stacionarnu tačku M_0 za koju je $AC - B^2 = 0$, potrebna su dodatna ispitivanja.

$$d^2f(M_0) > 0 \Leftrightarrow A > 0 \wedge AC - B^2 > 0 \quad d^2f(M_0) < 0 \Leftrightarrow A < 0 \wedge AC - B^2 > 0$$

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 3$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad 2x + y - 2 = 0 \quad y = 2 - 2x \quad x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad x + 2y - 3 = 0 \quad x + 2(2 - 2x) - 3 = 0 \quad y = \frac{4}{3}$$

Postoji jedna stacionarna tačka $M_0 \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 2$$

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_0 :

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} dy^2 \\ &= 2 dx^2 + 2 dx dy + 2 dy^2 = (dx + dy)^2 + dx^2 + dy^2 > 0 \end{aligned}$$

Ili ispitujemo uslov u tački M_0 :

$$A = 2 \quad B = 1 \quad C = 2$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{i} \quad A = 2 > 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_0 \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ je tačka lokalnog minimuma.

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = \ln(y - 2xy) + xy - x.$$

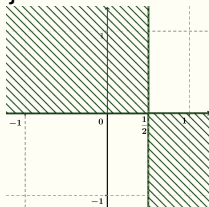
Rešenje.

Određujemo oblast definisanosti funkcije:

$$y - 2xy > 0$$

$$y(1 - 2x) > 0$$

$$(y > 0 \wedge x < \frac{1}{2}) \vee (y < 0 \wedge x > \frac{1}{2})$$



Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y-2xy}(-2y) + y - 1 = \frac{2}{2x-1} + y - 1 = \frac{3-2x-y+2xy}{2x-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y-2xy}(1-2x) + x = \frac{1}{y} + x = \frac{1+xy}{y}$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$3 - 2x - y + 2xy = 0$$

$$xy = -1$$

$$y = 1 - 2x$$

$$1 + xy = 0$$

$$y = 1 - 2x$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1 - 2 = -1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = 1 + 1 = 2$$

Postoje dve stacionarne tačke $M_1(1, -1)$ i $M_2(-\frac{1}{2}, 2)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = -\frac{1}{y^2}$$

Ispitujemo da li je tačka $M_1(1, -1)$ tačka lokalnog ekstrema.

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_1 :

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} dy^2 \\ &= -4 dx^2 + 2 dx dy - dy^2 = -(dx - dy)^2 - 3 dx^2 < 0 \end{aligned}$$

Ili ispitujemo uslov:

$$A = -4 \quad B = 1 \quad C = -1$$

$$AC - B^2 = -4 \cdot (-1) - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{i} \quad A = -4 < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_1(1, -1)$ je tačka lokalnog maksimuma.

Ispitujemo da li je tačka $M_2 \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ tačka lokalnog ekstrema.
Ispitujemo uslov:

$$A = -1 \quad B = 1 \quad C = -\frac{1}{4}$$

$$AC - B^2 = -1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 1^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_2 \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ nije tačka lokalnog ekstrema.

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 3(x^2 + y^2 - 5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 6(xy - 2)$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad x^2 + y^2 - 5 = 0 \quad y = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad xy - 2 = 0 \quad x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0$$

$$y = \frac{2}{x} \quad y = \frac{2}{x}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = -2 \quad y_3 = 1 \quad y_4 = -1$$

Postoje četiri stacionarne tačke $M_1(1, 2)$, $M_2(-1, -2)$, $M_3(2, 1)$ i $M_4(-2, -1)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6y \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 6x$$

Ispitujemo da li je tačka $M_1(1, 2)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = 6 \quad B = 12 \quad C = 6$$

$$AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 12^2 = 36 - 144 = -108 < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_1(1, 2)$ nije tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo da li je tačka $M_2(-1, -2)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = -6 \quad B = -12 \quad C = -6$$

$$AC - B^2 = -6 \cdot (-6) - (-12)^2 = 36 - 144 = -108 < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_2(-1, -2)$ nije tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo da li je tačka $M_3(2, 1)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = 12 \quad B = 6 \quad C = 12$$

$$AC - B^2 = 12 \cdot 12 - 6^2 = 144 - 36 = 108 > 0 \quad \text{i} \quad A = 12 > 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_2(-\frac{1}{2}, 2)$ je tačka lokalnog minimuma.

Ispitujemo da li je tačka $M_4(-2, -1)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = -12 \quad B = -6 \quad C = -12$$

$$AC - B^2 = -12 \cdot (-12) - (-6)^2 = 144 - 36 = 108 > 0 \quad \text{i} \quad A = -12 < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_4(-2, -1)$ je tačka lokalnog maksimuma.

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = (y - x)^2 + (y + 2)^3.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(y - x)(-1) = 2(x - y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y - x) + 3(y + 2)^2$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad 2(x - y) = 0 \quad x = y \quad x = -2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad 2(y - x) + 3(y + 2)^2 = 0 \quad y = -2 \quad y = -2$$

Postoji jedna stacionarna tačka $M_0(-2, -2)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2 \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 2 + 6(y + 2) = 6y + 14$$

Ispitujemo uslov u tački M_0 :

$$A = 2 \quad B = -2 \quad C = 2$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$$

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_0 :

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} dy^2 \\ &= 2 dx^2 - 4 dx dy + 2 dy^2 = 2(dx - dy)^2 \end{aligned}$$

$$d^2 z = 0 \quad \text{za} \quad dx = dy$$

$$z = f(x, y) = (y - x)^2 + (y + 2)^3$$

Određujemo totalni priraštaj u tački $M_0(-2, -2)$:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(-2 + \Delta x, -2 + \Delta y) - f(-2, -2) \\ &= [((-2 + \Delta y) - (-2 + \Delta x))^2 + ((-2 + \Delta y) + 2)^3] \\ &\quad - [(-2 - (-2))^2 + (-2 + 2)^3] \\ &= (\Delta y - \Delta x)^2 + \Delta y^3 \end{aligned}$$

$$\Delta y = \Delta x > 0 \Rightarrow \Delta z > 0$$

$$\Delta y = \Delta x < 0 \Rightarrow \Delta z < 0$$

Totalni priraštaj menja znak u tački $M_0(-2, -2)$.

Tačka $M_0(-2, -2)$ nije tačka lokalnog ekstrema.

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$4x^3 - 2x - 2y = 0$$

$$x^3 = y^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$4y^3 - 2x - 2y = 0$$

$$2x^3 - x - y = 0$$

$$y = x$$

$$y = x$$

$$2x^3 - 2x = 0$$

$$x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = -1$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 1 \quad y_3 = -1$$

Postoje tri stacionarne tačke $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$ i $M_3(-1,-1)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = 12x^2 - 2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2 \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 12y^2 - 2$$

Ispitujemo da li je tačka $M_1(0,0)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = -2 \quad B = -2 \quad C = -2$$

$$AC - B^2 = -2 \cdot (-2) - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$$

$$z = f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

Određujemo totalni priraštaj u tački $M_1(0, 0)$:

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) \\ &= \Delta x^4 + \Delta y^4 - \Delta x^2 - 2\Delta x\Delta y - \Delta y^2 \\ &= \Delta x^4 + \Delta y^4 - (\Delta y + \Delta x)^2\end{aligned}$$

$$\Delta y = -\Delta x \Rightarrow \Delta z = 2\Delta y^4 > 0$$

$$\Delta y = \Delta x \Rightarrow \Delta z = 2\Delta y^4 - 4\Delta y^2 = 2\Delta y^2(\Delta y^2 - 2) < 0$$

Totalni priraštaj menja znak u tački $M_1(0, 0)$.

Tačka $M_1(0, 0)$ nije tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo da li je tačka $M_2(1, 1)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = 10 \quad B = -2 \quad C = 10$$

$$AC - B^2 = 10 \cdot 10 - (-2)^2 = 100 - 4 = 96 > 00 \quad \text{i} \quad A = 10 > 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_2(1, 1)$ je tačka lokalnog minimuma.

Ispitujemo da li je tačka $M_3(-1, -1)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = 10 \quad B = -2 \quad C = 10$$

$$AC - B^2 = 10 \cdot 10 - (-2)^2 = 100 - 4 = 96 > 00 \quad \text{i} \quad A = 10 > 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_3(-1, -1)$ je tačka lokalnog minimuma.

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 6y + 6z.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y + 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + 2x + 2z + 6$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4z + 2y + 6$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$x + y + 2 = 0 \qquad x = -2 - y \qquad z = -2$$

$$x + 2y + z + 3 = 0 \qquad y = -2z - 3 \qquad y = 1$$

$$y + 2z + 3 = 0 \qquad -2 - 2z - 3 + z + 3 = 0 \qquad x = -3$$

Postoji jedna stacionarna tačka $M_0(-3, 1, -2)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} = 4 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 2 \quad \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2} = 4$$

Ispitujemo da li je tačka $M_0(-3, 1, -2)$ tačka lokalnog ekstrema.

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_0 :

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2} dz^2 \\ &+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz \\ &= 2 dx^2 + 4 dy^2 + 4 dz^2 + 4 dx dy + 4 dy dz \\ &= 2(dx + dy)^2 + 2(dy + dz)^2 + 2dz^2 > 0 \end{aligned}$$

Zaključujemo: Tačka $M_0(-3, 1, -2)$ je tačka lokalnog minimuma.

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = 2(x + 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 4 = 2(y + 2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z - 6 = 2(z - 3)$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$x + 1 = 0 \quad x = -1$$

$$y + 2 = 0 \quad y = -2$$

$$z - 3 = 0 \quad z = 3$$

Postoji jedna stacionarna tačka $M_0(-1, -2, 3)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2} = 2$$

Ispitujemo da li je tačka $M_0(-3, 1, -2)$ tačka lokalnog ekstrema.

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_0 :

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2} dz^2 \\ &+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz \\ &= 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 > 0 \end{aligned}$$

Zaključujemo: Tačka $M_0(-3, 1, -2)$ je tačka lokalnog minimuma.

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcija:

- $z = e^{2x}(x + y^2 + 2z),$
- $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5,$
- $z = (x - y)^2 + (y - 1)^2,$
- $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y},$
- $z = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y),$
- $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$
- $z = x^3 + y^3 - 3xy,$
- $z = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10,$
- $z = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12,$
- $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2),$
- $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

Literatura

- 1 Matematika II – zadaci
autor: *Vesna Jevremović*
- 2 Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I
autori: *Momčilo Novaković, Biljana Rodić, Slavica Madić, Ilija Kovačević*
- 3 Zadaci i rešeni primeri iz matematičke analize za fakultete
redaktor: *B. P. Demidovič*
autori: *G. S. Baranenkov, B. P. Demidovič, V. A. Jefimenko, S. M. Kogan, G. L. Lunc, E. F. Poršneva, E. P. Syčeva, S. V. Frolov, R. J. Šostak, A. R. Janpoljskij*