TEORIJA REDOVA

1. Brojni redovi

1.1. Definicija brojnih redova i osnovne osobine

Neka je (a_k) niz realnih brojeva, tada se suma

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n$$

naziva $n-$*ta parcijalna suma* ili *parcijalna suma.* Graničnu vrednost

$$\lim_{n\to\infty} S_n,$$

označavamo

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

i nazivamo *suma reda.* U prethodnom zapisu a_k nazivamo *opšti član reda.* Ukoliko postoji granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, kao realan broj S, tada kažemo da je *red konvergentan*; inače ako granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ određeno divergira, ka nekoj beskonačnosti, kažemo da je *red određeno divergentan.* Moguće je i da granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ neodređeno divergira, tada suma reda ne postoji, tj. tada je *red neodređeno divergentan.* Napomenimo da umesto reda određenog sa $(*)$ moguće je potpuno ekvivaletno razmatrati i red počev od nekog indeksa $k_0 \in \mathbb{N}$ u obliku

$$(**) \qquad \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k.$$

Primer 1.1. *Ispitati konvergenciju reda i ako je red konvergentan odrediti sumu reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Rešenje. Uočimo da za opšti član reda važi

$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\,,$$

gde $k = 1, 2, \ldots$. Samim tim[♭)] dobijamo

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}\,. \end{aligned}$$

[♭)] razmatrajući ovaj primer, kao osnovni primer za "teleskopske" sume

Odatle zaključujemo da postoji granična vrednost

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Ovim je dokazano da posmatrani red konvergira i suma reda je $S = 1$. $\square$

Primer 1.2. *Ispitati konvergenciju reda i ako je red konvergentan odrediti sumu reda*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k,$$

u zavisnosti od realnog parametra $q\in\mathbb{R}$.

Rešenje. Posmatrajmo parcijalnu sumu

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n.$$

Razlikujemo slučajeve:

1^{o}. $q = 1$

Tada je

$$S_n = n + 1$$

i u tom slučaju $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, tj. tada je red određeno divergentan ka beskonačnosti.

2^{o}. $q \neq 1$

Tada koristimo formulu

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Granična vrednost−suma reda

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \left(q^{n+1}\right)}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

postoji kao realan broj ako i samo ako je

$$|q| < 1.$$

Konačan zaključak o divergenciji ovog brojnog reda je sledeći:

- $*$ ako je $q \geq 1$ tada red jeste određeno divergentan ka beskonačnosti ∞;
- $*$ ako je $q \leq -1$ tada red jeste neodređeno divergentan $\big($ima dve tačke nagomilavanja u $\overline{\mathbb{R}}\big)$. $\square$

Napomena. Red iz ovog primera nazivamo *geometrijski red* i izuzetno je bitan kako za teoriju brojnih redova, tako i za teoriju stepenih redova.

Na osnovu asocijativnosti sabiranja realnih brojeva sleduje tvrđenje za konvergentne redove.

Teorema 1.3. *Ako je* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergentan red, tada se njegova suma ne menja pri proizvoljnom grupisanju sabiraka bez promene njihovog poretka.*

Primer 1.4.* *Ispitati konvergenciju reda i ako je red konvergentan odrediti sumu reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Rešenje. Posmatrajmo $n-$tu parcijalnu sumu pri specijalnom izboru $n = 2^m - 1$. Tada posmatrana parcijalna suma se može proceniti

$$S_{2^m-1}=\sum_{k=1}^{2^m-1}\frac{1}{k} = 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(\underbrace{\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^{m-1}+(2^{m-1}-2)}+\frac{1}{2^{m-1}+(2^{m-1}-1)}}_{2^{m-1}}\right)$$

$$> 1+\underbrace{2\cdot\frac{1}{4}}_{\left(2\cdot\frac{1}{2^2}\right)}+\underbrace{4\cdot\frac{1}{8}}_{\left(2^2\cdot\frac{1}{2^3}\right)}+\underbrace{8\cdot\frac{1}{16}}_{\left(2^3\cdot\frac{1}{2^4}\right)}+\dots+\underbrace{2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}}_{\left(2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}\right)} = 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2}}_{(m-1)}$$

$$= 1+(m-1)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{m+1}{2}.$$

Budući da je

$$\lim_{m\to\infty} S_{2^m-1}=\infty\,,$$

odatle zaključujemo da je posmatrani red određeno divergentan ka ∞. □

Napomena. *Red iz ovog zadatka nazivamo harmonijski red i označavamo*

$$H=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

a $n-$tu parcijalnu sumu određujemo sa

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}.$$

Primetimo da za harmonijski red H opšti član $\frac{1}{k}$ teži nuli, a harmonijski red H divergira ka ∞.

Teorema 1.5. *Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan, tada je $\lim_{k\to\infty} a_k=0$.*

Napomena. *Kontrapozicija ovog tvrđenja je:*

Ako (a_k) nije nula niz tada red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nije konvergentan, tj. tada je red divergentan.

Teorema 1.6. *Neka su redovi*

$$S_1=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad i \quad S_2=\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergentni i neka su $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ realni brojevi, tada je i red

$$S_3=\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)$$

konvergentan i važi

$$S_3=\alpha S_1+\beta S_2.$$

Primer 1.7. *Ispitati konvergenciju reda i ako je red konvergentan odrediti sumu reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k}{9^k}.$$

Rešenje. Uočimo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k}{9^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{9^k},$$

jer su redovi

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^k} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8} \qquad \text{i} \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{9^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{9}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

konvergentni. Samim tim polazni red konvergira i suma reda je

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

□

Napomenimo da važi sledeće tvrđenje.

Teorema 1.8.* (Košijev opšti kriterijum) *Red* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergira ako i samo ako je ispunjen kriterijum*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Longrightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon).$$

Za proizvoljan red $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (koji standardno počinje od $k_0 = 1$) i $n-$tu parcijalnu sumu $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ sa redom [♭)] $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ određujemo *ostatak reda.* Tada, na osnovu Košijevog opšteg kriterijuma važi:

$$\textit{red } S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ je konvergentan ako i samo ako } R_n = S - S_n \longrightarrow 0 \ (\textit{kada } n \to \infty).$$

Primer 1.9.* *Upotrebom Košijevog opšteg kriterijuma dokazati divergenciju harmonijskog reda*

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Rešenje. Posmatrajmo parcijalne sume:

$$H_{n+p} = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} \quad \text{i} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

[♭)] pri tom red R_n određuje niz po n, dok red $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, ako konvergira, je broj u $\mathbb{R}$ (za fiksirani početni indeks $k_0 \in \mathbb{N}$)

za $n, p \in \mathbb{N}$. Neka $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Birajući $p = 2n$ dokazujemo da nije $|H_{n+p} - H_n| = |H_{2n} - H_n| < \varepsilon$ za svako proizvoljno malo $\varepsilon > 0$. Zaista

$$\begin{aligned} |H_{2n} - H_n| &= \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} \\ &= n \cdot \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Budući da razlika $|H_{2n} - H_n| > 1/2$, ta razlika nije proizvoljno mala za n počev od nekog $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Navedeno dokazuje divergenciju harmonijskog reda. □

1.2. Redovi sa pozitivnim članovima

U ovoj sekciji razmatramo brojne redove $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ za nizove (a_k) sa pozitivnim članovima i takve redove nazivamo *redovima sa pozitivnim članovima.* Takvi redovi su ili konvergentni ili određeno divergentni ka ∞.

1.2.1. Kriterijumi poređenja. Važe tvrđenja kojima određujemo kriterijume poređenja:

Teorema 1.10. (I TEST POREĐENJA) *Neka su redovi*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad i \quad S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

sa pozitvnim članovima i neka je ispunjen uslov poređenja

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\, n \geq n_0 \implies a_n \leq b_n\,.$$

Tada važi

1°. *Ako red* $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergira tada konvergira i red* $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

2°. *Ako red* $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergira tada divergira i red* $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Teorema 1.11. (II TEST POREĐENJA) *Neka su redovi*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad i \quad S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

sa pozitvnim članovima i neka je ispunjen uslov

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

tj. da $a_n \sim c\, b_n$ $(n \to \infty)$. *Tada važi*

1°. *Red* $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergira ako i samo konvergira red* $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

2°. *Red* $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *divergira ako i samo divergira red* $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Primer 1.12. *Ispitati konvergenicju reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

za vrednosti $p < 1$.

Rešenje. Primetimo da za $p < 1$ važi poređenje

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{k^p} \qquad \left(\iff k^p < k^1\right),$$

za $k = 1, 2, \ldots$. Samim tim prema I kriterijumu poređenja iz divergencije harmonijskog reda

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

sleduje divergencija i posmatranog reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

□

Primer 1.13. *Ispitati konvergenicju reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Rešenje. Uzimajući u prethodnom zadatku

$$p = \frac{1}{2} < 1$$

sleduje odgovor u ovom zadatku posmatrani red divergira ka ∞. □

Primer 1.14. *Ispitati konvergenicju reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Rešenje. Primetimo da važi poređenje

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} \qquad \left(\iff k^2 - k < k^2\right),$$

za $k = 2, 3, \ldots$. Samim tim, prema I kriterijumu poređenja, iz konvergencije reda

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k}$$

sleduje konvergencija i posmatranog reda[♭)]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

□

[♭)] jer je $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Primer 1.15. *Ispitati konvergenicju reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{2\sqrt{k^3}+3}.$$

Rešenje. Primetimo da važi

$$a_k = \frac{k+2}{2\sqrt{k^3}+3} \sim \frac{k}{2k^{3/2}} = \frac{1}{2k^{1/2}} = b_k \quad (k \to \infty).$$

Budući da red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ divergira, prema II kriterijumu poređenja, tada i polazni red divergira. □

1.2.2. DALAMBEROV TEST

Teorema 1.16. (Dalamberov test)
Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *red sa pozitivnim članovima. Neka postoji*

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

tada važi:

- ***(i)*** *ako je* $L < 1$ *tada red konvergira,*
- ***(ii)*** *ako je* $L > 1$ *tada red divergira,*
- ***(iii)*** *ako je* $L = 1$ *tada za ispitivanje konvergencije reda je potrebno dodatno ispitivanje.*

Primer 1.17. *Ispitati konvergenciju reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

za vrednosti $p = 1$ *i* $p = 2$.
Rešenje. Važi

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)^p}}{\frac{1}{k^p}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^p = 1,$$

za vrednosti $p = 1$ i $p = 2$. Napomenimo na osnovu prethodnih primera da za vrednost $p = 1$ radi se o divergentnom harmonijskom redu

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

i za vrednost $p = 2$ radi se o kovergentnom redu

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

□

Primer 1.18. *Ispitati konvergenciju redova*

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2020^k}{k!}.$$

(ii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4^k}.$$

(iii)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}.$$

(iv)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}.$$

(v)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5k+1}} \left(\frac{3}{5}\right)^k.$$

Rešenje. ***(i)*** Važi

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2020^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2020^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2020}{k+1} = 0 < 1,$$

dakle posmatrani red konvergira.

(ii) Važi

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{4^{k+1}}}{\frac{k}{4^k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{4}\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{4} < 1,$$

dakle posmatrani red konvergira.

(iii) Važi

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{10^{k+1}}}{\frac{k!}{10^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{10} = \infty > 1,$$

dakle posmatrani red divergira.

(iv) Važi

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^k}{k^k} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e > 1,$$

dakle posmatrani red divergira.

(v) Važi

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5k+6}}\left(\frac{3}{5}\right)^{k+1}}{\frac{1}{\sqrt{5k+1}}\left(\frac{3}{5}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt{\frac{5k+1}{5k+6}} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} < 1,$$

dakle posmatrani red konvergira. □

Primer 1.19.* *Ispitati konvergenciju reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k k!}{k^k},$$

u zavisnosti od realnog parametra $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Važi

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{\alpha^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\dfrac{\alpha^k k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha\, k^k}{(k+1)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k} = \frac{\alpha}{e}.$$

Odatle sleduje zaključak

- ***(i)*** ako je $L = \alpha/e < 1 \iff \alpha < e$ tada red konvergira,
- ***(ii)*** ako je $L = \alpha/e > 1 \iff \alpha > e$ tada red divergira,
- ***(iii)*** ako je $L = \alpha/e = 1 \iff \alpha = e$ tada za ispitivanje konvergencije reda je potrebno dodatno ispitivanje. Jedan način za dodatno ispitivanje je baziran na upotrebi *Stirlingove formule*:

$$k! \sim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (k \to \infty).$$

Tada

$$a_k = \frac{e^k \cdot k!}{k^k} \sim \frac{e^k \cdot \sqrt{2\pi k}\,\dfrac{k^k}{e^k}}{k^k} = \sqrt{2\pi k} \quad (k \to \infty).$$

Navedeno je dovoljno za zaključak da za $\alpha = e$ posmatrani red je određeno divergentan ka ∞.

□

1.2.3. KOŠIJEV KORENI TEST

Teorema 1.20. (Košijev koreni test)
Neka je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *red sa pozitivnim članovima i neka postoji*

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k},$$

tada važi:

- ***(i)*** *ako je* $L < 1$ *tada red konvergira,*
- ***(ii)*** *ako je* $L > 1$ *tada red divergira,*
- ***(iii)*** *ako je* $L = 1$ *tada za ispitivanje konvergencije reda je potrebno dodatno ispitivanje.*

Primer 1.21. *Ispitati konvergenciju reda*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p},$$

za vrednosti $p = 1$ *i* $p = 2$.

Rešenje. Važi

$$L=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k^p}=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt[k]{k}\right)^p=\left(\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}\right)^p=1,$$

za vrednosti $p=1$ i $p=2$. Napomenimo na osnovu prethodnih primera da za vrednost $p=1$ radi se o divergentnom harmonijskom redu

$$H=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

i za vrednost $p=2$ radi se o kovergentnom redu

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

□

Primer 1.22. *Ispitati konvergenciju redova*

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}.$$

(ii)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{4^k}.$$

(iii)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}.$$

(iv)

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{k}\right)^{-k}.$$

(v)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5k+1}}\left(\frac{3}{5}\right)^k.$$

Rešenje. ***(i)*** Važi

$$L=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0<1,$$

dakle posmatrani red konvergira.

(ii) Važi

$$L=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{k}{4^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{k}}{4}=\frac{1}{4}<1,$$

dakle posmatrani red konvergira.

(iii) Važi

$$\begin{aligned}L&=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\\&=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)^k=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k=\frac{1}{e}<1,\end{aligned}$$

dakle posmatrani red konvergira.

(iv) Važi

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{k}\right)^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{k}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{k}\right)^{-1}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{k}\right)^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{k}} = 3 > 1,$$

dakle posmatrani red divergira.

(v) Važi

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{\sqrt{5k+1}}\left(\frac{3}{5}\right)^{k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt{5k+1}}}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[2k]{5k+1}}\right) = \frac{3}{5}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[2k]{k}\,\sqrt[2k]{5+\dfrac{1}{k}}}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}^{\,1/2}\,\sqrt[k]{5+\dfrac{1}{k}}^{\,1/2}}\right) = \frac{3}{5} < 1,$$

dakle posmatrani red konvergira. □

1.2.4. Međusobni odnos Dalamberovog i Košijevog korenog testa

Teorema 1.23. *Neka je dat red sa pozitivnim članovima* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. *Tada važi:*

$$\text{ako postoji } L = \lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} \in [0,\infty], \text{ tada } \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = L.$$

1.2.5. KOŠIJEV INTEGRALNI TEST

Teorema 1.24. (Košijev integralni test)

Neka je $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$ *red sa pozitvnim i nerastućim članovima počev od* $k_0 \in \mathbb{N}_0$, *tj.*

$$a_{k_0} \ge a_{k_0+1} \ge a_{k_0+2} \ge \dots\,.$$

Neka je $f : [k_0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *funkcija takva da važi:*

$$f(k) = a_k$$

za svako $k \in \{k_0, k_0+1, k_0+2, \dots\}$ *i pri tom neka je za funkciju* f *ispunjeno:*

(i) f *je neprekidna nad* $[k_0,\infty)$, *što označavamo* $f \in C\big([k_0,\infty)\big)$;

(ii) f *je pozitivna nad* $[k_0,\infty)$, *tj.* $\big(\forall x \in [k_0,\infty)\big)\ f(x) > 0$;

(iii) $f\ (\searrow)$ *je nerastuća nad* $[k_0,\infty)$.

Tada važi:

$$\text{red } \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ kovergira ako i samo ako nesvojstven integral } \int_{k_0}^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergira.}$$

Primer 1.25. *Ispitati konvergenciju reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

u zavisnosti od realnog parametra $p \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Za vrednosti $p \in (-\infty, 1]$ posmatrani red divergira saglasno I kriterijumu poređenja i dokazanoj divergenciji harmonijskog reda H.

Ispitajmo konvergenicju posmatranog reda u slučaju vrednosti $p > 1$ primenom Košijevog integralnog kriterijuma. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x^p} : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},$$

koja evidentno ispunjava uslove za primenu Košijevog integralnog testa. Budući da za $p > 1$ konvergira nesvojstveni integral

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx &= \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^{b} x^{-p}\,dx\right) = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{(1-p)\,b^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)}\right) = \frac{1}{p-1}\,,\end{aligned}$$

odatle zaključujemo da za $p > 1$ konvergira i posmatani red.

Važi zaključak:

$$\text{red } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ divergira za } p \le 1 \quad \text{i} \quad \text{red } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^p} \text{ konvergira za } p > 1. \qquad \square$$

Primer 1.26. *Ispitati konvergenciju reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}.$$

Rešenje. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Da bi primenili Košijev integralni test na funkciju f potrebno je samo ispitati njenu monotonost na razmatranom domenu. Važi

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Primetimo
$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=e.$$
Jednostavno se proverava $f'<0$ na (e,∞), dok je $f'>0$ na $(1,e)$. Za ispitivanje converegencije reda razmatranje nastavljamo sa startnim indeksom $k_0=3$, razmatrajući red
$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\ln k}{k}\,.$$
Navedeni red divergira jer divergira nesvojstveni integral
$$\begin{aligned}\int\limits_3^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\left(\int\limits_3^{b}\frac{\ln x}{x}\,dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\int\limits_3^{b}\ln x\,\frac{1}{x}\,dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\int\limits_3^{b}\ln x\,d\ln x\right)\\ &= (t=\ln x)=\lim_{b\to\infty}\left(\int\limits_{\ln 3}^{\ln b}t\,dt\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{\ln 3}^{\ln b}=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln^2 b}{2}-\frac{\ln^2 3}{2}\right)=\infty.\end{aligned}$$
Sveukupno divergira i polazni red
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k}=\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\ln k}{k}.$$
□

1.3. Redovi sa članovima naizmeničnog znaka

U ovoj sekciji razmatramo redove oblika
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k=a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{k-1}a_k+\ldots\,,$$
gde je $a_k>0$ $(k=1,2,3,\ldots)$, koje nazivamo alternativnim redovima ili redovima sa članovima naizmeničnog znaka. Takođe umesto prethodnog reda moguće je potpuno ekvivaletno razmatrati i alternativni red poče od nekog indeksa $k_0\in\mathbb{N}$. Za alternativne redove važi osnovno tvrđenje.

Teorema 1.27. (LAJBNICOV TEST)
Neka je dat alternativni red
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k.$$
1°. *Ako je niz (a_k) strogo opadajući nula niz:*
$$a_k\searrow 0\quad(\textit{kada } k\to\infty),$$
tada
$$\textit{alternativni red konvergira.}$$
2°. *Neka je R_n ostatak alternativnog reda, za $n\in\mathbb{N}$, tada važi:*
$$|R_n|<a_{n+1}.$$

Primer 1.28. *Ispitati konvegrenciju alternativnog reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

Rešenje. Niz

$$a_k=\frac{1}{k}$$

je evidentno pozitivan, strogo opadajući, nula niz. Samim tim prema Lajbnicovom testu posmatrani alternativni red je konvergentan. $\square$

Primer 1.29. *Ispitati konvegrenciju alternativnog reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{k^2+1}.$$

Rešenje. Niz

$$a_k=\frac{k}{k^2+1}$$

je evidentno pozitivan i nula niz. Ispitujemo kada je taj niz monotono opadajući. Za navedeno razmatramo funkciju

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}:[1,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$

jer je $a_k=f(k)$, za $k=1,2,3,\ldots$. Na osnovu izvoda

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}:[1,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$

evidentno je

$$\text{funkcija } f\searrow \text{ strogo monotono opadajuća na } [2,\infty).$$

Samim tim $a_1=\dfrac{1}{2}>a_2=\dfrac{2}{5}$ i nadalje $\big(\forall k\in\{2,3,4,\ldots\}\big)\ a_k>a_{k+1}$, tj. niz (a_k) je strogo opadajući. Prema Lajbnicovom testu posmatrani alternativni red je konvergentan. $\square$

Primer 1.30. *Ispitati konvegrenciju alternativnog reda*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2k-1}{k(k+1)}.$$

Rešenje. Niz

$$a_k=\frac{2k-1}{k(k+1)}$$

je evidentno pozitivan i nula niz. Ispitujemo kada je taj niz monotono opadajući. Za navedeno razmatramo funkciju

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2+x}:[1,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$

jer je $a_k=f(k)$, za $k=1,2,3,\ldots$. Na osnovu izvoda

$$f'(x)=\left(\frac{2x-1}{x^2+x}\right)'=\frac{2\cdot(x^2+x)-(2x-1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x)^2}=\frac{-2x^2+2x-1}{(x^2+x)^2}:[1,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$$

evidentno je

$$\text{funkcija } f \searrow \text{ strogo monotono opadajuća na } [2, \infty),$$

jer su koreni kvadratne jednačine $-2x^2 + 2x - 1 = 0$ brojevi $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$ i $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$. Pri tom $a_1 = \dfrac{1}{2} = a_2$ i nadalje $\big(\forall k \in \{2, 3, 4, \ldots\}\big)\ a_k > a_{k+1}$, tj. niz (a_k) je strogo opadajući počev od indeksa $k_0 = 2$. Prema Lajbnicovom testu alternativni red $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ je konvergentan, a time i polazni alternativni red $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$. □

LITERATURA

M. Jovanović: *Teorija redova*, predavanja, ETF Beograd 2018.

M. Merkle: *Matematička naliza – pregled teorije i zadaci*, Grosknjiga, Beograd 1994.

P.M. Vasić, R.R. Janić, V.Lj. Kocić, I.B. Lacković, I.B. Lazarević, S.K. Simić: *Matematika II*, ETF Beograd 1991.

D.S. Mitrinović, J.D. Kečkić: *Matematika II – Redovi, diferencijalne jednačine, kompleksna analiza, Laplaceova transformacija*, Građevinska knjiga, Beograd 1981.

D.S. Mitrinović: *Predavanja o redovima*, Građevinska knjiga, Beograd 1974.

D.S. Mitrinović, D.D. Adamović: *Nizovi i redovi*, Naučna knjiga, Beograd 1971.