



# PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

*Elektrotehnički fakultet  
Katedra za telekomunikacije  
Beograd, 2020/2021.*



# -Vežbe I-

# Statistički kodovi

# Zadatak 1

*Kraftova nejednakost tvrdi da uvek može da se napravi trenutni kod sa dužinama kodnih reči  $l_1, l_2, \dots, l_q$  ako je zadovoljena relacija*

$$\sum_{i=1}^q 2^{-l_i} \leq 1$$

Neka izvor emituje sekvencu sastavljenu od simbola K, I, Š, A, a primenjen je neki od statističkih kodova navedenih u nastavku. Proveriti da li je za njih ispunjena Kraftova nejednakost i da li su ovi kodovi trenutni!

Simboli	Prvi kod	Drugi kod	Treći kod
K	00	001	110
I	01	10	10
Š	10	0001	1110
A	11	1	0

# Zadatak 1

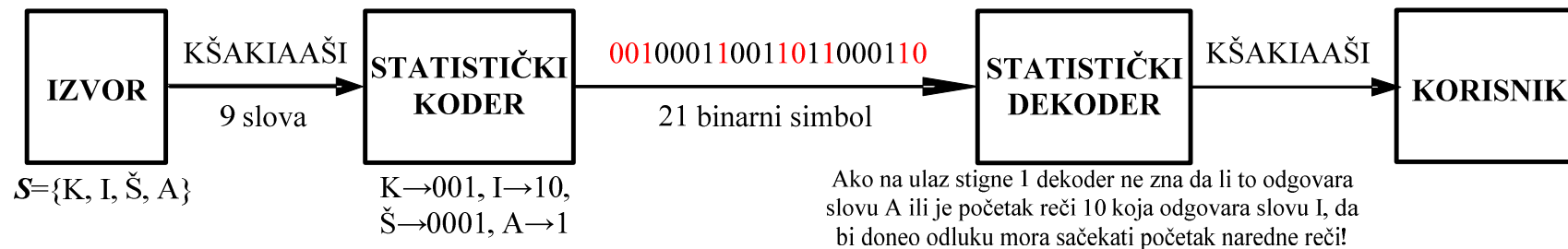
Za prosti binarni kod je  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2$  i Kraftova relacija je zadovoljena sa jednakošću (kod je kompletan):

$$\sum_{i=1}^4 2^{-l_i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Za drugo i treće predloženo rešenje važi  $l_1 = 3, l_2 = 2, l_3 = 4, l_4 = 1$ , pa se lako dobija

$$\sum_{i=1}^4 2^{-l_i} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{15}{16} < 1$$

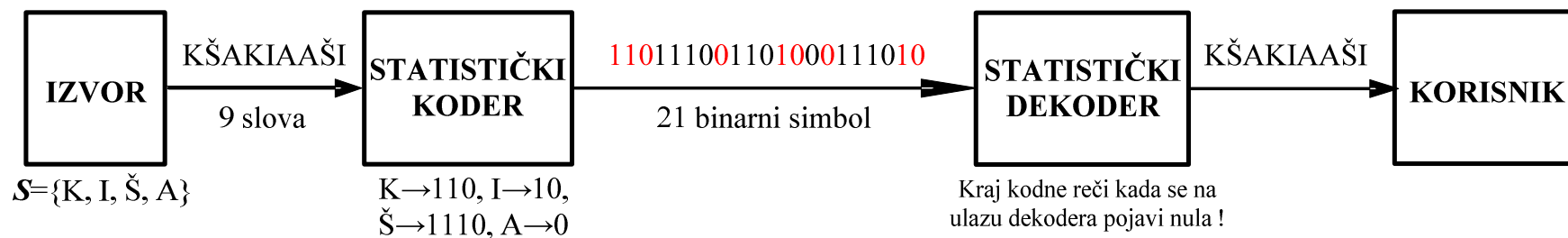
Ipak, drugi kod nije trenutan (iako jeste jednoznačno dekodibilan) jer je kodna reč 1 prefiks kodne reči 10!



# Zadatak 1

Treći kod je dokaz da se za iste dužine kodnih reči može napraviti trenutani kod. To je koma kod, gde 0 označava kraj kodne reči. Na ovaj način se obezbeđuje da u samoj kodnoj reči imamo separator, pa nije potrebno dodavati simbole koji bi razdvojili kodne reči!

Simboli	Treći kod
K	110
I	10
Š	1110
A	0



# Zadatak 1

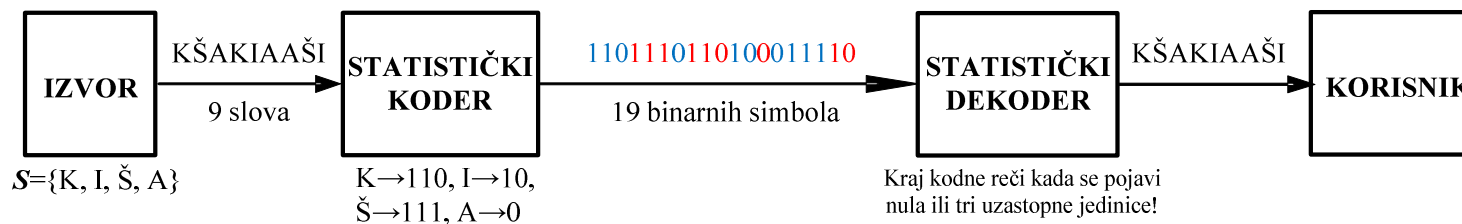
Moguća je dodatna modifikacija trećeg koda:

Simboli	Modifikovan treći kod
K	110
I	10
Š	111
A	0

Kraftova nejednakost:

$$\sum_{i=1}^4 2^{-l_i} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = 1$$

Ovo je modifikovani koma kod, gde se kraj kodne reči pojavljuje kada se pojavi 0 ili maksimalan dozvoljeni broj jedinica.



## Zadatak 2

Izvršiti binarno statističko kodovanje izvora informacija bez memorije koji emituje  $q=6$  simbola sa sledećim verovatnoćama:

$s_i$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$
$P(s_i)$	0,65	0,05	0,08	0,15	0,04	0,03

- Primeniti binarni Hafmenov postupak kodovanja, odrediti efikasnost dobijenog koda, ostvareni stepen kompresije primenom Hafmenovog algoritma i maksimalni stepen kompresije za ovaj izvor.
- Nacrtati kodno stablo koje odgovara ovom kodu.
- Ako izvor emituje sekvencu simbola  $s_2, s_1, s_4, s_1, s_5, s_3, s_6$  i kanal greši pri prenosu prvog i osmog bita, odrediti dekodovanu sekvencu u svakom od dva posmatrana slučaja.

# Zadatak 2 – rešenje (1)

**Rešenje:** Hafmenov postupak ilustrovan pomoću tabele

$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$
$s_1$	0,65	0	$s_1$	0,65	0	$s_1$	0,65	0	$s_1$	0,65	0	$s_1$	0,65	0
$s_4$	0,15	11	$s_4$	0,15	11	$s_4$	0,15	11	$s_2s_3s_5s_6$	<b>0,20*</b>	10	$s_2s_3s_4s_5s_6$	0,35*	1
$s_3$	0,08	101	$s_3$	0,08	101	$s_2s_5s_6$	<b>0,12*</b>	100	$s_4$	<b>0,15</b>	11			
$s_2$	0,05	1001	$s_5s_6$	<b>0,07*</b>	1000	$s_3$	<b>0,08</b>	101						
$s_5$	<b>0,04</b>	10000	$s_2$	<b>0,05</b>	1001									
$s_6$	<b>0,03</b>	10001												

**Entropija**

$$H(S) = \sum_{i=1}^6 P(s_i) \lg \frac{1}{P(s_i)} = 1,66 \text{ [Sh/simb]}$$

**Srednja dužina kodne reči**

$$L = \sum_{i=1}^6 P(s_i) l(s_i) = 0,65 \times 1 + 0,05 \times 4 + 0,08 \times 3 + 0,15 \times 2 + 0,04 \times 5 + 0,03 \times 5 = 1,74 \text{ [b/simb]}$$

**Efikasnost koda**

$$\eta = \frac{H(S)}{L} \times 100\% = 95,4\%$$



## Zadatak 2 – rešenje (2)

Ostvareni stepen kompresije  $\rho$  pokazuje koliko se puta smanjuje broj bita na izlazu statističkog kodera u poređenju sa slučajem kada je primenjen binarni kod

$$\rho = \frac{\lceil \lg q \rceil}{L} = \rho_{\max} \eta$$

\*Operator  $\lceil \cdot \rceil$  označava prvi veći (ili jednak) ceo broj od vrednosti argumenta

$$\rho = \frac{\lceil \lg q \rceil}{L} = \frac{3}{1,74} = 1,724$$

$\rho_{\max}$  – maksimalna moguća vrednost stepena kompresije

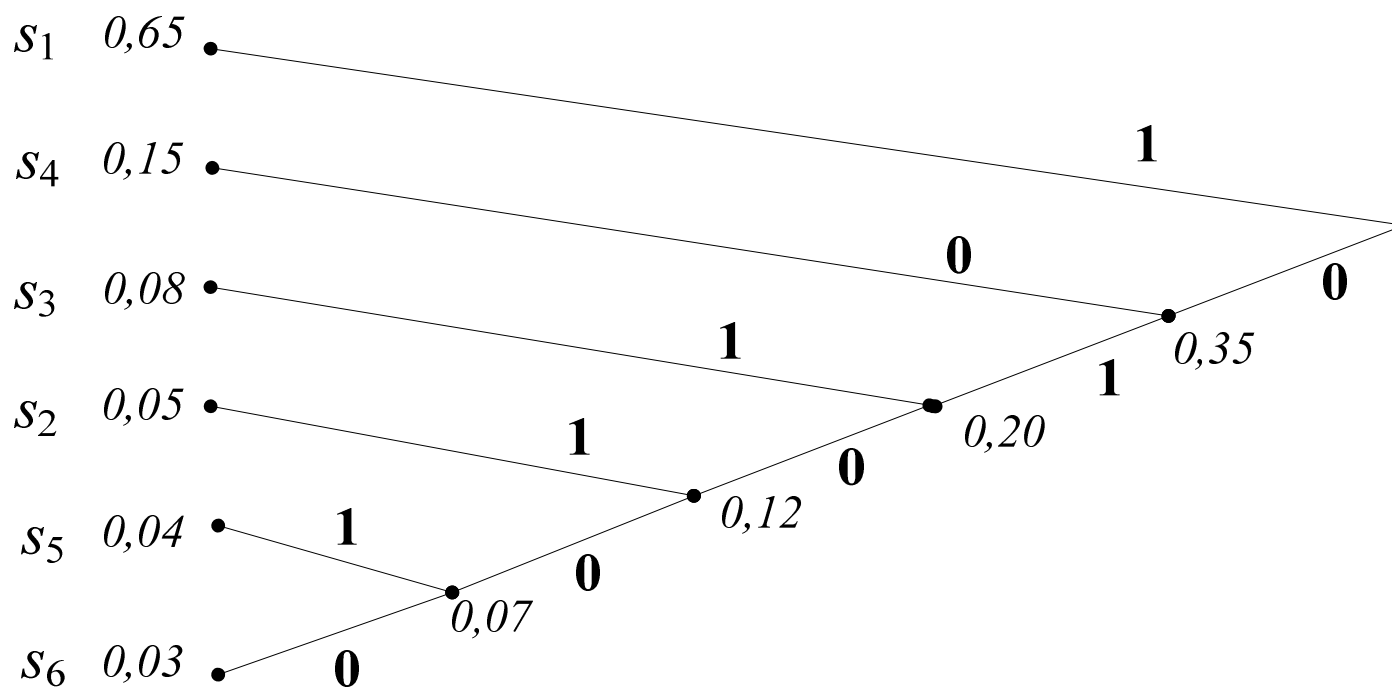
$\rho_{\max}$  ne zavisi od primenjenog koda već je karakteristika izvora i pokazuje koliki je „kompresioni potencijal izvora“ a definisana je izrazom.

$$\rho_{\max} = \frac{\lceil \lg q \rceil}{H(S)} = 1.8072$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \forall c$$

## Zadatak 2 – rešenje (3)

### b) Hafmenov postupak ilustrovan pomoću stabla



## Zadatak 2 – rešenje (4)

c) Izvor emituje sekvencu simbola  $s_2, s_1, s_4, s_1, s_5, s_3, s_6$ , kanal greši pri prenosu prvog i osmog bita

$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$
$s_1$	0,65	0
$s_2$	0,05	1001
$s_3$	0,08	101
$s_4$	0,15	11
$s_5$	<b>0,04</b>	10000
$s_6$	<b>0,03</b>	10001

$s_2$	$s_1$	$s_4$	$s_1$	$s_5$	$s_3$	$s_6$	
<u>1</u> 001	0	11	<u>0</u>	10000	101	10001	
<b>0</b>	0	0	101	11	10000	101	10001
$s_1$	$s_1$	$s_1$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_3$	$s_6$

## Zadatak 3

Izvršiti Hafmenovo kodovanje simbola iz zadate liste

$s_i$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$
$P(s_i)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.07	0.03

ako se novodobijeni simbol pri redukciji uvek stavlja na poslednje mesto u skupu jednakih verovatnoća ili se stavlja proizvoljno.

Za svako od dva rešenja odrediti:

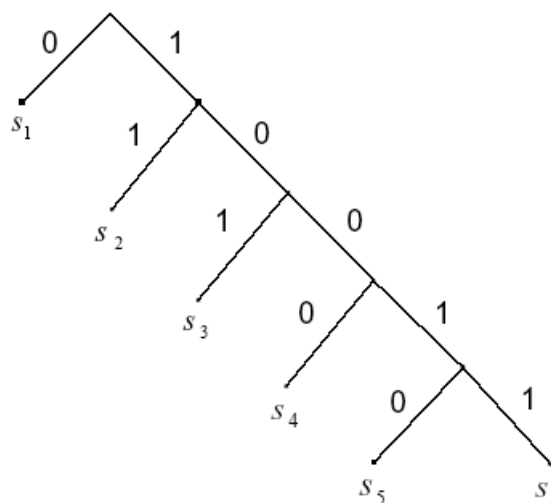
- Entropiju
- Srednju dužinu kodne reči
- Postignutu efikasnost

# Zadatak 3 – rešenje 1

\* Postupak ilustrovan tabelom:

$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$
$s_1$	0.5	0	$s_1$	0.5	0	$s_1$	0.5	0	$s_1$	0.5	0	$s_1$	0.5	0
$s_2$	0.2	11	$s_2$	0.2	11	$s_2$	0.2	11	$s_3 s_4 s_5 s_6$	0.3*	10	$s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$	0.5*	1
$s_3$	0.1	101	$s_3$	0.1	101	$s_4 s_5 s_6$	0.2*	100	$s_2$	0.2	11			
$s_4$	0.1	1000	$s_4$	0.1	1000	$s_3$	0.1	101						
$s_5$	0.07	10010	$s_5 s_6$	0.1*	1001									
$s_6$	0.03	10011												

\* Kodno stablo



# Srednja dužina kodne reči, efikasnost – rešenje 1

## \* Srednja dužina kodne reči:

$$L_{sr} = 0.5 * 1 + 0.2 * 2 + 0.1 * 3 + 0.1 * 4 + 0.07 * 5 + 0.03 * 5 = 2.1 \text{ [b / simb]}$$

## \* Entropija izvora

$$H(s) = \sum_{i=1}^6 P(s_i) \log_2 \frac{1}{P(s_i)} = 2.0502 \text{ [Sh / simb]}$$

## \* Efikasnost

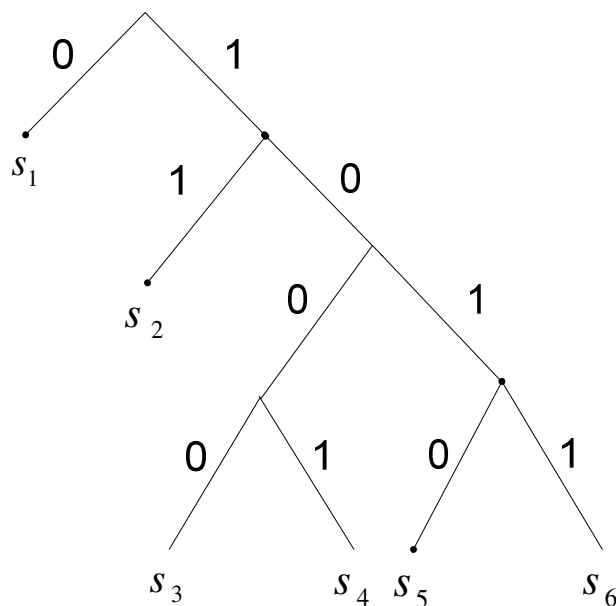
$$\eta = \frac{H(s)}{L_{sr}} \cdot 100\% = 97.63\%$$

# Zadatak 3 – rešenje 1

\* Postupak ilustrovan tabelom:

$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$
$s_1$	0.5	0	$s_1$	0.5	0	$s_1$	0.5	0	$s_1$	0.5	0	$s_1$	0.5	0
$s_2$	0.2	11	$s_2$	0.2	11	$s_2$	0.2	11	$s_3s_4s_5s_6$	0.3*	10	$s_2s_3s_4s_5s_6$	0.5*	1
$s_3$	0.1	1000	$s_5s_6$	0.1*	101	$s_3s_4$	0.2*	100	$s_2$	0.2	11			
$s_4$	0.1	1001	$s_3$	0.1	1000	$s_5s_6$	0.1	101						
$s_5$	0.07	1010	$s_4$	0.1	1001									
$s_6$	0.03	1011												

\* Kodno stablo



# Srednja dužina kodne reči, efikasnost – rešenje 2

## \* Srednja dužina kodne reči:

$$L_{sr} = 0.5 * 1 + 0.2 * 2 + 0.1 * 4 + 0.1 * 4 + 0.07 * 4 + 0.03 * 4 = 2.1 \text{ [b / simb]}$$

## \* Entropija izvora

$$H(s) = \sum_{i=1}^6 P(s_i) \log_2 \frac{1}{P(s_i)} = 2.0502 \text{ [Sh / simb]}$$

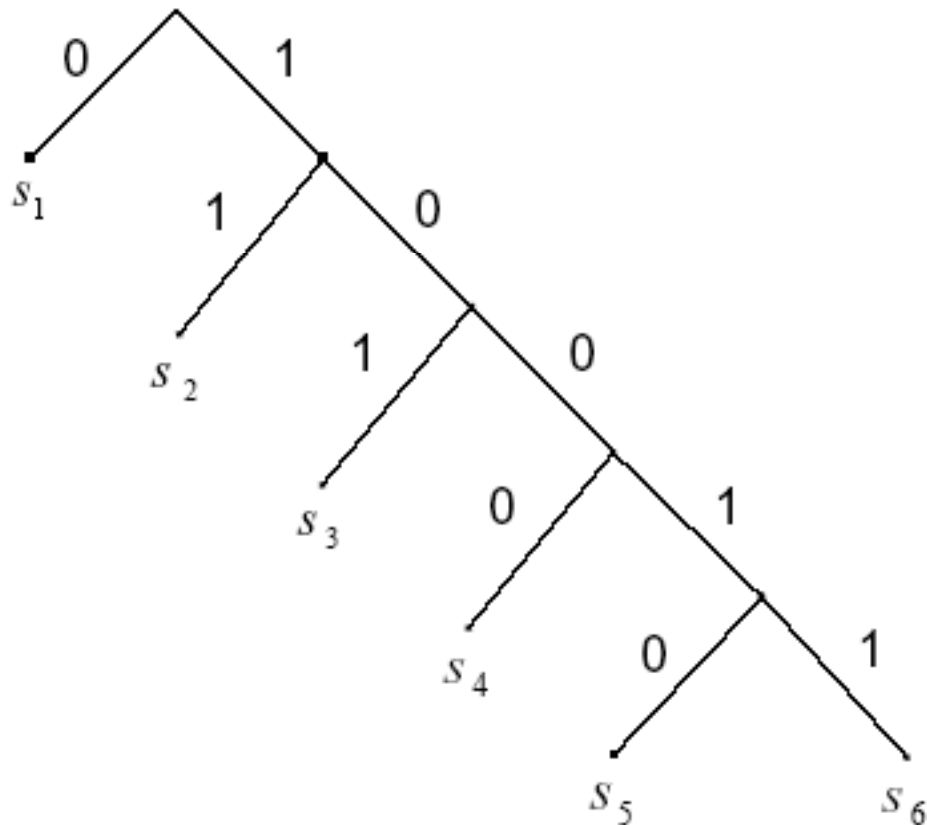
## \* Efikasnost

$$\eta = \frac{H(s)}{L_{sr}} \cdot 100\% = 97.63\%$$

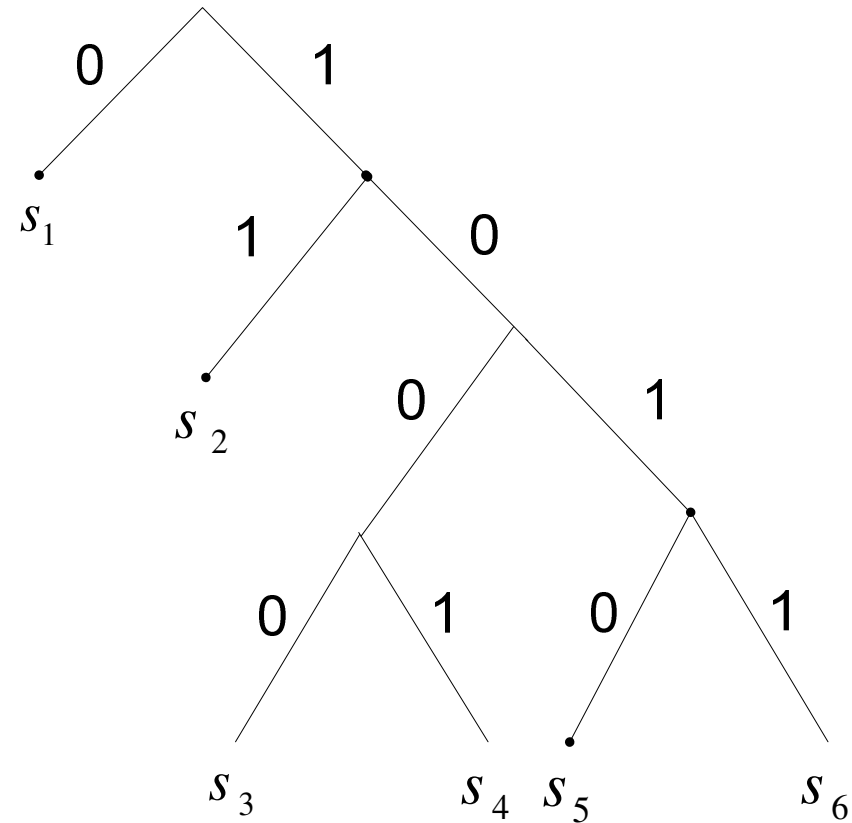


# Kodno stablo – poređenje dva rešenja

\* Predstava koda koje odgovara prvom rešenju :



\* Stablo koje odgovara drugom mogućem rešenju koje ima istu srednju dužinu kodne reči:



# Zadatak 4

Posmatra se izvor koji emituje dva simbola sa sledećim verovatnoćama:  
 $P(s_1)=0.7$ ,  $P(s_2)=0.3$ .

Izvršiti binarno statističko kodovanje (po Hafmenovom postupku) izvora informacija, njegovog drugog i trećeg proširenja.

\* Rešenje:

I Originalni izvor:

Postupak statističkog kodovanja elemenata liste originalnog izvora:

$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$
$s_1$	0.7	0
$s_2$	0.3	1

Entropija originalnog izvora:  $H(S) = 0.7 \cdot \lg \frac{1}{0.7} + 0.3 \cdot \lg \frac{1}{0.3} = 0.8813 \text{ Sh / simb}$

Srednja dužina kodne reči:  $L_{sr} = 0.7 * 1 + 0.3 * 1 = 1 \text{ b / simb}$

Efikasnost  
 $\eta = \frac{0.8813}{1} \cdot 100\% = 88.13\%$

Koeficijent kompresije  
 $\rho = \frac{\lceil \lg q \rceil}{L} = \frac{1}{1} = 1$

# Zadatak 4 –rešenje (1)

\* II Drugo proširenje:

- Postupak statističkog kodovanja elemenata liste II proširenja izvora:

$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$
$\sigma_1 = s_1 s_1$	0.49	1	$\sigma_1$	0.49	1	$\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$	0.51*	0
$\sigma_2 = s_1 s_2$	0.21	01	$\sigma_3 \sigma_4$	<b>0.30*</b>	00	$\sigma_1$	0.49	1
$\sigma_3 = s_2 s_1$	<b>0.21</b>	000	$\sigma_2$	<b>0.21</b>	01			
$\sigma_4 = s_2 s_2$	<b>0.09</b>	001						

\* Entropija

$$H(S^2) = 2H(S) = 1.7626 \text{ Sh / simb}$$

\* Srednja dužina kodne reči

$$L_2 = 0.49 * 1 + 0.21 * 2 + 0.21 * 3 + 0.09 * 3 = 1.81 \text{ b / simb}$$

\* Efikasnost

$$\eta = \frac{1.7626}{1.81} \cdot 100\% = 97.38\%$$

\* Koeficijent kompresije

$$\rho = \frac{\lceil \lg q \rceil}{L_2} = \frac{2}{1.81} = 1.105$$

# Zadatak 4 –rešenje (2)

## III Treće proširenje: Postupak statističkog kodovanja elemenata liste III proširenja izvora:

$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$S_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$
$\sigma_1=s_1 s_1 s_1$	0.343	<b>00</b>	$\sigma_1$	0.343	<b>00</b>	$\sigma_1$	0.343	<b>00</b>	$\sigma_1$	0.343	<b>00</b>
$\sigma_2=s_1 s_1 s_2$	0.147	<b>11</b>	$\sigma_2$	0.147	<b>11</b>	$\sigma_2$	0.147	<b>11</b>	$*\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.216	<b>10</b>
$\sigma_3=s_1 s_2 s_1$	0.147	<b>010</b>	$\sigma_3$	0.147	<b>010</b>	$\sigma_3$	0.147	<b>010</b>	$\sigma_2$	0.147	<b>11</b>
$\sigma_4=s_1 s_2 s_2$	0.063	<b>1000</b>	$\sigma_5$	0.147	<b>011</b>	$\sigma_5$	0.147	<b>011</b>	$\sigma_3$	0.147	<b>010</b>
$\sigma_5=s_2 s_1 s_1$	0.147	<b>011</b>	$*\sigma_7\sigma_8$	0.090	<b>101</b>	$*\sigma_4\sigma_6$	0.126	<b>100</b>	$\sigma_5$	0.147	<b>011</b>
$\sigma_6=s_2 s_1 s_2$	0.063	<b>1001</b>	$\sigma_4$	0.063	<b>1000</b>	$\sigma_7\sigma_8$	0.090	<b>101</b>			
$\sigma_7=s_2 s_2 s_1$	0.063	<b>1010</b>	$\sigma_6$	0.063	<b>1001</b>						
$\sigma_8=s_2 s_2 s_2$	0.027	<b>1011</b>									

$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$	$s_i$	$P(s_i)$	$x_i$
$\sigma_1$	0.343	<b>00</b>	$*\sigma_2\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.363	<b>1</b>	$*\sigma_1\sigma_3\sigma_5$	0.637	<b>0</b>
$*\sigma_3\sigma_5$	0.294	<b>01</b>	$\sigma_1$	0.343	<b>00</b>	$\sigma_2\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.363	<b>1</b>
$\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.216	<b>10</b>	$\sigma_3\sigma_5$	0.294	<b>01</b>			
$\sigma_2$	0.147	<b>11</b>						

# Zadatak 4 –rešenje (3)

## III Treće proširenje:

\* **Entropija**  $H(S^3) = 3H(S) = 2.6439 \text{ Sh / simb}$

\* **Srednja dužina kodne reči**

$$\begin{aligned} L_3 &= 2*(0.343 + 0.147) + 3*(0.147 + 0.147) + 4*(0.063 + 0.063 + 0.063 + 0.027) = \\ &= 2*0.49 + 3*0.294 + 4*0.216 = 2.726 \text{ b / simb} \end{aligned}$$

\* **Efikasnost**  $\eta = \frac{2.6439}{2.726} \cdot 100\% = 96.98\%$

**Koeficijent kompresije**  $\rho = \frac{[\text{ld } q]}{L} = \frac{3}{L} = \frac{3}{2.726} = 1.1005$

## Zadatak 4

Kako zavisi efikasnost od verovatnoće binarnih simbola?

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$P(s_2) = 0,1$	46.90	72.71	88.05	95.22	97.67	99.75	98.87
$P(s_2) = 0,3$	88.13	97.38	96.99	98.82	99.13	99.22	99.64
$P(s_2) = 0,5$	100	100	100	100	100	100	100

Jasno je da efikasnost raste sa povećanjem reda proširenja.

Za bilo koji odnos verovatnoća, uz pomoć proširenja efikasnost asimptotski teži ka vrednosti , odnosno da se u tom slučaju postigne maksimalan stepen kompresije

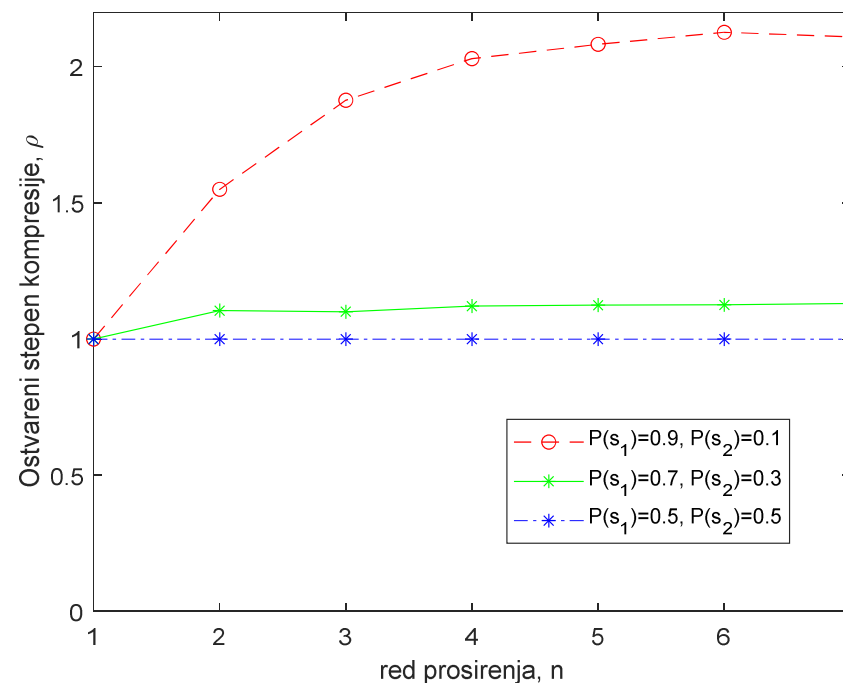
Najbolji rezultat za jednakoverovatne simbole?

Hafmen je tada jeste optimalan čak i ako se ne rade proširenja (kao i binarni kod), ali tada uopšte nema kompresije!

# Zadatak 4

Stepen kompresije je često i bitniji od efikasnosti, jer on pokazuje koliko je uspešan posmatrani postupak kompresije, tj. koliko puta se može skratiti dužina komprimovane sekvence u odnosu na sekvencu koja bi se dobila primenom prostog binarnog koda. Sa povećanjem reda proširenja, stepen kompresije teži svojoj maksimalnoj vrednosti ( $\rho_{\max}$ ), koja je data izrazom

$$\rho_{\max} = \frac{\lceil \text{ld}(q) \rceil}{H(S)}$$

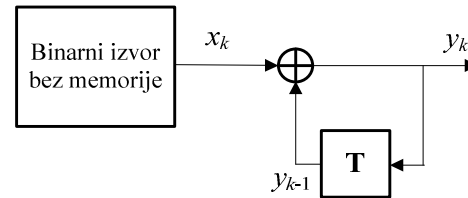


# Zadatak 5

- \* Neka se na ulazu u *diferencijalni koder* nalazi statistički nezavisni binarni niz nula i jedinica gde je verovatnoća pojave jedinice  $p$  a pojave nule  $q=1-p$ .

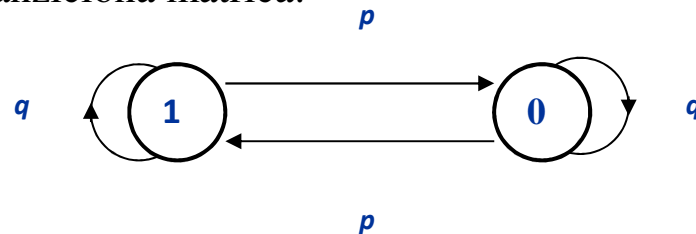
- Entropija izvora koji emituje ovaj niz je

$$H(S) = p \log(1/p) + q \log(1/q).$$



- \* Neka je primenjeno diferencijalno kodovanje jedinice, tj. neka pojava jedinice u ulaznom nizu izaziva promenu vrednosti linijskog signala s jednog nivoa na drugi, dok pojava nule ostavlja tekući nivo nepromenjen.

- Diferencijalnim kodovanjem se uvodi statistička zavisnost u linijski signal – dobija se Markovljev niz prvoga reda.
- Sada je verovatnoća pojave 0 posle 0 ili 1 posle 1 ravna verovatnoći pojave nule u originalnom – informacionom nizu ( $q$ ), a verovatnoća pojave 0 posle 1 ili 1 posle 0 ravna verovatnoći pojave jedinice u istom nizu ( $p$ ).
- Dijagram stanja i tranziciona matrica:





# Zadatak 5

- \* Stacionarne verovatnoće linijskih simbola su po 0,5. Dijagram je potpuno simetričan a i tranziciona matrica je dvostruko stohastička ( $p+q=1$ ).
- \* Prema tome, entropija linijskog signala se računa koristeći sledeće verovatnoće:

$s_i, s_j$	$P(s_j/s_i)$	$P(s_i)$	$P(s_i, s_j) = P(s_i)P(s_j/s_i)$
00	$q$	0,5	$0,5q$
01	$p$	0,5	$0,5p$
10	$p$	0,5	$0,5p$
11	$q$	0,5	$0,5q$

- \* Entropija:

$$H(S) = 0,5q \log_2 \frac{1}{q} + 0,5p \log_2 \frac{1}{p} + 0,5p \log_2 \frac{1}{p} + 0,5q \log_2 \frac{1}{q} = p \log_2 \frac{1}{p} + q \log_2 \frac{1}{q}.$$

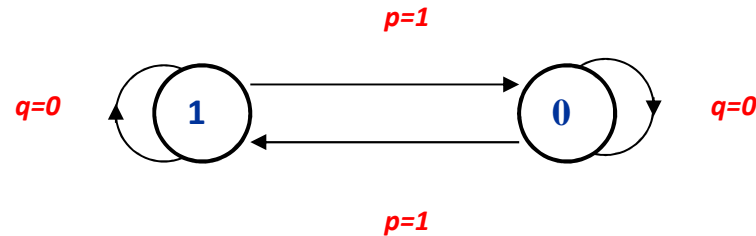
- \* Ovaj rezultat je logičan, jer se diferencijalnim kodovanjem ne može promeniti količina informacija u originalnom nizu.
  - treba zapaziti da je entropija pridruženog izvora 1 Sh/simb.
  - nule i jedinice u linijskom signalu su podjednako verovatne bez obzira na verovatnoće nula i jedinica u informacionom nizu

## Zadatak 5

- \* Odrediti entropiju sekvence

‘ 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 ’

- \* Očigledno je u pitanju izvor prvog reda pa je dijagram stanja i izraz za entropiju isti kao u prethodnom primeru



$$H(S) = p \log_2 \frac{1}{p} + q \log_2 \frac{1}{q} = 1 \times \log_2 \frac{1}{1} + 0 \times \log_2 \frac{1}{0} = 0 \text{ [Sh / simb]}$$

- \* Pošto je entropija jednaka nuli, jasno je da ovaj izvor ne emituje informacije!
  - U pitanju je deterministički signal, on ne emituje informaciju!
  - Primena izraza za entropiju izvora bez memorije dala bi pogrešan rezultat  $H(S) = 0.5 \log_2 2 + 0.5 \log_2 2 = 1 \text{ Sh/simb}$ .