PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2020/2021.

-Vežbe II-

Hemingovi kodovi

Zadatak 1

a) Objasniti konstrukciju Hemingovog koda (8,4) i ilustrovati postupak rada kodera i dekodera ako je informaciona reč *i*=(1110) i kanal unosi grešku na trećem bitu kodne reči.

b) Detaljno objasniti postupak dekodovanja sekvenci (00000101) i (00101100).

Rešenje:

Konstrukcija je ista kao kod Hemingovog (7,4) koda, samo se dodaje još jedna provera na parnost, tj. četvrti kontrolni bit.

Postupak kodovanja

$$z_1 = c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4$$

$$z_2 = c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$z_3 = c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$z_4 = \sum_{i=1}^{7} c_i = z_1 \oplus z_2 \oplus i_1 \oplus z_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$

Kodna reč $c = \left[z_1 \ z_2 \ i_1 \ z_3 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ z_4 \right]$

Šablon

l	bin(l)	c_i
1	00**<u>1</u>**	z_1
2	0**<u>1</u>**0	z_2
3	011	i_1
4	**<u>1</u>**00	z_3
5	101	i_2
6	110	i_3
7	111	i_4

Zadatak 1 - rešenje (1)

Informaciona reč i=(1110) $\Rightarrow$ informacioni biti su i_1=1, i_2=1, i_3=1, i_4=0

Kontrolni biti su

$$z_1 = c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$z_2 = c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$z_3 = c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

Provera na parnost

$$z_4 = \sum_{i=1}^{7} c_i = z_1 \oplus z_2 \oplus i_1 \oplus z_3 \oplus i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Kodna reč $\quad c = [0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1]$

Ukoliko je pri prenosu došlo do greške na 3. bitu, primljena je sekvenca

$$r = [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1]$$

Zadatak 1 - rešenje (2)

Postupak dekodovanja

Kontrolne sume imaju vrednosti

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ s_2 &= r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ s_3 &= r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Sindrom je

$$\mathbf{S} = (s_3\ s_2\ s_1) = (0\ 1\ 1) = 3$$

$$s_4 = \sum_{i=1}^{8} r_i = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

***Pošto je s_4=1, postojao je neparan broj grešaka pri prenosu (na prvih sedam pozicija!), tj. jedna, tri, pet ili sedam grešaka. Ukoliko je p=10^{-3} verovatnoće da se ovo desi su, respektivno:**

$$P_{e1} = \binom{8}{1} p(1-p)^7 \approx 8 \cdot 10^{-3},\ P_{e3} = \binom{8}{3} p^3(1-p)^5 \approx 5.6 \cdot 10^{-8},\ P_{e5} = \binom{8}{5} p^5(1-p)^3 \approx 5.6 \cdot 10^{-14},\ P_{e7} = \binom{8}{7} p^7(1-p) \approx 8 \cdot 10^{-21}$$

***U skladu sa određenim verovatnoćama, logična pretpostavka je da se desila jedna greška i to baš na 3. poziciji na koju pokazuje sindrom.**

***Primljena reč se zato koriguje i rekonstruisana informaciona reč je**

$$\hat{\boldsymbol{c}} = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1)\ \Rightarrow\ \hat{\boldsymbol{i}} = (1\ 1\ 1\ 0)$$

Zadatak 1 - rešenje (3)

b) Primljena reč je *r*=(00000101), pa kontrolne sume imaju oblik:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \\ s_2 &= r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \\ s_3 &= r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{S} = (s_3 s_2 s_1) = (110) = 6$$

$$s_4 = \sum_{i=1}^{8} r_i = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

Kako je s_4=0, postojao je paran broj grešaka pri prenosu, a to je slučaj kada sasvim sigurno ne mogu da se isprave greške. Tada vrednost sindroma ne ukazuje na poziciju ni jedne od nastalih grešaka.

Zadatak 1 - rešenje (4)

Primljena reč je *r*=(00101100), pa kontrolne sume imaju oblik:

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0, \\ s_2 &= r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0, \\ s_3 &= r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = (s_3 s_2 s_1) = (000) = 0$$

$$s_4 = \sum_{i=1}^{8} r_i = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1.$$

- **$s_4=1 \Rightarrow$ postojao je neparan broj grešaka pri prenosu.**
- **Vrednost sindroma pokazuje da grešaka nije bilo.**
- **Vrednost sindroma se računa samo na osnovu prvih sedam bita kodne reči, dok ukupna provera parnosti uključuje i poslednji (osmi) bit.**
- **Došlo je do greške na poslednjem bitu kodne reči**
- **Rekonstruisana informaciona reč je** $\hat{\boldsymbol{i}} = (1\ 1\ 1\ 0)$

Zadatak 2

Izvršiti kodovanje sekvence 10101010101 kodom (15,11) i dekodovanje odgovarajuće primljene reči ako je pri prenosu deveti bit pogrešno primljen. Koliko grešaka može da koriguje a koliko da detektuje ovaj kod?

Rešenje:

Šablon

l	bin(l)	c_l
1	000**1**	z_1
2	00**1**0	z_2
3	0011	i_1
4	0**1**00	z_3
5	0101	i_2
6	0110	i_3
7	0111	i_4
8	**1**000	z_4
9	1001	i_5
10	1010	i_6
11	1011	i_7
12	1100	i_8
13	1101	i_9
14	1110	i_{10}
15	1111	i_{11}

***Kod (15,11) detektuje i koriguje po jednu grešku.**

Postupak kodovanja

$$i=(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$$

$$z_1=c_3\oplus c_5\oplus c_7\oplus c_9\oplus c_{11}\oplus c_{13}\oplus c_{15}=i_1\oplus i_2\oplus i_4\oplus i_5\oplus i_7\oplus i_9\oplus i_{11}=1$$

$$z_2=c_3\oplus c_6\oplus c_7\oplus c_{10}\oplus c_{11}\oplus c_{14}\oplus c_{15}=i_1\oplus i_3\oplus i_4\oplus i_6\oplus i_7\oplus i_{10}\oplus i_{11}=0$$

$$z_3=c_5\oplus c_6\oplus c_7\oplus c_{12}\oplus c_{13}\oplus c_{14}\oplus c_{15}=i_2\oplus i_3\oplus i_4\oplus i_8\oplus i_9\oplus i_{10}\oplus i_{11}=1$$

$$z_4=c_9\oplus c_{10}\oplus c_{11}\oplus c_{12}\oplus c_{13}\oplus c_{14}\oplus c_{15}=i_5\oplus i_6\oplus i_7\oplus i_8\oplus i_9\oplus i_{10}\oplus i_{11}=0$$

$$c=(z_1\ z_2\ i_1\ z_3\ i_2\ i_3\ i_4\ z_4\ i_5\ i_6\ i_7\ i_8\ i_9\ i_{10}\ i_{11})=(1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$$

Zadatak 2 - rešenje (1)

Deveti bit je pogrešno prenesen pa je primljena reč

$$r = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$$

Postupak dekodovanja

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 \oplus r_9 \oplus r_{11} \oplus r_{13} \oplus r_{15} = 1 \\ s_2 &= r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{14} \oplus r_{15} = 0 \\ s_3 &= r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14} \oplus r_{15} = 0 \\ s_4 &= r_8 \oplus r_9 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14} \oplus r_{15} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = (s_4 s_3 s_2 s_1) = (1001) = 9$$

Korigovana reč i informaciona reč

$$\hat{c} = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$$

$$\hat{i} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$$

Zadatak 3

*Izvršiti dekodovanje sekvence (001001000001) ako se zna da je na strani predaje primenjen Hemingov kod (12,7).

Rešenje:

$$r = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1)$$

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 \oplus r_9 \oplus r_{11} = 1$$

$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{11} = 0$$

$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 = 1$$

$$s_4 = r_8 \oplus r_9 \oplus r_{10} \oplus r_{11} = 0$$

$$S = (s_4 s_3 s_2 s_1) = (0101) = 5$$

$$s_5 = \sum_{i=1}^{12} r_i = 1$$

*Rekonstruisana informaciona reč je

$$\hat{i} = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$$

Šablon

l	bin(l)	c_l
1	000**1**	z_1
2	00**1**0	z_2
3	0011	i_1
4	0**1**00	z_3
5	0101	i_2
6	0110	i_3
7	0111	i_4
8	**1**000	z_4
9	1001	i_5
10	1010	i_6
11	1011	i_7

Zadatak 4

Za prenos podataka na raspolaganju je kanal u kome je izmerena verovatnoća greške $p=10^{-4}$, dok je maksimalna brzina signaliziranja na linku $v_{b,\mathrm{max}}=15\mathrm{Mb/s}$. Pored direktnog linka na raspolaganju je i link povratne sprege koji se može koristiti pri detekciji greške.

Za prenos fotografija i video signala zahteva se da verovatnoća greške u sekvenci koju registruje korisnik bude manja od $p_{\mathrm{zaht}}=5\times10^{-10}$.

Odrediti za koje vreme korisnik može da prenese fotografiju veličine $N=1.875\mathrm{MB}$

- **a) Ako se koristi zaštita ponavljanjem bita.**
- **b) Ako se za zaštitu koristi Hemingov kod.**
- **c) Ako se za zaštitu koristi najbolji mogući zaštitni kod.**

Zadatak 4 - rešenje (1)

a) Najjednostavniji kod sa ponavljanjem se dobija za n=3. U tom slučaju verovatnoća da greška ne bude ispravljena ni detektovana iznosi

$$P_{res}=p^3=10^{-12}<p_{\mathrm{zaht}}$$

U ovom slučaju je kodni količnik R=1/3 pa je za binarni protok u kanalu v_b protok koji je dostupan korisniku (za prenos informacionih bita)

$$v_{I1}=Rv_b=5\mathrm{Mb/s}$$

Za prenos fajla veličine 1.875MB (tj. 15Mb) potrebno je

$$t_1=N/v_{I1}=3s.$$

Primeni bilo kog drugog koda sa ponavljanjem (n=5, n=7,...) odgovaralo bi duže vreme prenosa od prethodno izračunatog.

$$t_1=N/v_{I1}=5s\ (n=5),$$

$$t_1=N/v_{I1}=7s\ (n=7),...$$

Zadatak 4 - rešenje (2)

b) Hemingov kod (8,4) obezbeđuje korekciju jedne i detekciju dve greške.

U tom slučaju verovatnoća da greška ne bude ispravljena ni detektovana približno odgovara verovatnoći pojave trostruke greške na bloku od osam bita

$$P_{res} \approx \binom{8}{3} p^3 (1-p)^5 \approx 5.6 \cdot 10^{-11} < p_{zaht}$$

U ovom slučaju je kodni količnik R=4/8=0.5 pa je za binarni protok u kanalu v_b protok koji je dostupan korisniku (za prenos informacionih bita)

$$v_I = Rv_b = 7.5\text{Mb/s} \rightarrow t_2 = N/v_{II} = 2s.$$

Da li je moguće napraviti Hemingov kod sa drugim paramatrima, kome odgovara veći korisnički protok a da i za njega bude $P_{res} < p_{zaht}$?

Skraćivanjem koda (8,4) mogu se dobiti kodovi:

- **(7,3) sa R=3/7**
- **(6,2) sa R=2/6**
- **(5,1) sa R=1/5 -> ponavljanje 5 puta**

ali ni jedan od njih nema R>0.5 pa za ovu primenu nisu interesantni.

Zadatak 4 - rešenje (3)

Hemingov kod (16,11) takođe obezbeđuje korekciju jedne i detekciju dve greške i ima kodni količnik *R*=11/16>0.5. U slučaju ovog koda verovatnoća da greška ne bude ispravljena ni detektovana približno odgovara verovatnoći pojave trostruke greške na bloku od šesnaest bita

$$P_{res} \approx \binom{16}{3} p^3 (1-p)^{13} \approx 5.6 \cdot 10^{-10} > p_{zaht}$$

pa ovaj kod ne obezbeđuje zahtevani kvalitet servisa.

Međutim, njegovim skraćivanjem (tj. uklanjanjem poslednjeg informacionog bita) može se dobiti čitav niz kodova – (15,10), (14,9), (13,8), (12,7), (11,6),... i već prvi iz ovog niza zadovoljava uslov kvaliteta servisa

$$P_{res} \approx \binom{15}{3} p^3 (1-p)^{12} \approx 4.55 \cdot 10^{-10} < p_{zaht}$$

Odgovarajući iformacioni protok je v_{I2}=(10/15)v_b=10Mb/s i za prenos fajla veličine 1.875MB (tj. 15Mb) potrebno je

$$t_2 = N/v_{I2} = 1.5s.$$

Zadatak 4 - rešenje (3)

c) Ako se za zaštitu koristi najbolji mogući zaštitni kod, dostižu se granice propisane drugom Šenonovom teoremom.

U tom slučaju, moguće je napraviti kod sa kodnim količnikom

$$R \leq I_{\max}(p) = 1-(1-p)\cdot \mathrm{ld}\left(\frac{1}{1-p}\right) - p\cdot \mathrm{ld}\frac{1}{p}$$

a da pri tome verovatnoća greške koju vidi korisnik bude zanemarljivo mala.

Za posmatrane brojne vrednosti dobija se

$$I_{\max}(p=10^{-4}) = 0.9985$$

pa idealan kod ima R=0.9985, čemu odgovara informacioni protok

$$v_{I3}=Rv_b=14.9775\text{Mb/s}$$

pa je traženo minimalno vreme prenosa

$$t_3=N/v_{I3}=1.0015s.$$

Treba zapaziti da ovo vreme (za razliku od t_1 i t_2) ne zavisi od zahtevanog kvaliteta servisa tj. ostalo bi isto o da je $p_{zaht}=10^{-12}$ ili $p_{zaht}=10^{-30}$. Naravno, zaštitni kod koji bi ovo omogućio nije lako napraviti!

Zadatak 5

Posmatra se link koji povezuje zemaljsku stanicu i geostacionarni satelit, pri čemu je maksimalna brzina signaliziranja v_b=200 [kb/s].

Poznato je da, zbog velikog propagacionog kašnjenja, satelitski link nije pogodan za primenu ARQ procedura pa se na njemu u cilju zaštite primenjuje Hemingov kod (14,10).

a) Ako je sekvenca bita na izlazu kanala

$$r = (0111111100000001001011110101)$$

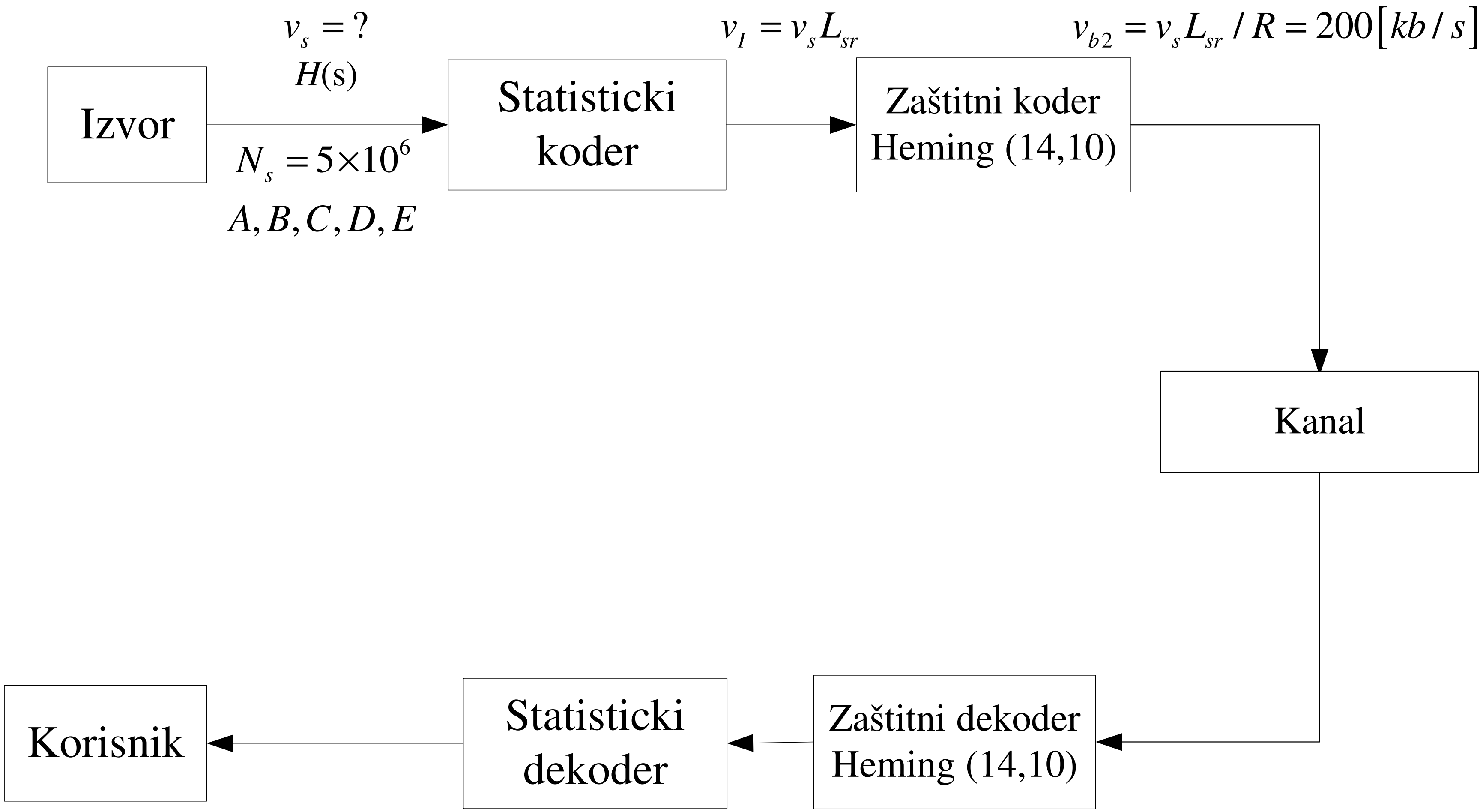
komentarisati vrednosti sindroma i dekodovati informacione reči.

c) Ukoliko se sa zemaljske stanice emituje niz od N=5×10^6 simbola koji mogu uzeti vrednosti iz skupa {A,B,C,D,E} sa verovatnoćama {0.45,0.35,0.1,0.07,0.03}, odrediti teorijski minimalno vreme za njihovo emitovanje ako je primenjen zaštitni kod (14,10). Ako vreme za prenos ove sekvence ne sme biti duže od t_1=80 [s], predložiti statistički kod koji zadovoljava ovaj uslov.

Zadatak 5 - rešenje (1)

Rešenje:

Kompletna blok šema sistema za prenos prikazana se na slici:



Zadatak 5 - rešenje (2)

Proces formiranja kodne reči Hemingovog koda (14,10) opisan je šablonom iz nastavka, gde je opisan i način formiranja kontrolnih bita i sindroma

1	0 0 0 **1**	z_1
2	0 0 **1** 0	z_2
3	0 0 1 1	i_1
4	0 **1** 0 0	z_3
5	0 1 0 1	i_2
6	0 1 1 0	i_3
7	0 1 1 1	i_4
8	**1** 0 0 0	z_4
9	1 0 0 1	i_5
10	1 0 1 0	i_6
11	1 0 1 1	i_7
12	1 1 0 0	i_8
13	1 1 0 1	i_9
14	1 1 1 0	i_{10}
~~15~~	~~1 1 1 1~~	

$$z_1 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_7 \oplus i_9,$$
$$z_2 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_{10}$$
$$z_3 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10}$$
$$z_4 = i_5 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10}$$

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 \oplus r_9 \oplus r_{11} \oplus r_{13}$$
$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{14}$$
$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14}$$
$$s_4 = r_8 \oplus r_9 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14}$$

Zadatak 5 - rešenje (3)

Iz primljene sekvence izvajaju se dve primljene reči:

$$r = (01111111000000,\ 01001011110101)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c}
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow\ r^{(I)} \\ \rightarrow\ r^{(II)} \end{array} \\
\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{array}
\end{array}$$

***Dekodovanje prve reči opisano je postupkom**

$$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 \oplus r_9 \oplus r_{11} \oplus r_{13} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{14} = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14} = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$s_4 = r_8 \oplus r_9 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

a pošto je utvrđeno da se greška nalazi na 9. bitu, najbliža kodna reč i dekodovana sekvenca su

$$\hat{c}^{(I)} = (01111111100000) \Rightarrow \hat{i}^{(I)} = (1111100000)$$

Zadatak 5 - rešenje (4)

* Dekodovanje druge reči obavlja se na osnovu

$s_1 = r_1 \oplus r_3 \oplus r_5 \oplus r_7 \oplus r_9 \oplus r_{11} \oplus r_{13} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$

$s_2 = r_2 \oplus r_3 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{14} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$s_3 = r_4 \oplus r_5 \oplus r_6 \oplus r_7 \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$s_4 = r_8 \oplus r_9 \oplus r_{10} \oplus r_{11} \oplus r_{12} \oplus r_{13} \oplus r_{14} = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1$

pa je opet detektovano da se greška nalazi na 9. bitu.

Nakon korekcije greške rekonstruisana kodna reč i dekodovana sekvenca postaju

$$\hat{c}^{(II)} = (01001011\mathbf{0}10101) \Rightarrow \hat{i}^{(II)} = (0101010101)$$

Zadatak 5 - rešenje (5)

* **Verovatnoće pojavljivanja simbola određuju prosečnu količinu informacija po simbolu koju emituje izvor tj. entropiju**

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{q} P(s_i) ld(P(s_i)) = 1.801 \ [\mathrm{Sh/simb}]$$

* **Kako srednja dužina kodne reči (statističkog koda) ne može biti kraća od vrednosti entropije, $N_s=5\times10^6$ simbola se u statističkom koderu ne može predstaviti sa manje od $N_b=N_s\times H(S)$ bita. Nakon dodavanja zaštitnih bita u Hemingovom koderu (14,10) ukupan broj bita koji se šalje u kanal iznosi**

$$N_{b,tot} = N_S H(S) / R = 1.2607\times10^7$$

a pošto se prenos radi brzinom v_b=200 [kb/s], minimalno vreme za prenos ove sekvence iznosi

$$t_{\min} = N_{b,tot} / v_b = 63,05 \ [\mathrm{s}]$$

Zadatak 5 - rešenje (6)

*Najjednostavnije praktično rešenje statističkog kodera zasnovano je na Hafmenovom algoritmu.

* Ako je u pitanju izvor bez memorije (pošto u tekstu zadatka nije naglašeno da izvor ima memoriju, ovo se podrazumeva) ovaj algoritam garantuje dobijanje kompaktnog koda.

* Za primer iz zadatka rezultat Hafmenovog postupka prikazan je u tabeli, a interesantno je da ovo rešenje istovremeno predstavlja i tzv. koma kod.

s_i	A	B	C	D	E
$P(s_i)$	0.45	0.35	0.1	0.07	0.03
Kodna reč	0	10	110	1110	1111

Zadatak 5 - rešenje (7)

* U tom slučaju srednja dužina kodne reči data je relacijom

$$L_{sr} = \sum_{i=1}^{q} P(s_i) l_i = 0.45 \times 1 + 0.35 \times 2 + 0.1 \times 3 + 0.07 \times 4 + 0.03 \times 4 = 1.85 \text{ [bit/simb]}$$

i efikasnost koda je

$$\eta = \frac{H(S)}{L_{sr}} = 97,35\%$$

* Vreme potrebno za prenos ako je primenjen Hafmenov kod iznosi

$$t_{Huff} = \frac{N_S L_{sr}}{R v_b} = 64,75 \text{ [s]}$$

a pošto je ovo vreme kraće od zahtevanog, uslov iz teksta zadatka je zadovoljen. Dodatno skraćenje vremena potrebnog za prenos može se postići ako se sa Hafmenovim kodom kombinuje proširenje izvora, ali to vreme ni u kom slučaju ne može da bude kraće od t_{min}.

Literatura

[1] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *Bell System Technical Journal,* vol. 27, pp. 379-423, July 1948; pp. 623-656, October 1948.

[2] P. Ivaniš, V. Blagojević, “*Uvod u digitalne telekomunikacije*”, Akademska misao, Beograd, 2020. *(u prodaji krajem oktobra)*

[3] P. Ivaniš, “*Zbirka rešenih zadataka iz teorije informacija i kodovanja*”, Akademska misao, Beograd, 2013.

[4] S. Lin, D. J. Costello, *Error Control Coding*, Second Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2004.

[5] R. H. Morelos-Zaragoza, *The Art of Error Correcting Coding*, John Wiley & Sons, Ltd, England, 2002.