PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020

SPEKTRALNA ANALIZA DETERMINISTIČKIH SIGNALA

Klasifikacija signala

* Izvor u opštem slučaju ne generiše niz bita već od *signala* (govor, slika, video) treba tek dobiti binarni niz.
* Proces diskretizacije zavisi od osobina signala, pre svega njegovog spektra.
* Signali se po svojoj prirodi mogu klasifikovati na više načina
  * Deterministički signali - mogu se opisati u funkciji vremena
    * Periodični (npr. sinusoida)
    * Aperiodični (npr. usamljeni pravougaoni impuls)
  * Slučajni signali se ne mogu opisati vremenskom funkcijom
    * Opisuju se statističkim parametrima
    * Većina telekomunikacionih signala su slučajni signali
* Od interesa je poznavanje prirode i karakteristika signala i u vremenskom i u frekvencijskom domenu (domenu učestanosti)
* Spektar signala je određen na jedinstven način oblikom signala u vremenu (važi i obrnuto).

Prostoperiodičan signal - vremenski domen

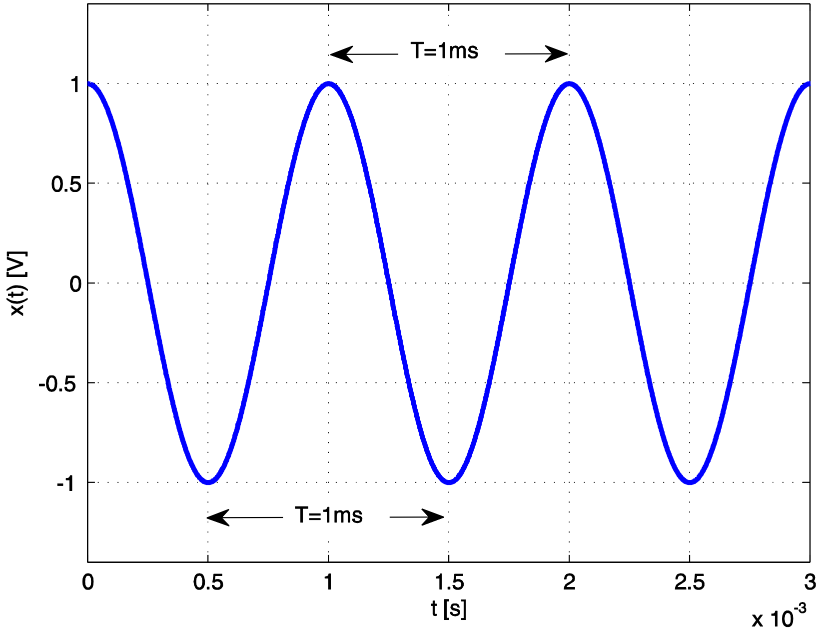
* Proizvoljna funkcija $x(t)$ naziva se <u>**periodičnom**</u> ako za svako t važi

$$x(t)=x(t+T)$$

* Svaka funkcija koja zadovoljava ovaj uslov naziva se *periodičnom* (perioda T je najmanja vrednost koja zadovoljava ovaj uslov)

$$x(t)=U\times\cos(2\pi\times f_0\times t)$$

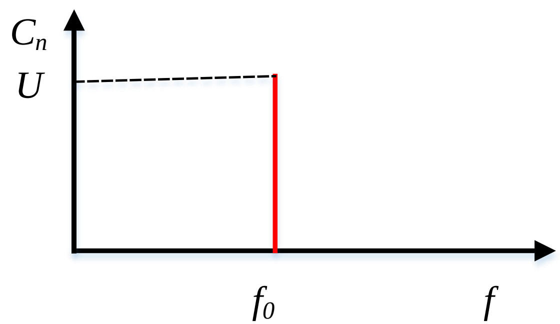
* Parametri kosinusoidalnog signala:
  - amplituda $U=1$,
  - početna faza $\theta=0$
  - perioda $T=1\text{ms}=10^{-3}\text{s}$
  - učestanost $f_0=1/T=1000\text{Hz}=1\text{kHz}$

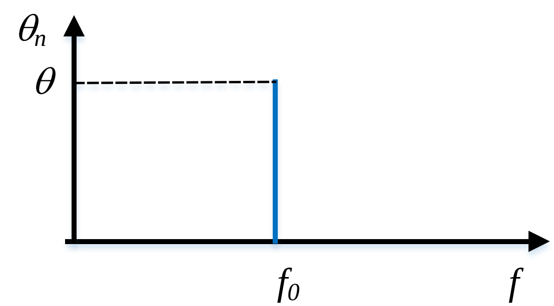


Prostoperiodičan signal – opis u frekvencijskom domenu

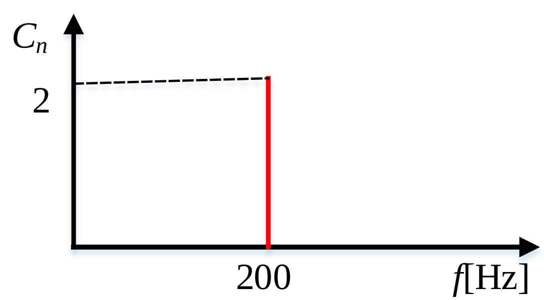
* **Posmatrani prostoperiodičan signal $x(t)=U\times\cos(2\pi * f_0 * t+\theta)$ jednoznačno je definisan amplitudom U, početnom fazom θ i osnovnom učestanošću f_0**
* **Signal $x(t)$ možemo prikazati i u frekvencijskom domenu, korišćenjem**
  - **Amplitudskog spektra C_n, (slika levo)**
  - **Faznog spektra θ_n (slika desno)**
* **Prikazane zavisnosti pokazuju kolika je amplituda (*amplitudski spektar*) i početna faza (*fazni spektar)* posmatrane kosinusoide.**

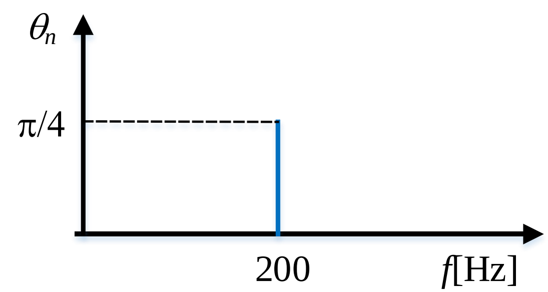
$$x(t)=U\cos(2\pi f_0 t+\theta)$$





$$x(t)=2\times\cos\left(2\pi\times 200t+\frac{\pi}{4}\right)$$



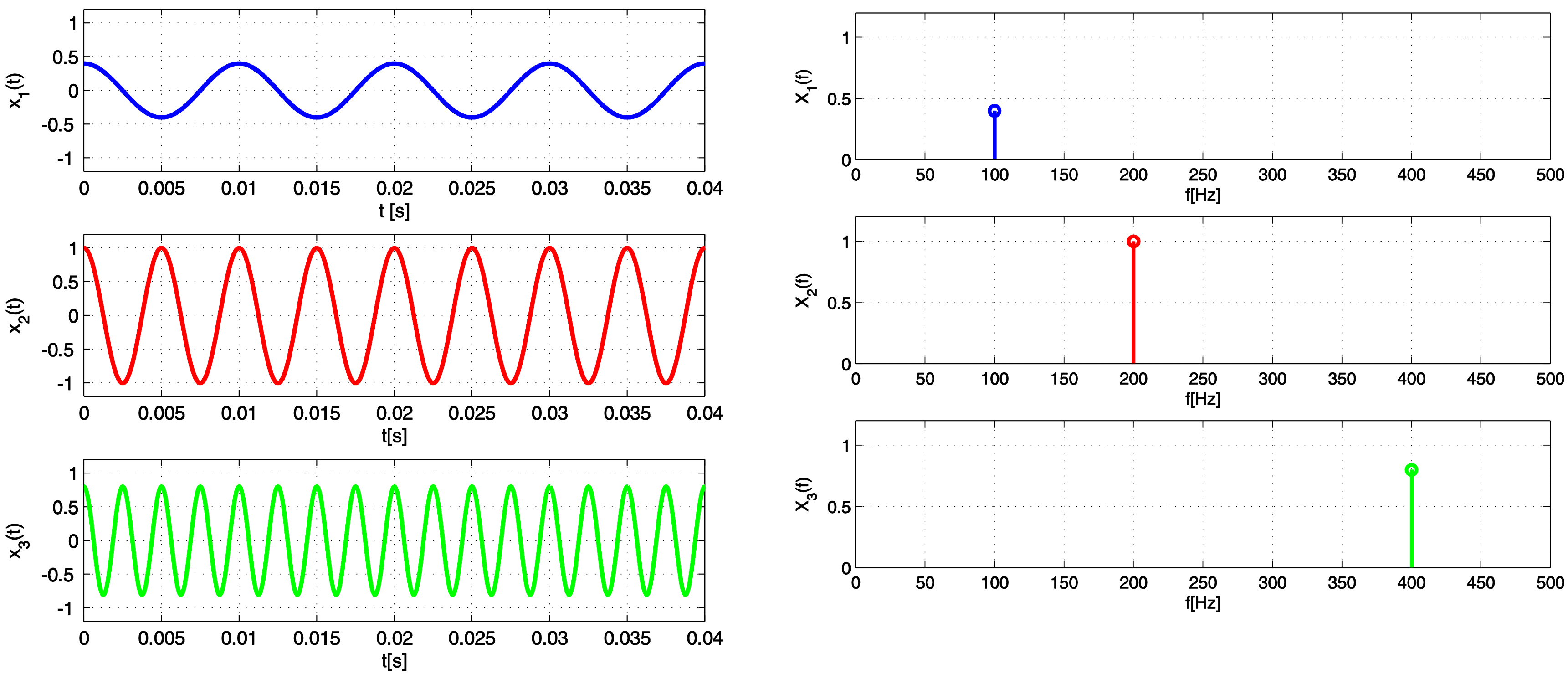


Periodični deterministički signal – primer 1

* **Na sličan način analiziramo signal koji se jednak zbiru tri kosinusoide (početne faze svih kosinusoida jednake su nuli)**

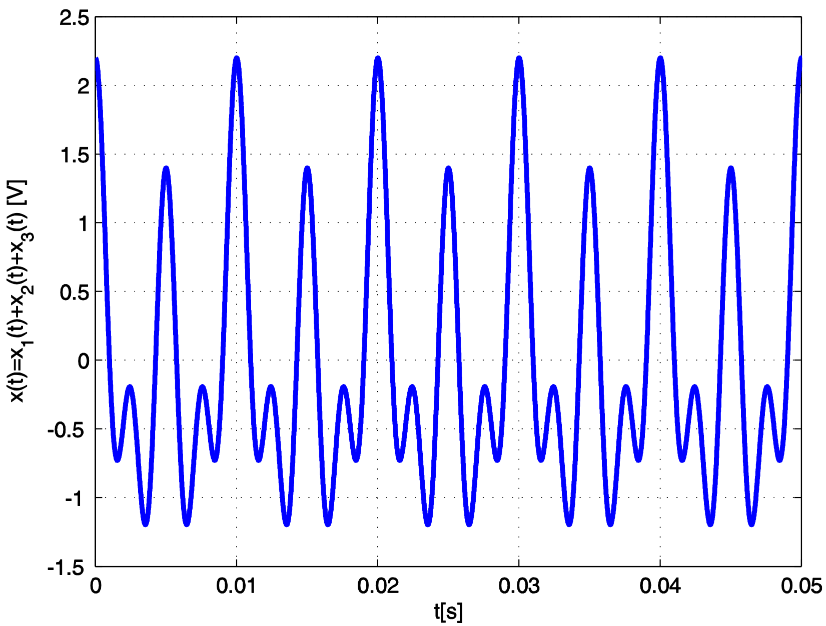
$$x(t)=0.4\cdot\cos(2\pi\cdot 100\cdot t)+\cos(2\pi\cdot 200\cdot t)+0.8\cdot\cos(2\pi\cdot 400\cdot t)$$

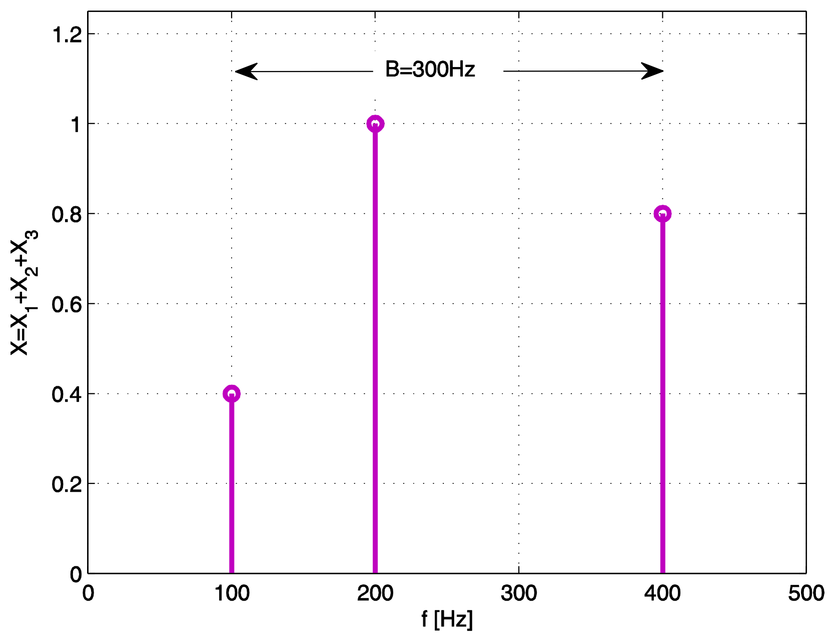
* **Svakoj kosinusoidi odgovara jedna komponenta u *amplitudskom spektru* koja pokazuje kolika je *amplituda* te kosinusoide**



Periodični deterministički signal – primer 1

* Spektar posmatranog složenog signala $x(t)$ ima tri komponente
* ***Širina spektra signala*** **jednaka je razlici najviše i najniže komponente signala i u posmatranom slučaju iznosi 300Hz.**
* Signal koji se dobija zbirom konačnog broja sinusoida takođe je periodičan sa periodom T_0, koja određena najvećim zajedničkim deliocem učestanosti ostalih komponenata u spektru. ***Osnovna učestanost periodičnog signala*** je jednaka f_0 (f_0=100Hz, T_0=1/(100Hz)=10ms).



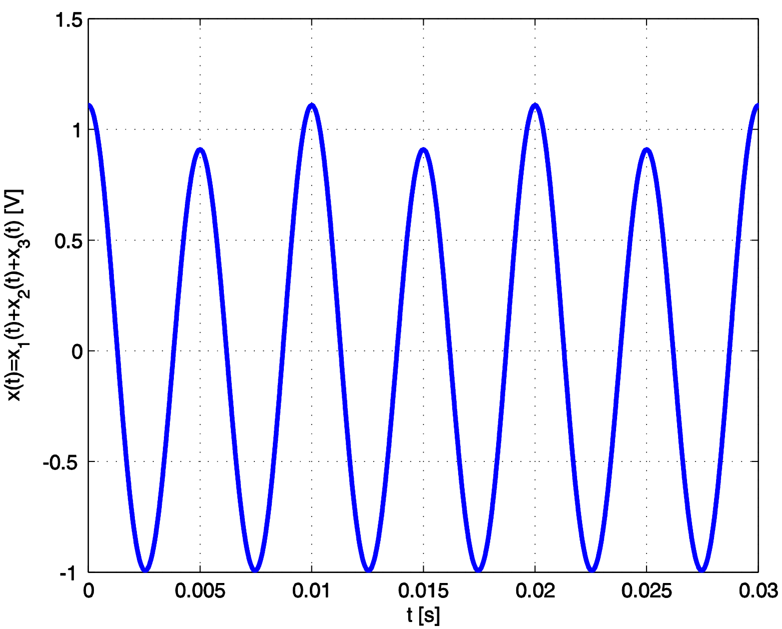


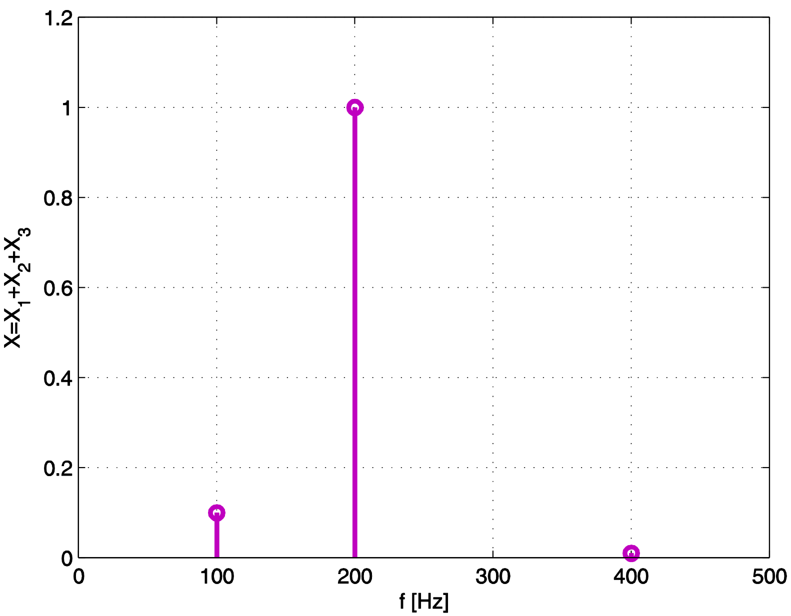
Periodični deterministički signal – primer 2

* **Ako se zadrži isti broj komponenti u spektru signala, a promene njihove amplitude, može se znatno promeniti vremenski oblik signala.**

$$x(t)=0.1\cdot\cos(2\pi\cdot 100\cdot t)+\cos(2\pi\cdot 200\cdot t)+0.01\cdot\cos(2\pi\cdot 400\cdot t)$$

* **Ovaj signal je takođe deterministički (može se opisati matematičkom funkcijom) i periodičan. Perioda signala (T_0=10ms) u ovom slučaju ostaje ista kao u prethodnom slučaju (zavisi samo od učestanosti komponenti).**

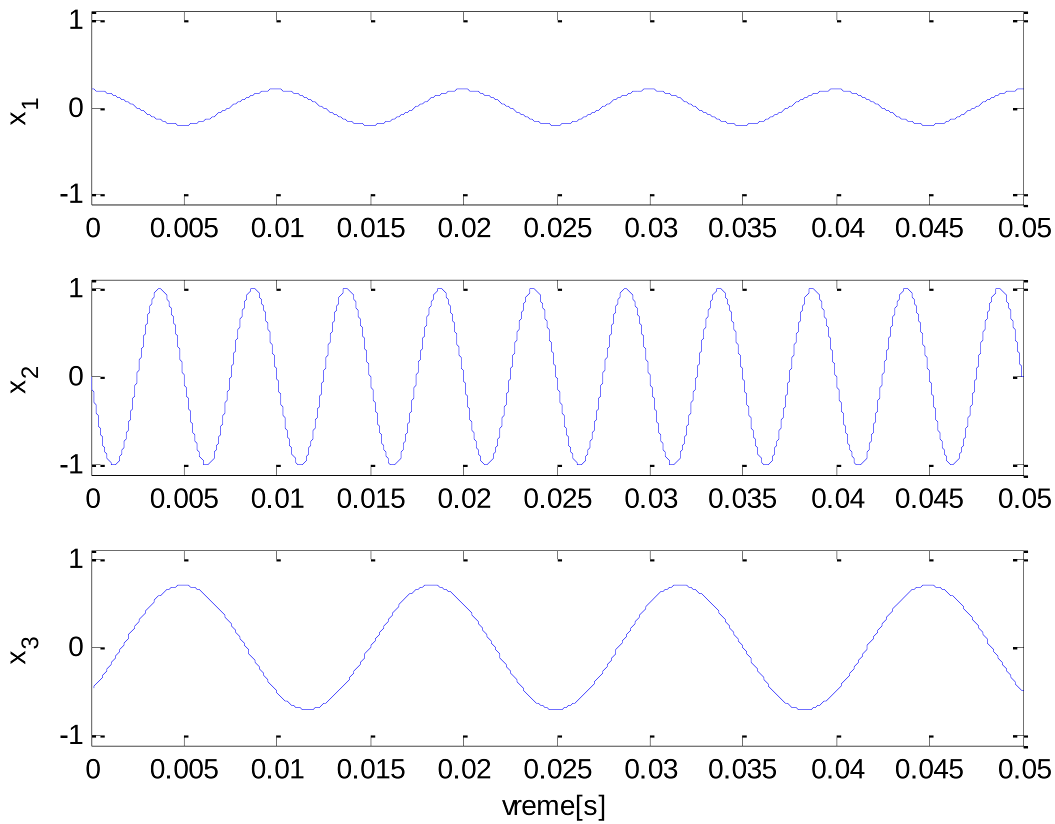




Periodični deterministički signal – primer 3

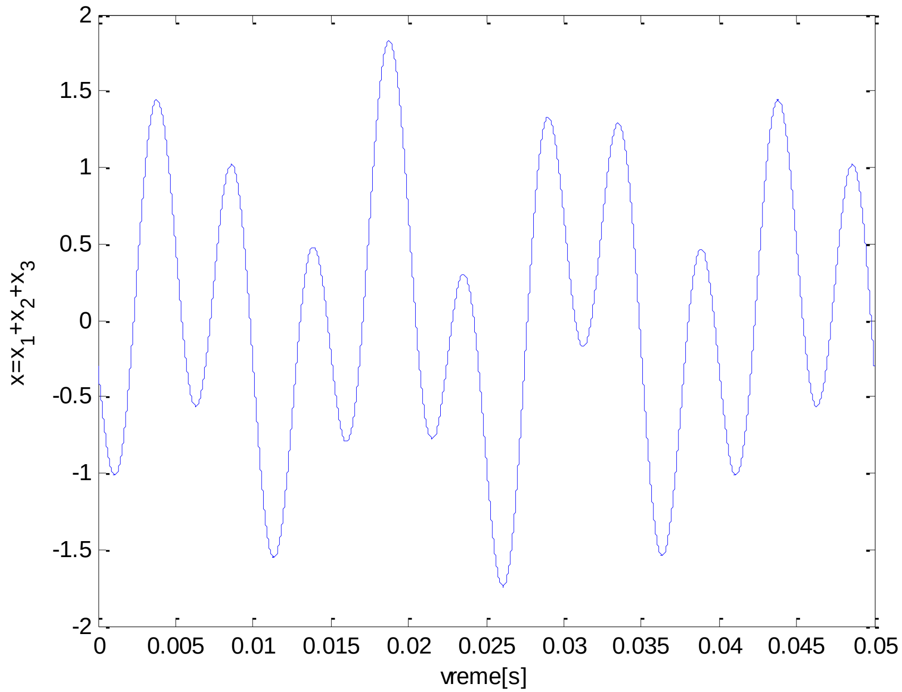
* **Posmatra se zbir kosinusoida kod kojih početna faza nije jednaka nuli.**
  - ***Fazni pomeraj utiče na translaciju signala duž vremenske ose* (*x*-ose)**

$$x(t)=0.2\cdot\cos(2\pi\cdot 100\cdot t)+\cos(2\pi\cdot 200\cdot t+\pi/2)+0.7\cdot\cos(2\pi\cdot 75\cdot t+5\pi/4)$$



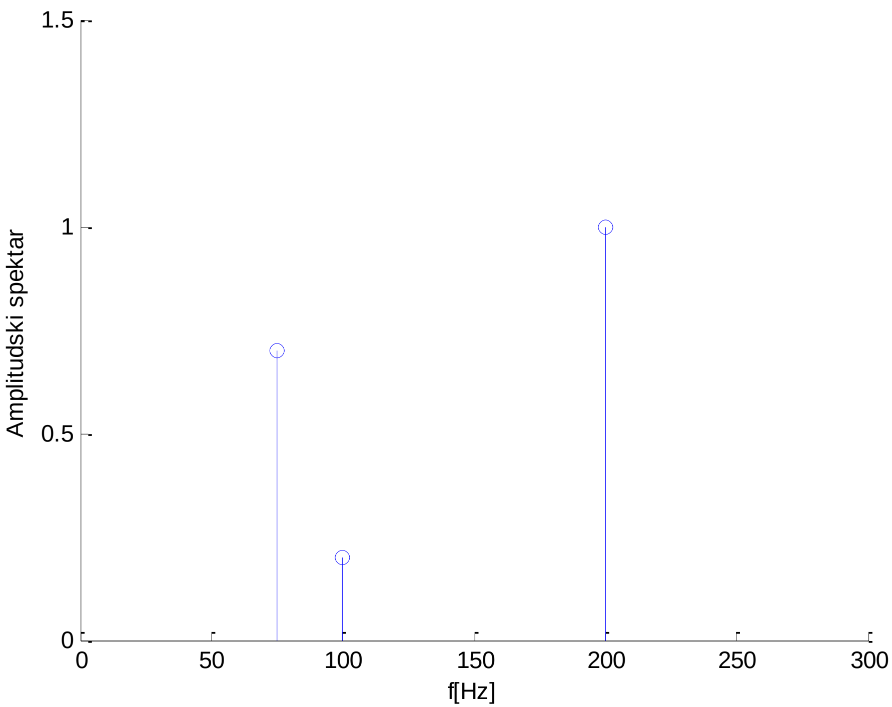
Periodični deterministički signal – primer 3

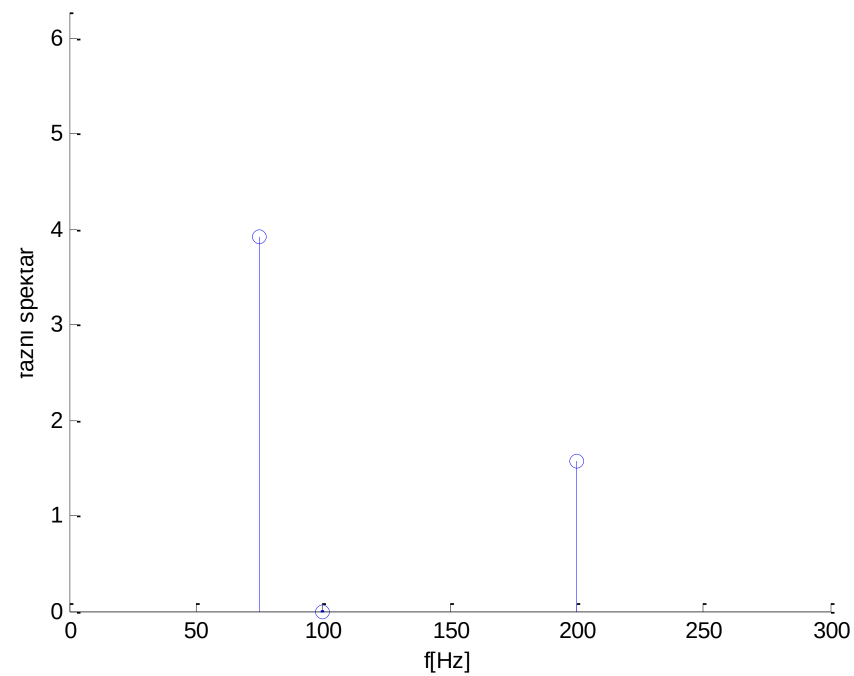
* **Na vremenski oblik signala ne utiču samo učestanosti i amplitude komponenti (*amplitudski spektar*), već i početni fazni pomeraji komponenti signala (*fazni spektar*)!**
* **U ovom primeru perioda signala nije određena najnižom učestanošću u spektru! Učestanosti komponenti su 75Hz, 100Hz i 200Hz.**
  * **NZD(100,200,75)=25Hz i perioda signala iznosi T_0=1/25Hz=40ms→osnovna učestanost je f_0=25Hz.**



Periodični deterministički signal – primer 3

* *Periodičan signal je kompletno opisan samo ako je poznat njegov amplitudski i fazni spektar!*
* ***Amplitudski spektar*** **određuje amplitude komponentnih <u>kosinusoida</u>**
* ***Fazni spektar*** **određuje početne faze komponentnih <u>kosinusoida</u>.**
  - **Vrednosti faznog spektra se najčešće prikazuju u opsegu (0,2π) ili (-π,π).**



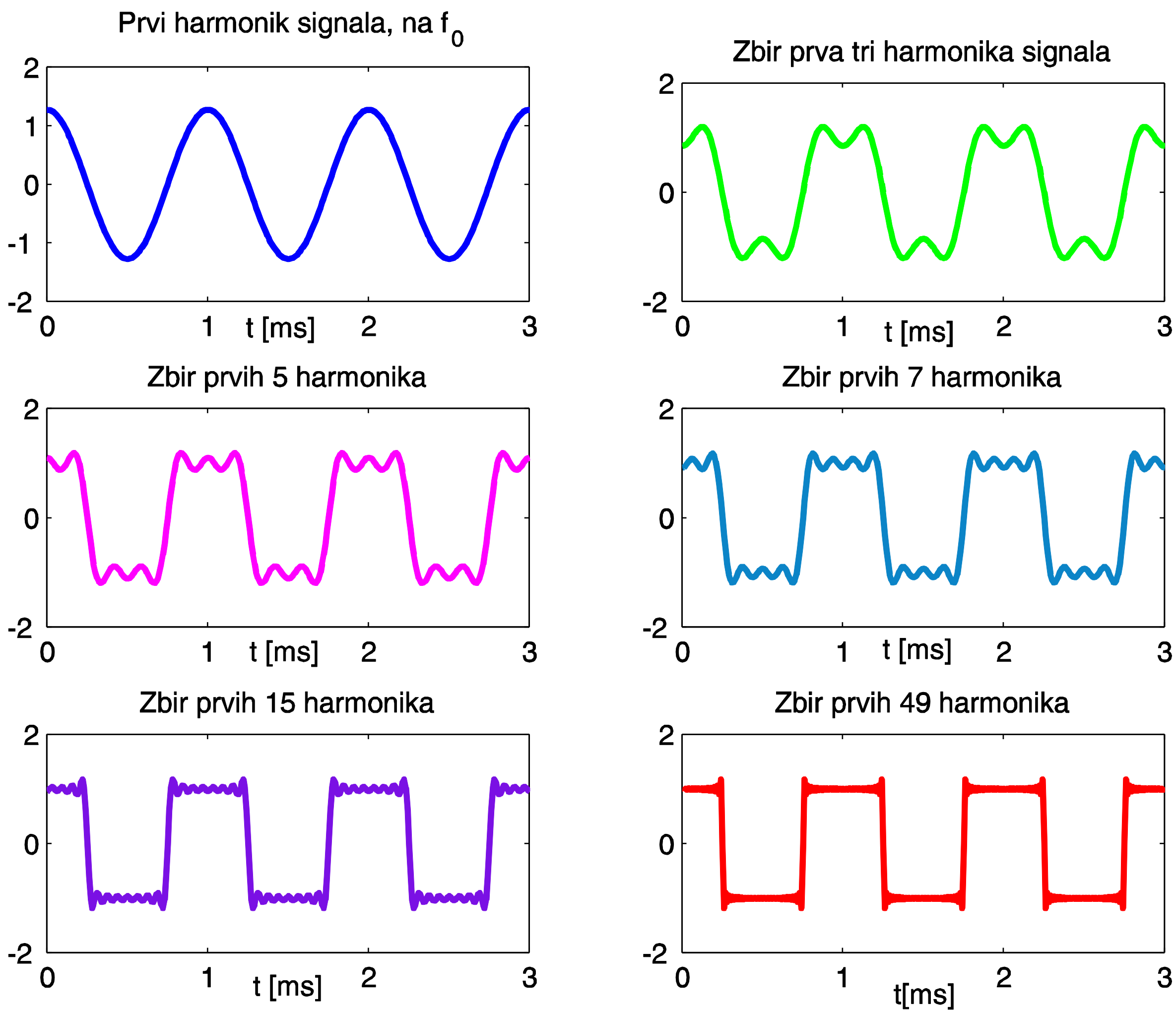


Obrnut problem!

* **Posmatra se obrnut problem → da li je u slučaju kada je poznat vremenski oblik periodičnog signala, svaki takav signal moguće u potpunosti opisati sumom prostoperiodičnih signala (tj. amplitudskim i faznim spektrom kojima su definisane njihove amplitude i početne faze)?**
  - **Za svaki realan periodičan signal, može se uočiti perioda signala T (vremenski period nakon koga se oblik signala ponavlja).**
  - **Na osnovu periode signala može se odrediti osnovna učestanost signala $f_0 = 1/T$ (npr. perioda T = 1ms, osnovna učestanost $f_0 = 1/T$ = 1000Hz=1kHz).**
  - **Periodičan signal $x(t)$ se tada može predstaviti preko sume kosinusoida (prostoperiodičnih signala), čije su učestanosti jednake celobrojnim umnošcima osnovne učestanosti periodičnog signala → $n \times f_0$**
* **Čak i vrlo komplikovani periodični signali mogu se „jednostavno“ predstaviti u obliku zbira (konačnog ili beskonačnog broja) kosinusoida.**
* **U narednom delu biće pokazan način na koji se za proizvoljan signal $x(t)$ određuju amplitude i početne faze tih kosinusoida, koje čine amplitudski i fazni spektar tog signala.**

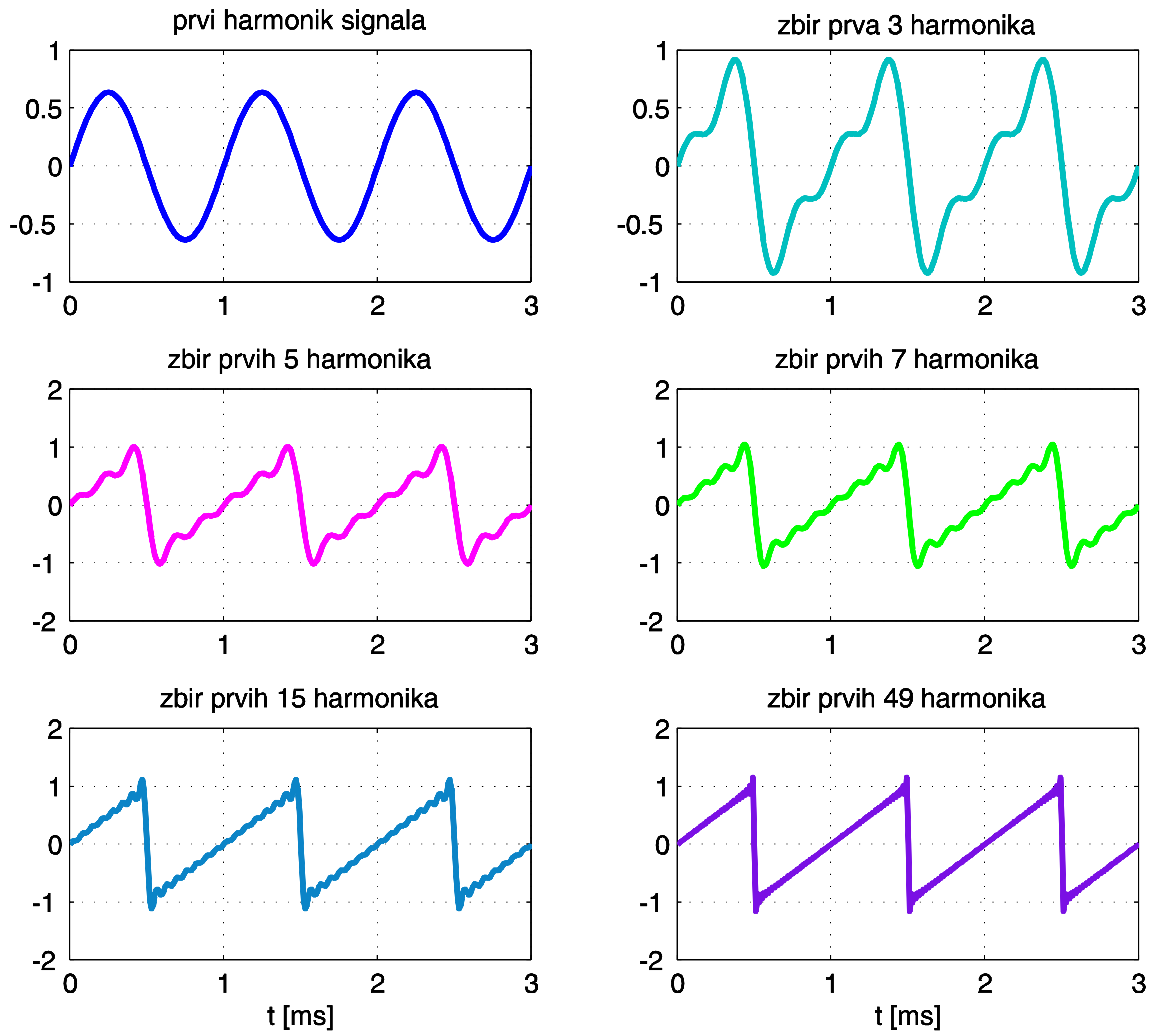
Periodičan signal – razlaganje na komponente

- Kako odrediti amplitude prostoperiodičnih komponenti čijim sabiranjem dobijamo originalan signal?



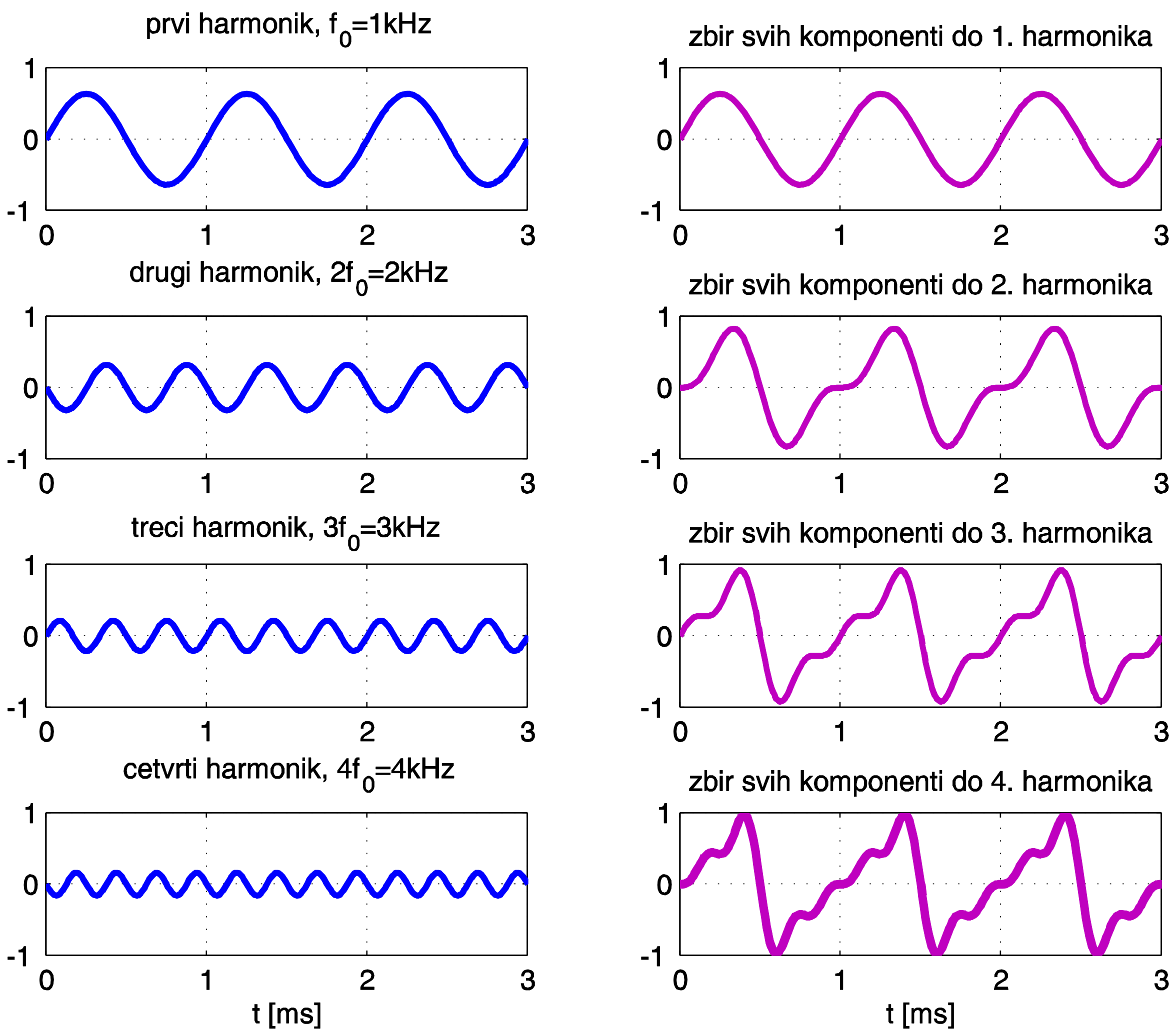
Periodičan signal – razlaganje na komponente

* Primer: periodični testerasti signal osnovne periode T=1ms, f_0=1/T=1kHz
* Više članova u sumi→preciznija aproksimacija originalnog signala



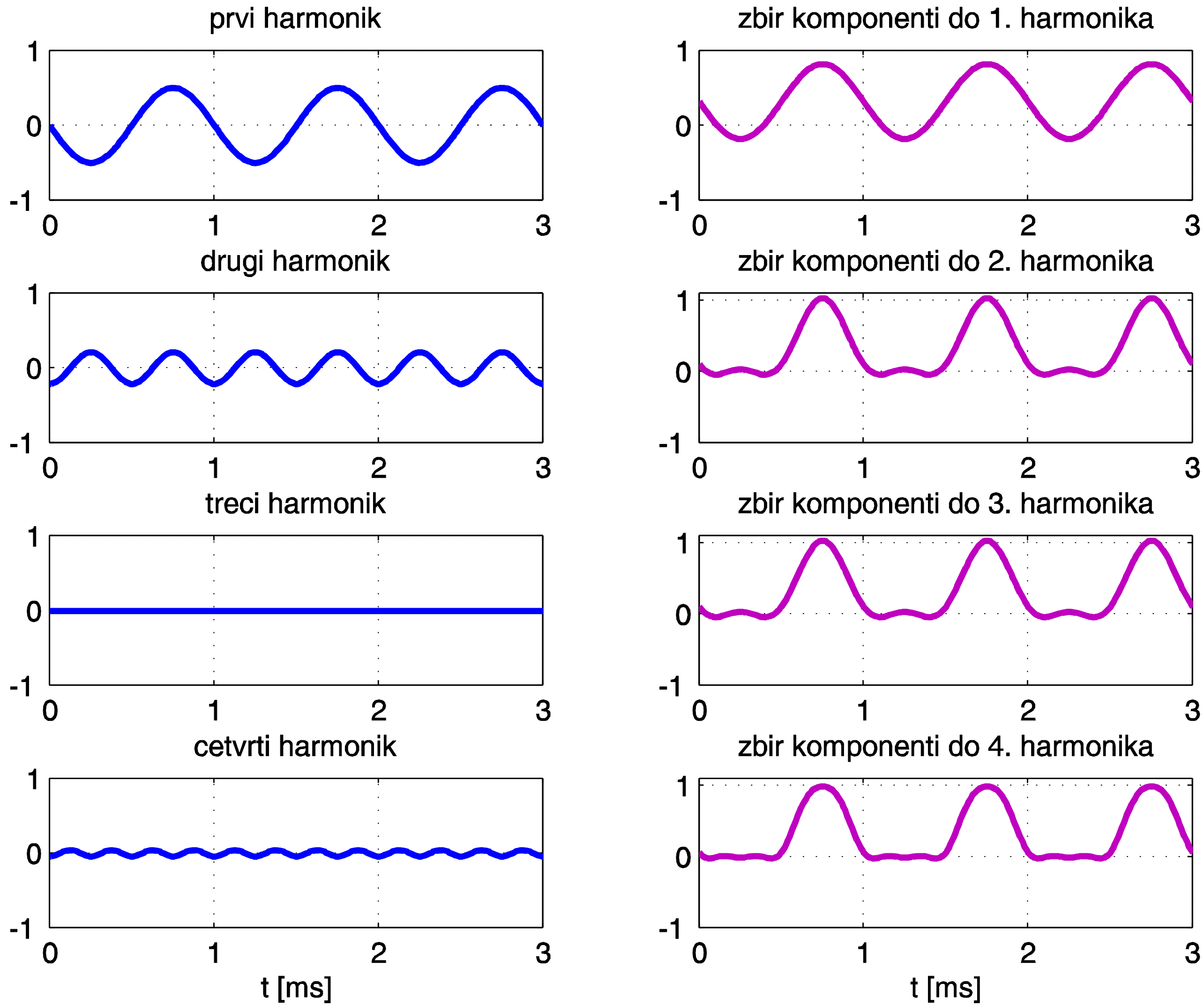
Periodičan signal – razlaganje na komponente

* Kako se određuju amplitude ovih prostoperiodičnih komponenti?



Periodičan signal – razlaganje na komponente

* Primer, polusinusoida, amplitude 1V, osnovne učestanosti f_0=1kHz



Harmonijska analiza periodičnih signala

Teorijske osnove analize postavio *Joseph Fourier* (1768-1830)

* **Ukoliko periodičan signal $x(t)$ ispunjava uslov**

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$$

može se predstaviti u obliku kompleksnog *Fourier*-ovog reda

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{+j2\pi n f_0 t}}$$

* **Pri tome su sa X_n označeni kompleksni *Fourier*-ovi koeficijenti**

$$\boxed{X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt}$$

T predstavlja periodu

$f_0=1/T$ predstavlja osnovnu učestanost periodičnog signala

Harmonijska analiza periodičnih signala

* Kompleksni spektar se predstavlja preko amplitudskog i faznog spektra:

$$\boxed{X_n = |X_n| e^{j\theta_n}}$$

- **Spektar je diskretan** (nije kontinualan, definisan je samo za celobrojne umnoške osnovne učestanosti signala $n \times f_0$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)
- Spektar je kompleksna funkcija učestanosti i obuhvata: amplitudski i fazni spektar.
- **Amplitudski spektar** **realne** funkcije $x(t)$ je parna funkcija učestanosti. Amplitudski spektar je realna funkcija!

$$|X_n| = |X_{-n}|$$

- **Fazni spektar** je neparna realna funkcija učestanosti.

$$\theta_n = -\theta_{-n}$$

- Koeficijenti **$|X_n|$ i θ_n** predstavljaju **dvostrani** amplitudski i fazni spektar **(definisan za umnoške osnovne učestanosti signala $n \times f_0$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)**

Harmonijska analiza periodičnih signala

* Periodičan signal *x(t)* može se predstaviti i u obliku **trigonometrijskog *Fourier*-ovog reda** → u obliku sume kosinusoidalnih komponenti, *kao što je prikazano na prethodnim slajdovima.*
* Ove komponente (kosinusoide) nazivaju se **harmonici** funkcije *x(t)*,

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(2\pi n f_0 t + \theta_n\right)$$

* ***n*-ti harmonik** je kosinusoida učestanosti nf_0, amplitude C_n i faze θ_n
* Koeficijenti C_n određuju amplitude kosinusoida koje treba sabrati da bi se dobio signal koji želimo da rastavimo na harmonike
* Koeficijenti θ_n određuju početne faze kosinusoida koje treba sabrati da bi se dobio signal koji želimo da rastavimo na harmonike.
* Koeficijenti C_0 određuje nivo prisustva jednosmerne komponente (srednje vrednosti signala).
* Koeficijenti C_n i θ_n predstavljaju **jednostrani** amplitudski i fazni spektar (definisan samo za učestanosti nf_0, n=0, 1, 2, ...)

Harmonijska analiza periodičnih signala

* Signal $x(t)$ je jednoznačno definisan i preko koeficijenata dvostranog i jednostranog spektra i među njima postoji veoma jednostavan odnos
* Veza između koeficijenata može se dobiti se polazeći od kompleksnog reda

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{+j2\pi n f_0 t}$$

* Grupisanjem članova sa koeficijentima oblika $+n$ i $-n$ ($n=1, 2, \ldots$), dobija se zbir oblika

$$X_n e^{j2\pi n f_0 t} + X_{-n} e^{-j2\pi n f_0 t} = 2|X_n|\cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

pa se signal $x(t)$ može napisati i u obliku

$$\boxed{x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|X_n|\cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)}$$

* Poređenjem sa oblikom funkcije $x(t)$ predstavljenom preko trigonometrijskog reda, određuju se veze između koeficijenata

$$\boxed{x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)}$$

Jednostrani i dvostrani spektar

* Realan signal $x(t)$ se može predstaviti i u obliku kompleksnog i trigonomentrijskog *Fourier*-ovog reda (jednoznačno je opisan i jednostranim i dvostranim spektrom)
* **Kompleksni red**

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{+j2\pi n f_0 t}$$

  - ***Koeficijenti $|X_n|$ i θ_n predstavljaju dvostrani amplitudski i fazni spektar***
  - **Dvostrani spektar je pogodniji za matematički opis, ali negativne učestanosti u prirodi ne postoje! Osim toga, trigonometrijski red je intuitivno bliži (kao što je pokazano, znatno je jednostavnije zamisliti signal kao zbir kosinusoida)**

* **Trigonometrijski red**

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|X_n| \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

  - ***Koeficijenti C_n i θ_n predstavljaju jednostrani amplitudski i fazni spektar***
  - **Komponente jednostranog amplitudskog spektra su dvostruko veće nego u slučaju dvostrane predstave** $C_n = 2|X_n| = 2|X_{-n}|, \; n > 0$
  - **Jedini izuzetak od ovog pravila je (jednosmerna komponenta signala, DC)**

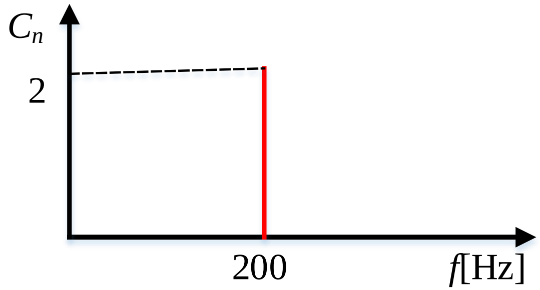
$$C_0 = |X_0|$$

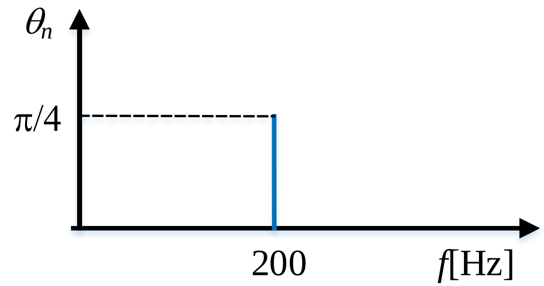
Primer, veza jednostranog i dvostranog spektra

* **Posmatra se prostoperiodičan signal**

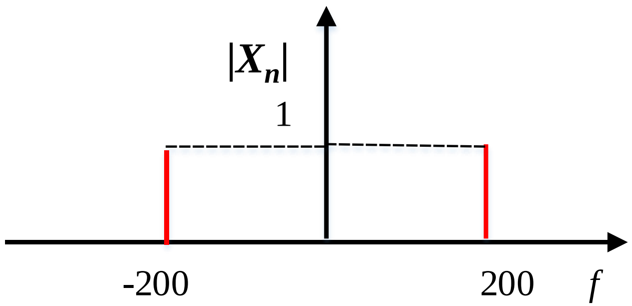
$$x(t) = U \times \cos(2\pi \times f_0 t + \theta) = 2 \times \cos\left(2\pi \times 200t + \frac{\pi}{4}\right)$$

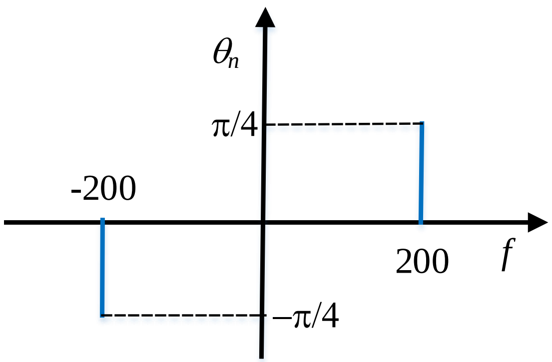
* ***Jednostrani amplitudski i fazni spektar*** **(definisani za frekvencije $f \geq 0$)**





* **Signal $x(t)$ može se predstaviti i *dvostranim amplitudskim i dvostranim faznim spektrom*, definisan i za pozitivne i negativne frekvencije ($-\infty<f<+\infty$)**





Osobine spektra periodičnih signala

* **Periodični realni signal se (razvojem u *Fourier*-ov red) može predstaviti preko zbira prostoperiodičnih komponenti (harmonika) čije su učestanosti jednake umnošcima osnovne učestanosti signala f_0.**
* **Spektralne komponente su definisane na diskretnom skupu učestanosti $f=n\times f_0$, gde *n* pripada skupu celih brojeva. Zato se spektri periodičnih realnih funkcija (signala) nazivaju diskretnim ili linijskim spektrima.**
* **Kvadrat dvostranog amplitudskog spektra predstavlja spektar snage posmatranog signala (on je takođe diskretan i realan) – pokazuje koji deo snage je sadržan u *n*-tom harmoniku**

$$S_n = |X_n|^2$$

* **Značajna osobina realne funkcije (signala) $x(t)$ je njena efektivna (srednja kvadratna) vrednost, definisana izrazom:**

$$x_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\mathrm{d}t},$$

Spektar snage

Parsevalova teorema: srednja snaga signala može se dobiti iz dvostranog amplitudskog spektra tog signala, sabiranjem kvadrata svake od njegovih komponenti.

$$\boxed{P_{sr}=\left(x_{eff}\right)^2=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|X_n\right|^2=\left|X_0\right|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\left|X_n\right|^2}$$

$$P_{sr}=C_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^2}{2}$$

Srednja snaga signala može se takođe dobiti i preko koeficijenata jednostranog spektra!!!

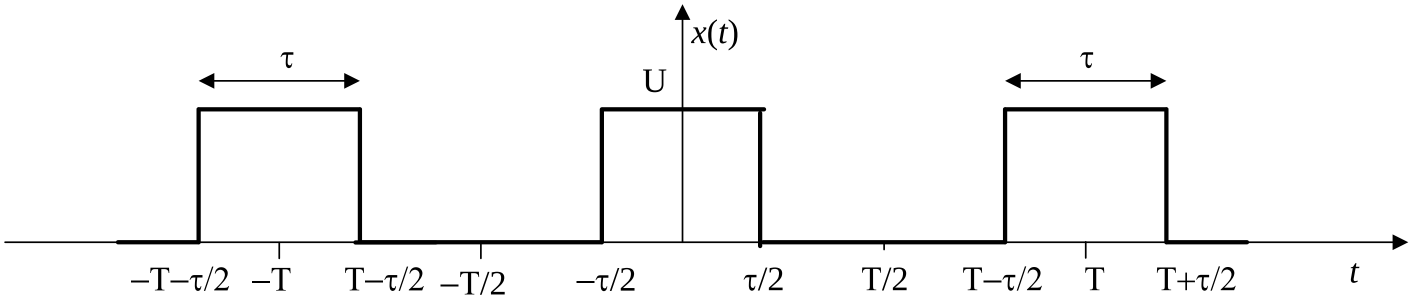
$C_0=X_0$, $C_n=2|X_n|$

Fizički smisao ove teoreme može se shvatiti kada se kao signal $x(t)$ posmatra napon ili struju složenog signala na <u>jediničnoj otpornosti</u>. Kvadrat efektivne vrednosti signala tada predstavlja srednju snagu signala→

<u>srednja snaga signala se može izračunati na osnovu predstave signala u vremenskom i na osnovu predstave signala u spektralnom domenu</u>.

Primer: spektar periodične povorke pravougaonih impulsa

Primenom *Fourier*-ove teorije može se analizirati proizvoljan realan periodičan signal. U narednom delu posmatraće se povorka periodičnih impulsa periode T, amplitude U i trajanja τ (faktor režima τ/T)



Spektar signala $x(t)$ jednak je

$$\boxed{X_n = \frac{U\tau}{T}\frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T}}$$

Dakle, signal se može predstaviti u obliku beskonačne sume kosinusoida učestanosti nf_0, amplituda $2|X_n|$ i početnih faza θ_n

$$\boxed{x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|X_n|\cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)}$$

Periodična povorka pravougaonih impulsa

$$X_n = \frac{U\tau}{T}\frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} = |X_n| e^{j\theta_n}$$

Amplitudski spektar

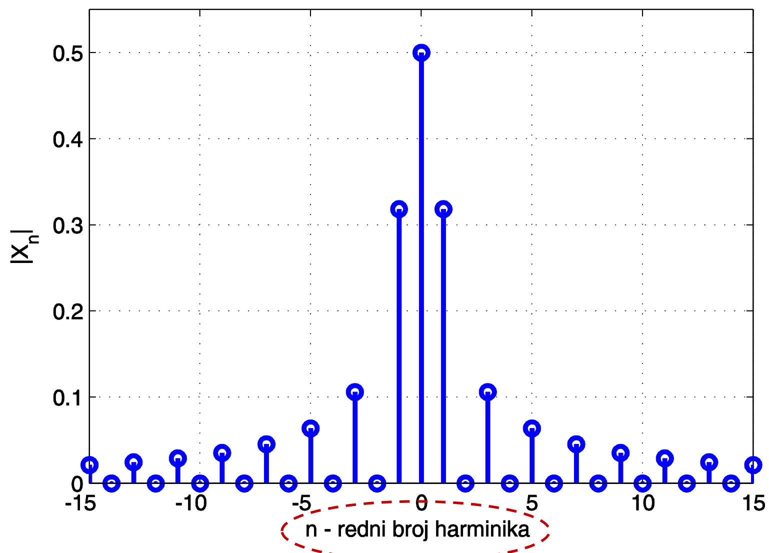
$$|X_n| = \frac{U\tau}{T}\left|\frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T}\right|$$

Fazni spektar

$$\theta_n = \arg(X_n) = \begin{cases} 0, & \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} \geq 0 \\ \pm\pi, & \frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} < 0 \end{cases}$$

Primer: faktor režima $\tau/T=1/2$

$$|X_n| = \frac{U}{2}\left|\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right|$$



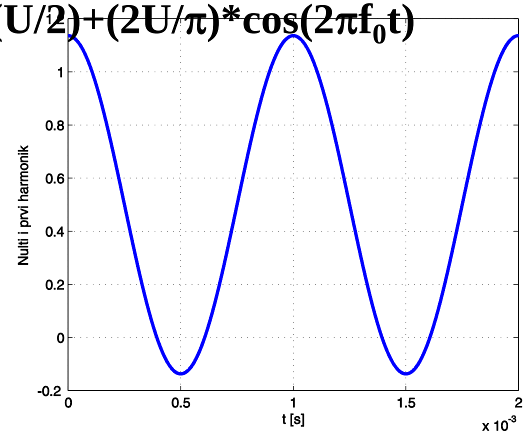
Spektri se mogu nacrtati u funkciji rednog broja harmonika *n* ili u f-ji frekvencije $f=n\times f_0$

Značaj spektralnih komponenti

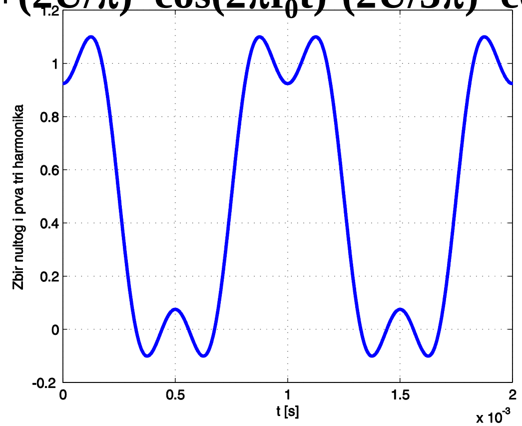
Povorka prav. impulsa
***U* = 1, *f*$_0$ = 1kHz, τ/T=0.5,**

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left|X_n\right|\cos\left(2\pi n f_0 t + \theta_n\right)$$

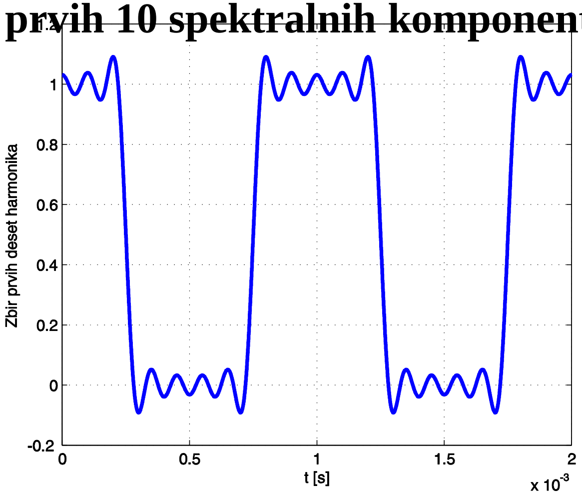
***x*(t) =(U/2)+(2U/π)*cos(2πf$_0$t)**



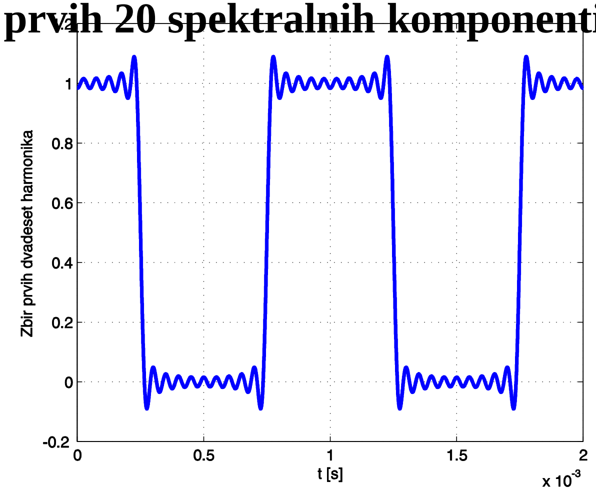
***x*(t) =(U/2)+(2U/π)*cos(2πf$_0$t)-(2U/3π)*cos(2π·3f$_0$t)**



Zbir prvih 10 spektralnih komponenti

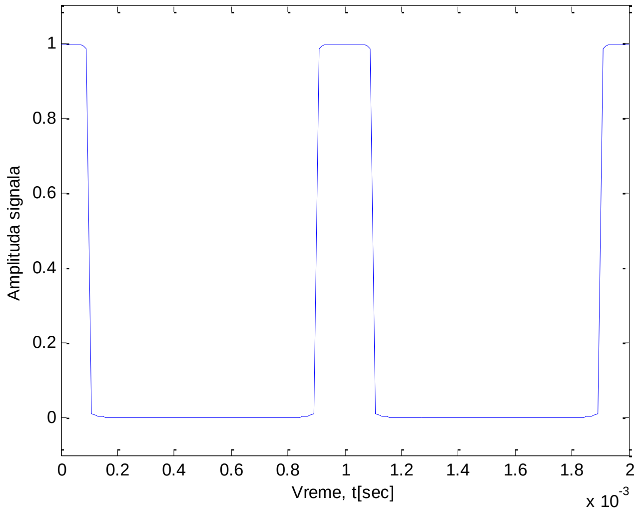


Zbir prvih 20 spektralnih komponenti

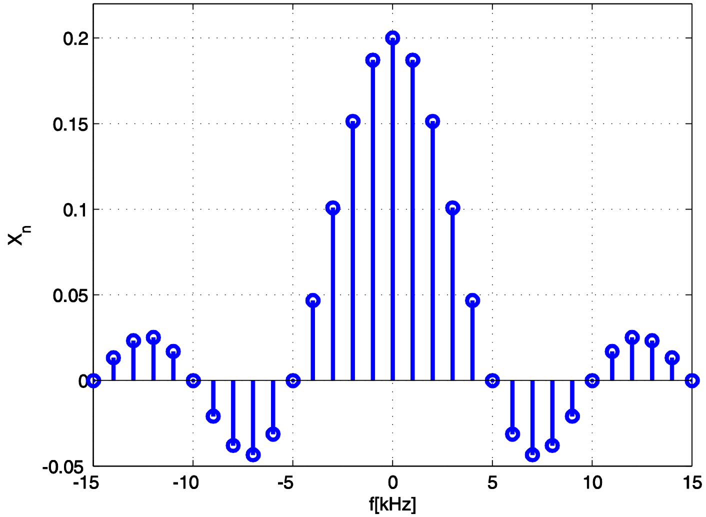


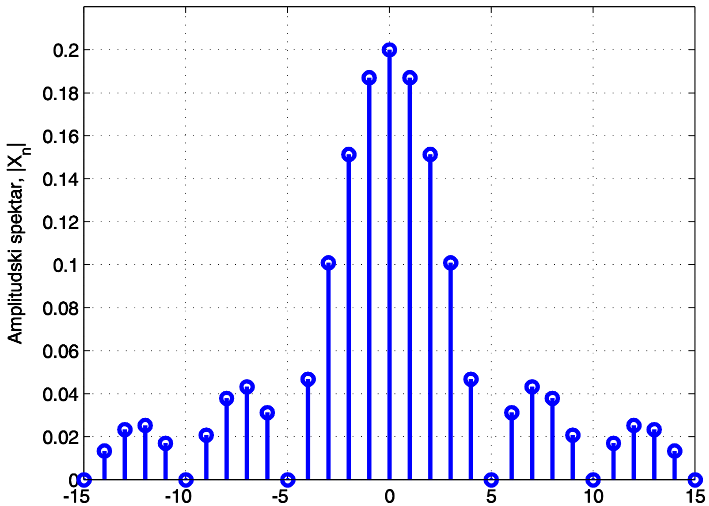
Periodična povorka pravougaonih impulsa – spektar

Faktor režima τ/T=1/5, T=1ms $\Rightarrow f_0$=1kHz, nule anvelope na k/τ=$k\times$5kHz



- Posmatrani signal se može predstaviti kao suma beskonačno mnogo kosinusoida učestanosti $n\times$1kHz, n=0, 1, 2, ...
- U ovom slučaju, svaka peta komponenta u spektru jednaka je nuli (drugim rečima, ne postoji kosinusoida na učestanostima 5kHz, 10kHz, ...)





Osobine spektra periodične povorke pravoug. impulsa

* Osobine:

- Spektar je <u>beskonačno širok</u>!
- Spektar je diskretan, sa komponentama koje se <u>mogu nalaziti</u> (ne moraju, tj. mogu da imaju i vrednost nula!) na učestanostima $n \times f_0$
- Nule anvelope (obvojnice spektra) spektra javljaju se kada je ispunjeno

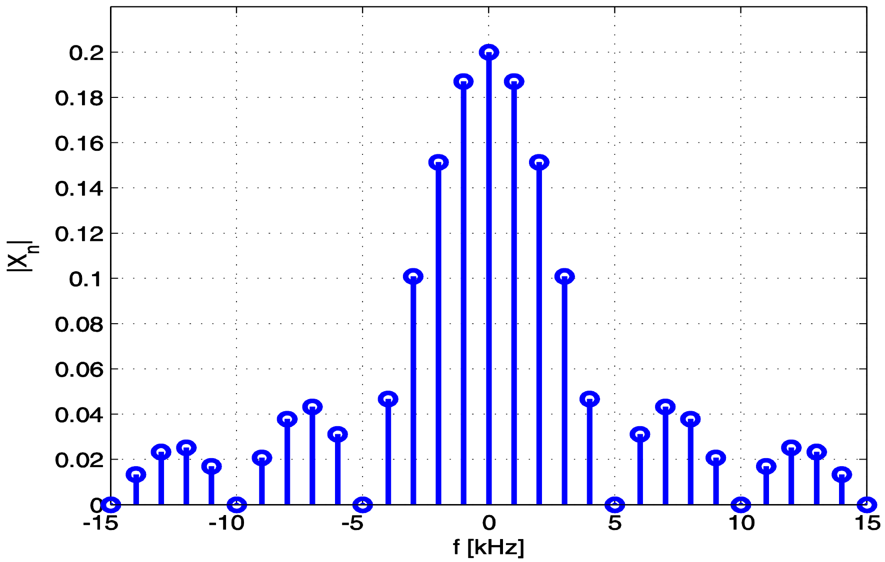
$$\sin\left(\frac{2\pi f_{k,nule}\tau}{2}\right) = 0 \Rightarrow f_{k,nule} = k \times \frac{1}{\tau},\ (k \in Z,\ k \neq 0)$$

- Nula anvelope može se/ne mora poklopiti sa učestanošću harmonika!
- Slika sa prethodnog slajda (dole, levo) predstavlja koeficijent X_n (koji je u konkretnom slučaju realan), dok <u>amplitudski spektar predstavlja apsolutnu vrednost prikazanih vrednosti</u> (slika dole, desno).

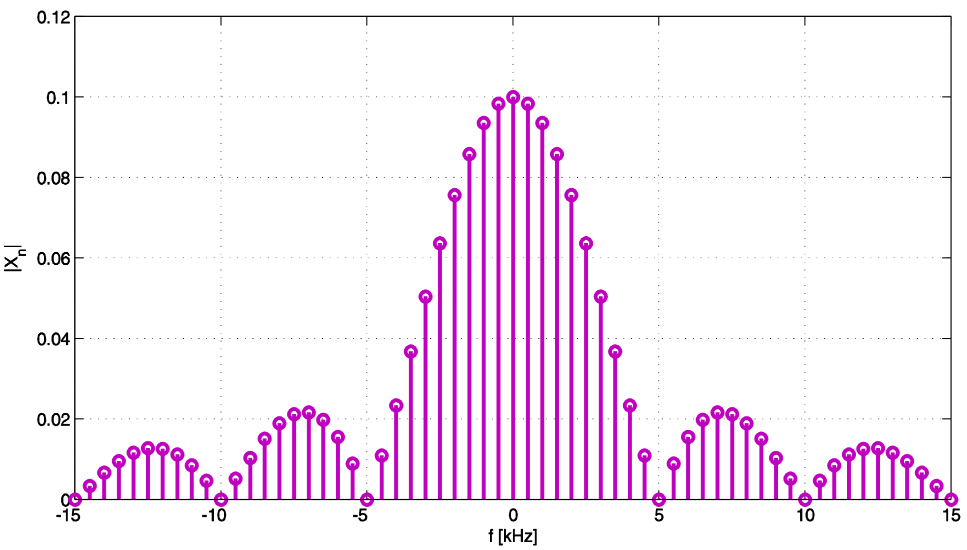
* Granični slučajevi

- Kada perioda raste, spektar se zgušnjava, za T $\rightarrow \infty$, spektar postaje kontinualan (a signal aperiodičan).
- Kada se trajanje impulsa skraćuje nule anvelope se pomeraju ka višim vrednostima, za $\tau \rightarrow 0$ anvelopa spektra postaje ravna.
- Kada istovremeno važi $\tau \rightarrow 0$, U $\rightarrow \infty$, a Uτ=1 povorka impulsa se pretvara u periodičnu povorku Delta impulsa – [anvelopa=1/T].

Uticaj parametara signala na oblik amplitudskog spektra



T=1ms⇒f_0=1/T=1kHz
τ=0.2ms
Faktor režima τ/T=1/5
U=1 ⇒ X_0=Uτ/T=0.2



T=2ms⇒f_0=1/T=0.5kHz ⇒za dvostruko veće *T*, rastojanje između spektralnih komponenata je dvostruko manje, tj. spektar je „gušći“
τ=0.2ms ⇒nule anvelope nisu promenjene
Faktor režima τ/T=1/10
U=1 ⇒ X_0=Uτ/T=0.1

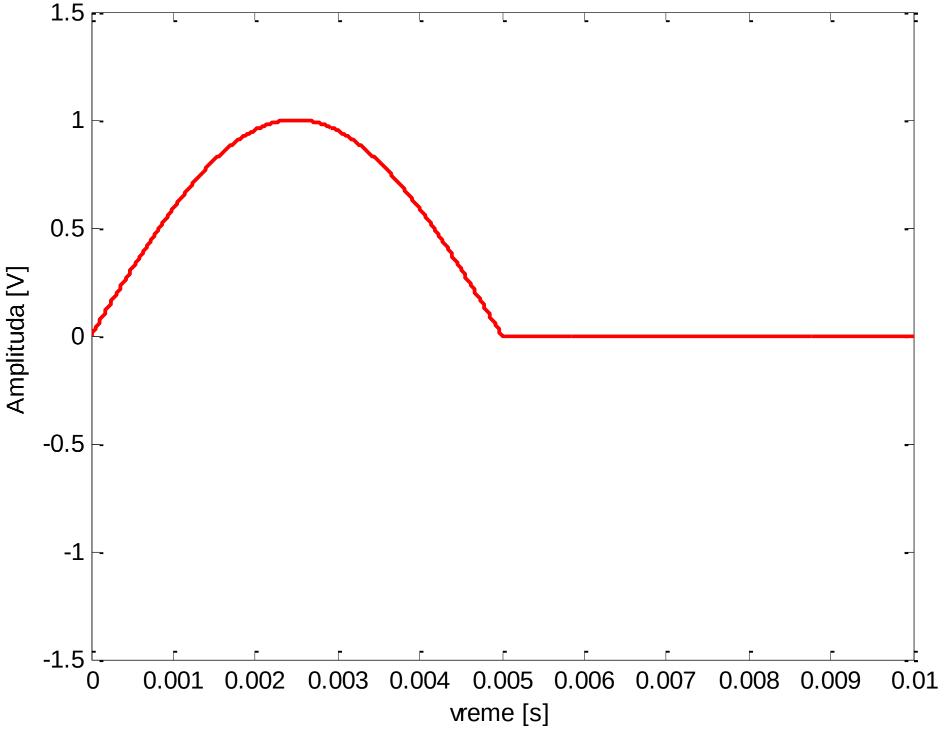
Pregled osobina periodičnih signala

* **Najvažnije osobine:**
  - **Spektar je** diskretan
    - Spektar pokazuje amplitude i faze kosinusoida čijim se zbirom može odrediti polazni periodični signal
    - Rastojanje komponenti u spektru iznosi $f_0=1/T$ (T je perioda signala) i ni u kom slučaju ne može biti manje od te vrednosti
    - Broj komponenti u spektru može biti beskonačan (ali ne mora!)
  - **Deo snage koji "nosi" odgovarajuća spektralna komponenta srazmeran je** kvadratu njene amplitude
  - **Dvostrani amplitudski spektar je simetričan (parna funkcija od *n*)**
  - **Dvostrani fazni spektar je neparna funkcija od *n***
  - **Neke komponente u spektru su *manje značajne (od drugih)* – ako ne uđu u zbir, rezultantni signal se neće u velikoj meri razlikovati od originalnog periodičnog signala.**

Šta ako signal nije periodičan?

* Ako signal nije periodičan, da li je moguće takav signal predstaviti zbirom određenog broja kosinusoida?
* Posmatramo signale koji nisu periodični, ali jesu deterministički , odnosno mogu se predstaviti određenom matematičkom funkcijom.
* Primer:

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi ft), & t \in [0, 1/(2f)] \\ 0, & t \notin [0, 1/(2f)] \end{cases}$$



Harmonijska analiza aperiodičnih signala

* Ovi signali nisu periodični - ne postoji T tako da je $x(t)=x(t+T)$.
  - Može se smatrati da im je perioda beskonačna $T\to\infty$, pa $f_0=1/T\to 0$
  - **Spektralne komponente se približavaju i spektar postaje <u>kontinualan</u>!**
* Spektar aperiodičnog signala je kontinualan $\rightarrow$ definisan za svako f
* Signal $x(t)$ se može predstaviti u obliku (<u>integral umesto sume</u>):

$$\boxed{x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(jf)e^{+j2\pi ft}df}$$

* Pri čemu je sa $X(jf)$ označen spektar signala

$$\boxed{X(jf)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt}$$

* Prethodna dva izraza se redom nazivaju **inverzna Furijeova transformacija** i **Furijeova transformacija**. Ovi izrazi čine <u>Furijeov transformacioni par za aperiodične signale</u>.

Harmonijska analiza aperiodičnih signala

* Spektar signala se opet može napisati u obliku

$$\boxed{X(jf) = \left|X(jf)\right| e^{j\theta(f)}}$$

i prikazati preko

- **Spektralne gustine amplitude** $|X(jf)| \rightarrow$ realna i kontinualna f-ja
- **Spektralna gustina faza** $\theta(f) \rightarrow$ realna i kontinualna f-ja

pri čemu važi:

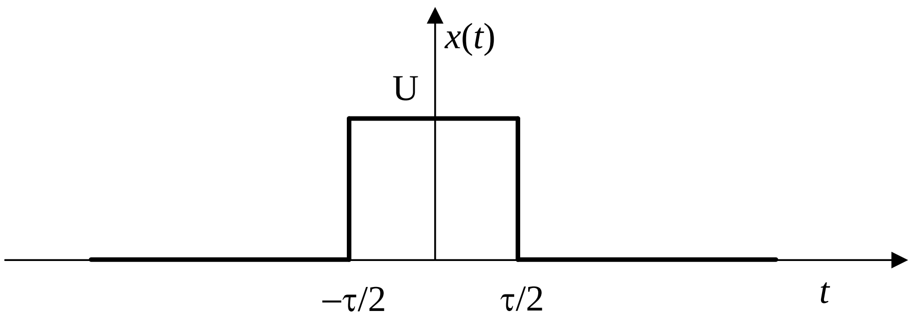
$$\left|X(-jf)\right| = \left|X(jf)\right|$$

$$\theta(-f) = -\theta(f)$$

$$\theta(f) = \arg\left\{X(jf)\right\}$$

Usamljeni pravougaoni impuls

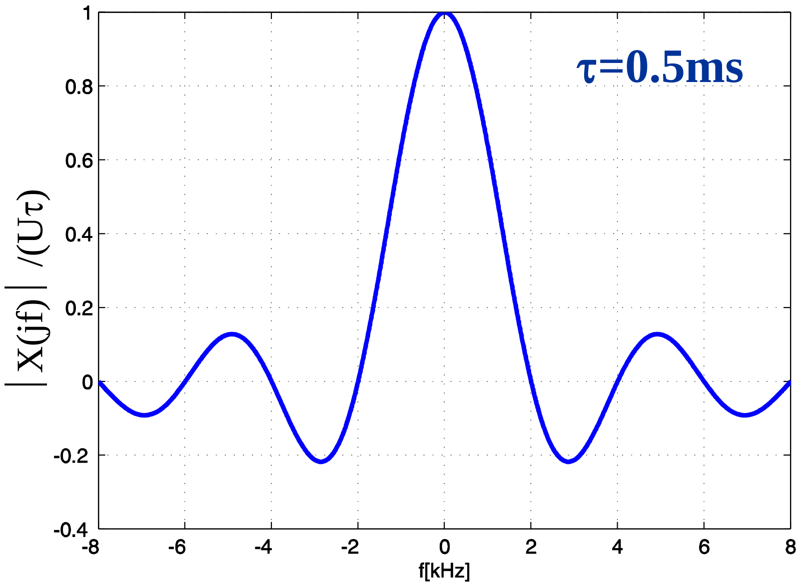
Signal dobijen od periodične povorke pravougaonih impulsa kada $T\to\infty$.



$$X(jf)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$X(jf)=\int_{-\tau/2}^{+\tau/2}U\underbrace{e^{-j2\pi ft}}_{\cos(2\pi ft)-j\sin(2\pi ft)}dt$$

$$X(jf)=U\int_{-\tau/2}^{+\tau/2}\cos(2\pi ft)dt=U\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$



$$\boxed{X(jf)=U\tau\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}}$$

Usamljeni pravougaoni impuls

* **Spektralna gustina amplituda |X(*jf*)|**

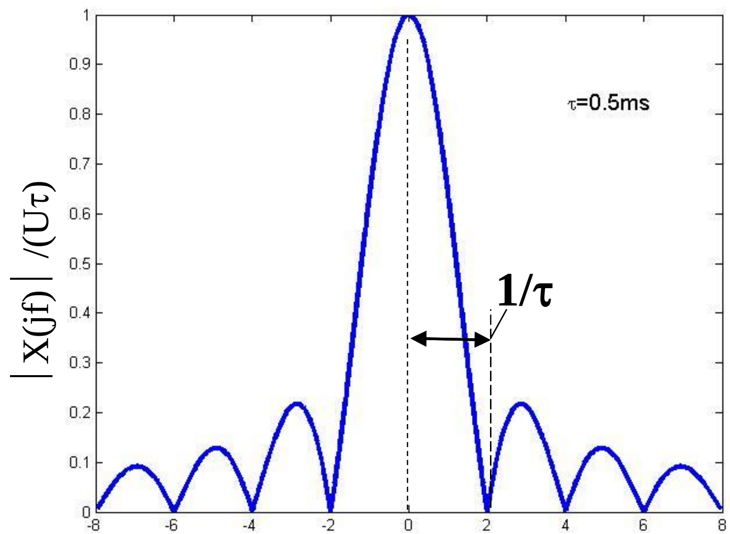
  Kontinualna parna funkcija učestanosti

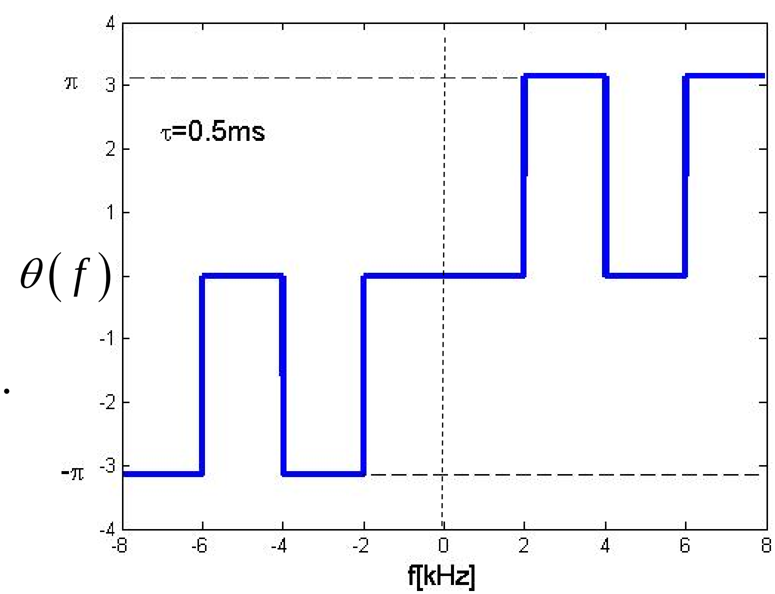
$$\left|X\left(jf\right)\right| = U\tau\left|\frac{\sin\left(\pi f\tau\right)}{\pi f\tau}\right|$$

* **Spektralna gustina faza θ(*f*)**

  Kontinualna neparna funkcija učestanosti

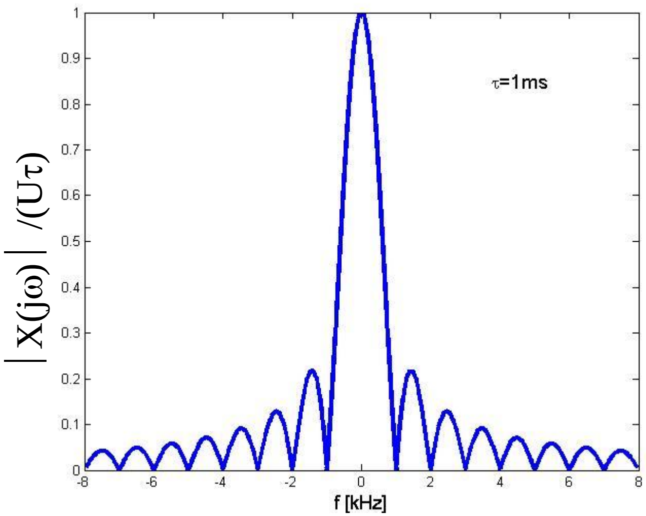
$$\theta\left(f\right)=\begin{cases}0,\sin(\pi f\tau)/(\pi f\tau)\geq 0\\ \pm\pi,\sin(\pi f\tau)/(\pi f\tau)<0\end{cases}$$



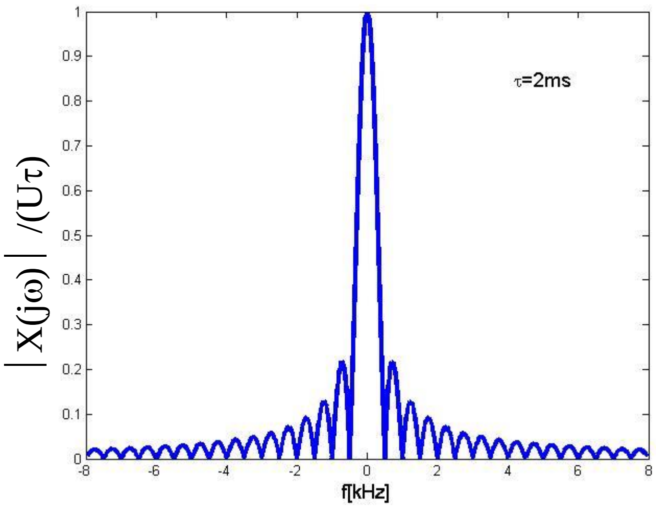


•Primer za impuls:
- amplitude U=1V
- trajanja τ=0.5ms
- prva nula u spektru na 1/τ=2kHz
- nule spektra na *k*/τ=*k*×2kHz, *k*=±1, ±2,…
- spektar u nuli ima vrednost Uτ[Vs]
- energija signala je $U^2\tau$[Ws=J].

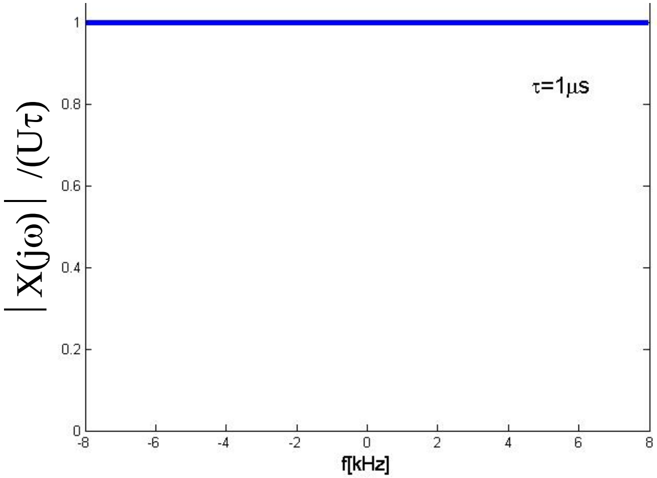
Usamljeni pravougaoni impuls



τ=1ms⇒nule spektra na ±1kHz, ±2kHz, ±3kHz,...



τ=2ms⇒ nule spektra na ±0.5kHz, ±1kHz, ±1.5kHz,...



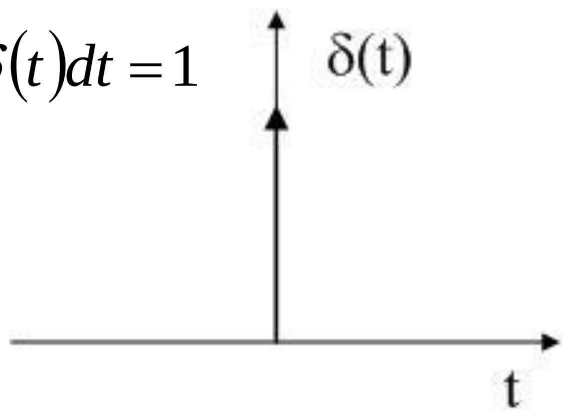
τ=1μs⇒ nule spektra na ±1MHz, ±2MHz, ±3MHz,...

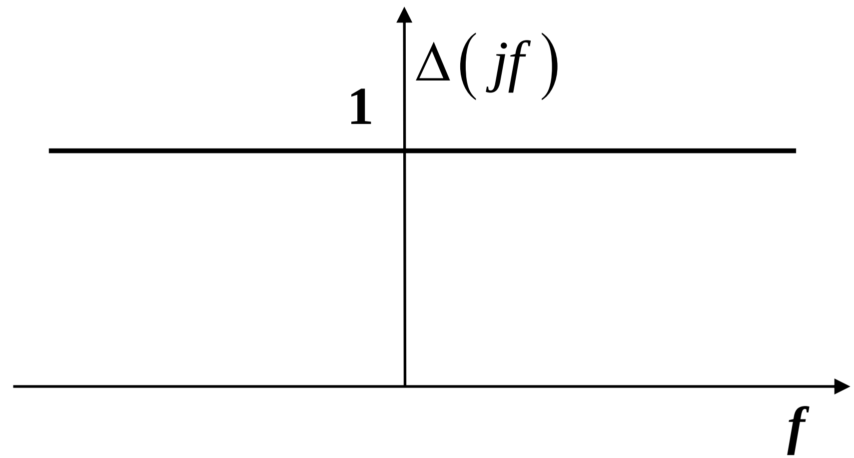
- **Što je trajanje signala kraće to se značajne komponente signala nalaze u širem opsegu frekvencija**
- **Drugim rečima, kada je trajanje impulsa kraće, za prenos značajnih komponenti posmatranog signala potrebna je veća širina propusnog opsega**

Delta impuls

* **Impuls izuzetno kratkog trajanja ($\tau \to 0$) i teorijski beskonačno velike amplitude, ali tako da njegova površina ima jediničnu vrednost.**
  - **Ovim impulsom aproksimiramo signale vrlo kratkog trajanja**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$





* **Furijeova transformacija funkcije $\delta(t)$ jednaka je konstanti, koja pritom ima jediničnu vrednost.**
* **Spektar Delta impulsa (aperiodičan signal) je kontinualan i konstantan na svim učestanostima. Spektar Delta impulsa je beskonačno širok!**

$$\Delta(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

Osobine spektra usamljenog pravougaonog impulsa

* **Osobine:**
  - Spektar je <u>beskonačno širok</u>!
  - Amplitudski spektar je kontinualan, sadrži komponente na svim učestanostima.
  - Nule spektra javljaju se kada je ispunjeno

$$\sin(\pi f_{\mathrm{k}}\tau)=0 \rightarrow \pi f_k\tau = k\pi$$

  - Nule spektra se nalaze na učestanostima k/τ ($k=\pm1, \pm2, \pm3,\ldots$)

* **Granični slučajevi**
  - Kada se trajanje impulsa povećava nule spektra se pomeraju ka nižim vrednostima, za $\tau\rightarrow\infty$ spektar se svodi na Dirakov impuls.
  - Kada se trajanje impulsa skraćuje nule spektra se pomeraju ka višim vrednostima, za $\tau\rightarrow0$ spektar postaje ravan.
  - Kada istovremeno važi $\tau\rightarrow0$, $\mathrm{U}\rightarrow\infty$ a $\mathrm{U}\tau=1$ impuls se pretvara u Delta impuls, dok spektar ima konstantnu jediničnu vrednost.

Osobine spektara

* Spektar *periodičnog* signala je ***diskretan*** (komponente se mogu naći <u>samo na</u> umnošcima osnovne učestanosti signala)
  - Periodični signal se može predstaviti zbirom (konačnog ili beskonačnog broja) kosinusoida čije su učestanosti jednake celobrojnom umnošku osnovne učestanosti signala
* Spektar *aperiodičnog* signala je ***kontinualan*** (komponente spektra se mogu naći na svakoj od učestanosti)
  - Znači da se aperiodični signal teorijski može predstaviti zbirom beskonačnog broja kosinusoida čije se učestanosti razlikuju za beskonačno malu vrednost
* U spektru signala sve komponente nisu jednako značajne, odnosno neke su više, a neke manje istaknute
* I u slučaju kada je spektar signala teorijski beskonačno širok, značajne komponente signala se najčešće nalaze u konačnom opsegu učestanosti.
* Ako se odseče deo komponenti koje nose manji deo snage (energije), signal može biti dosta verno rekonstruisan.