PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

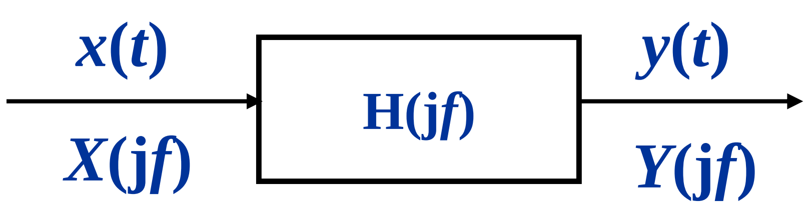
Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020.

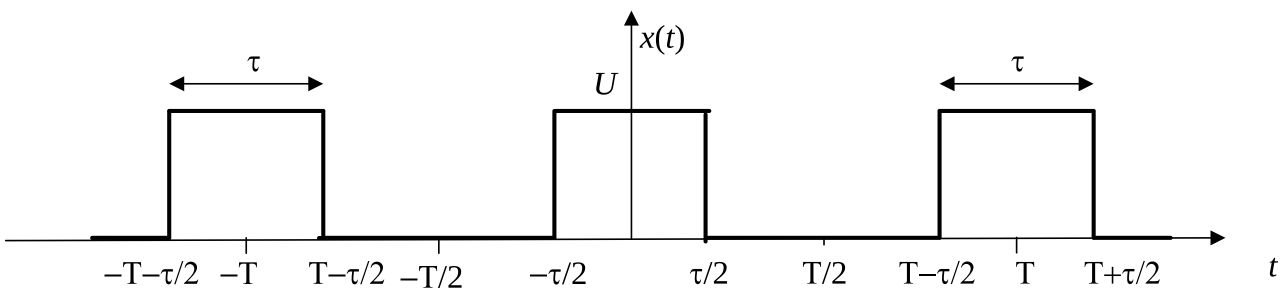
Zadatak 1 – NF filtar

Signal $x(t)$ predstavlja periodičnu povorku pravougaonih impulsa, amplitude U=1, periode T=5ms i trajanja impulsa τ=1.25ms. Signal $x(t)$ dovodi se na ulaz filtra propusnika niskih učestanosti (NF filtar) funkcije prenosa H(jf).
Na izlazu filtra dobija se signal $y(t)$. Odrediti vremenski oblik signala $y(t)$, spektar signala, kao i snagu signala P_Y, ukoliko je H(jf) definisana sa

a) $$H(jf)=\begin{cases}1\times e^{-j2\pi\frac{f}{1000}}, & f_g\le 500Hz\\ 0, & f_g>500Hz\end{cases}$$

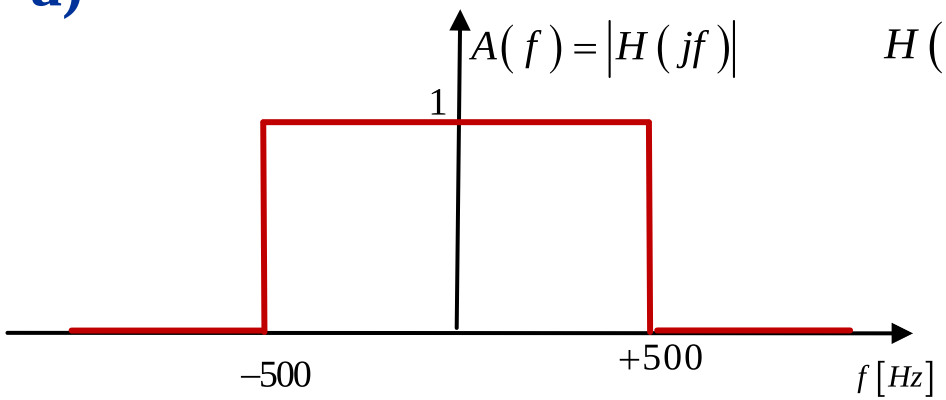
b) $$H(jf)=\begin{cases}2\times e^{-j2\pi\frac{f}{1000}}, & f_g\le 500Hz\\ 0, & f_g>500Hz\end{cases}$$





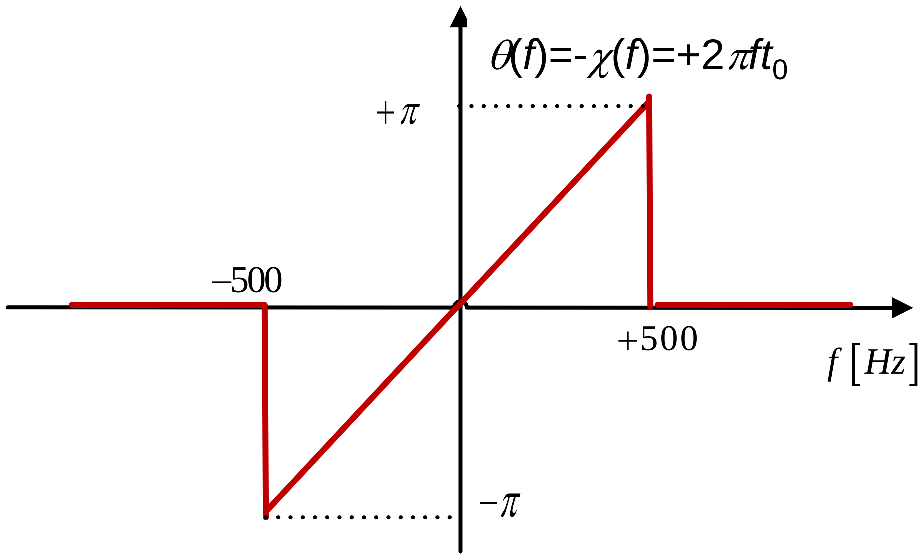
Zadatak 1 – NF filtar

a)



$$H(jf)=A(f)e^{-j2\pi\times f\times t_0}=\begin{cases}1\times e^{-j2\pi f\times\frac{1}{1000}}, & f_g\le 500Hz\\ 0, & f_g>500Hz\end{cases}$$

$$|H(jf)|=\begin{cases}1, & f_g\le 500Hz\\ 0, & f_g>500Hz\end{cases}$$

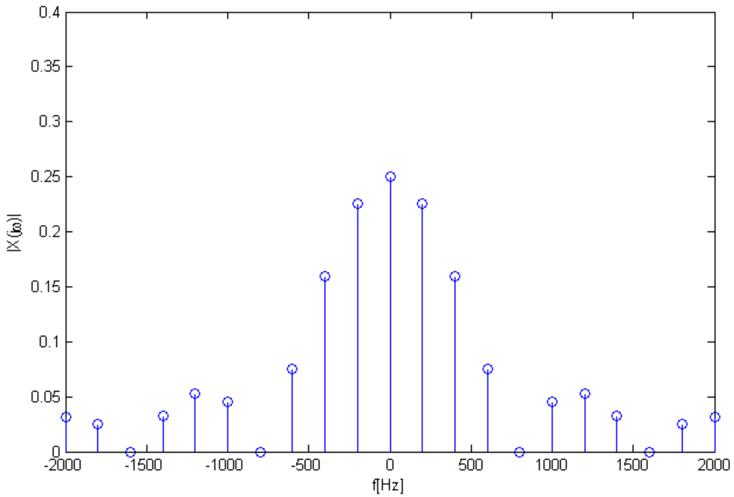


- Kroz NF filtar granične učestanosti f_{gr} prolaze sve komponente koje se nalaze na učestanostima manjim od f_{gr}=500Hz

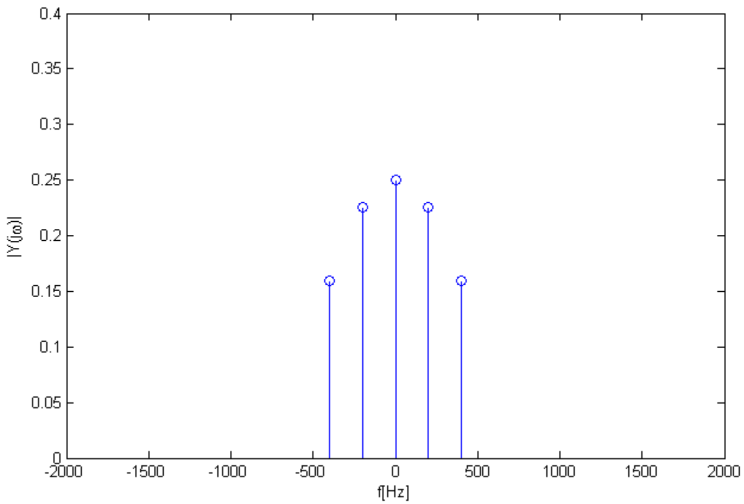
- Karakteristika faznog kašnjenja je oblika $\chi(f)$= -2π×ft_0, pa se za sve komponente koje se nalaze unutar propusnog opsega filtra unosi kašnjenje jednako t_0=1s/1000=1ms.

Zadatak 1 – NF filtar

a) Spektar signala $x(t)$, X_n



Spektar signala $y(t)$, Y_n



Osnovni parametri signala su:

- Amplituda U=1, perioda T=5ms i trajanje impulsa τ=1.25ms

- **Osnovna učestanost signala je f_0=1/T=200Hz**
- **Spektar signala $x(t)$ je**

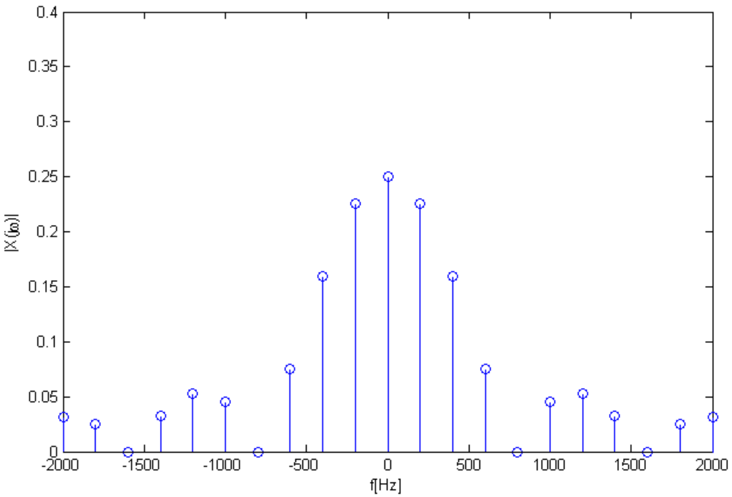
$$X_n = \frac{U\tau}{T}\frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}} = \frac{U}{4}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\frac{n\pi}{4}}$$

- **Kroz NF filtar granične učestanosti f_{gr}=500Hz prolaze jednosmerna komponenta (0Hz), kao i komponente na frekvenciji 200Hz (prvi harmonik) i 400Hz (drugi harmonik).**
- **Amplitude komponenata koje postoje na izlazu filtra nisu promenjene jer je u propusnom opsegu amplitudska karakteristika jednaka**

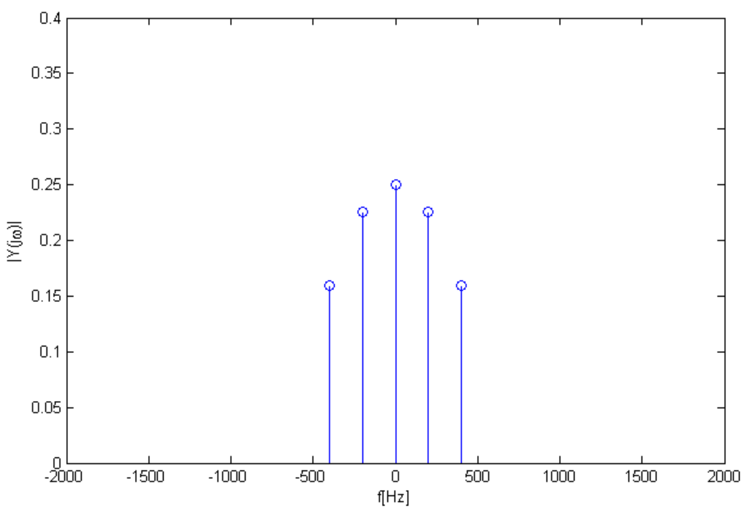
$$A(f) = \left|H(jf)\right| = 1$$

Zadatak 1 – NF filtar

a) **Spektar signala $x(t)$, X_n**



Spektar signala $y(t)$, Y_n



Signal $x(t)$ može se napisati u obliku (razvoj u *Fourier*-ov red)

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2X_n \cos(2\pi \times n \times 200 \times t)$$

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2|X_n| \cos(2\pi \times n \times 200 \times t + \theta_n)$$

- **Signal $y(t)$ sastoji se od jednosmerne komponente (0Hz), kao i komponenata na frekvenciji 200Hz (prvi harmonik) i 400Hz (drugi harmonik). Za sve komponente koje se nalaze unutar propusnog opsega filtra uneto je kašnjenje jednako t_0=1/1000s=1ms.**

$$y(t) = AX_0 + \sum_{n=1}^{2} 2AX_n \cos(2\pi \times n \times 200 \times (t - t_0)),\ A = 1 \ \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{U}{4} + \sum_{n=1}^{+2} 2\frac{U}{4}\frac{\cos(n\pi/4)}{n\pi/4}\cos(2\pi \times n \times 200 \times (t - t_0))$$

Zadatak 1 – NF filtar

Ukupna snaga signala $x(t)$ jednaka je $$P_X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = \frac{U^2}{4} = 0.25$$

Spektar snage signala $x(t)$ je $$S_n = |X_n|^2 = \left(\frac{U}{4}\right)^2 \left(\frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4}\right)^2$$

U propusnom opsegu filtra amplitudska karakteristika je $A=|Y_n|/|X_n|=1$ (pojačanje po amplitudi svake od komponenata jednako je 1, tj. ne menja se). Samim tim i pojačanje snage u propusnom opsegu je $A_P=A^2=1$.

Vrednost pojačanja u decibelima u propusnom opsegu filtra jednaka je $a[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}(A_P) = 20\log_{10}(A) = 0\mathrm{dB}$.

Slabljenje signala u propusnom opsegu filtra je $1/A=|X_n|/|Y_n|=1$, dok je slabljenje snage $1/A^2=|X_n|^2/|Y_n|^2=1$.

Vrednost slabljenja u decibelima u propusnom opsegu filtra jednaka je $a_t[\mathrm{dB}] = -a[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}(1/A_P) = 20\log_{10}(1/A) = 0\mathrm{dB}$.

Zadatak 1 – NF filtar

Na izlazu NF filtra nalaze se komponente koje odgovaraju jednosmernoj komponenti i prvom i drugom harmoniku signala *x*(*t*).

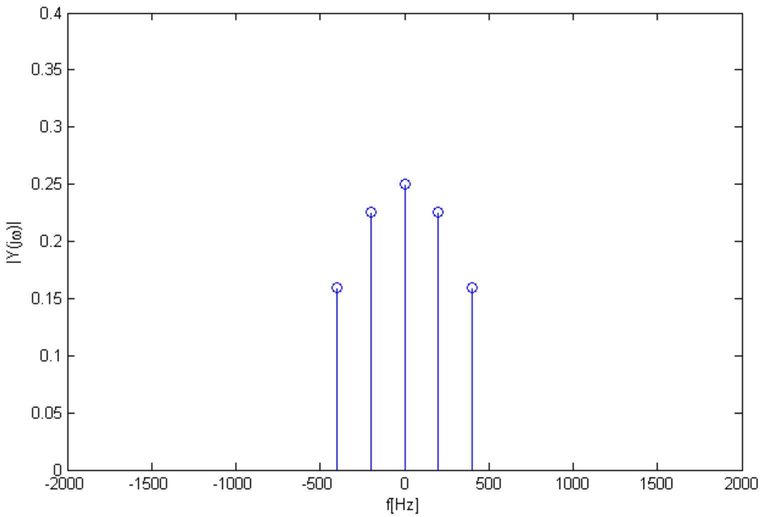
Kako je u propusnom opsegu NF filtra pojačanje signala *A*=1, vrednosti amplituda komponenti koje se nalaze u propusnom opsegu filtra nisu promenjene i važi

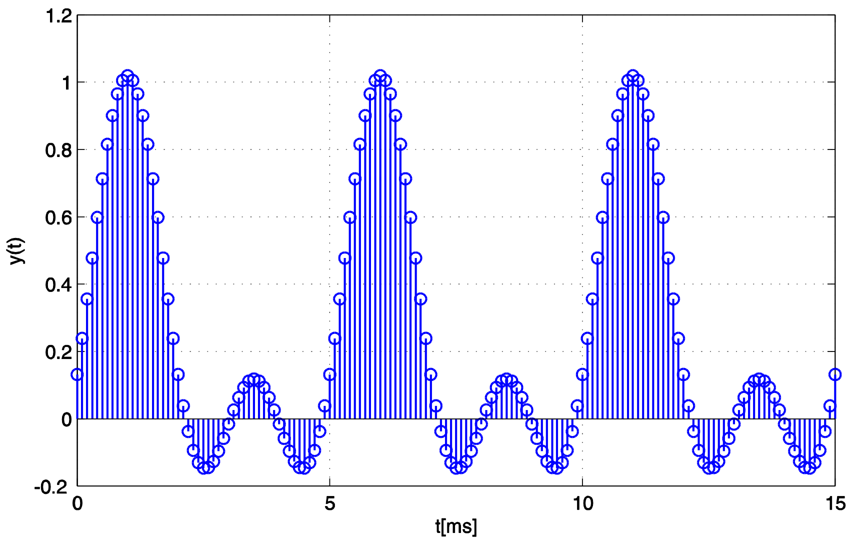
$|Y_0| = |X_0|$, $|X_{-1}| = |X_{+1}| = |Y_{-1}| = |Y_{+1}|$, $|X_{-2}| = |X_{+2}| = |Y_{-2}| = |Y_{+2}|$

Snaga signala P_Y:

$$P_Y = \sum_{n=-2}^{2} |Y_n|^2 = \sum_{n=-2}^{2} |X_n|^2 = |X_{-2}|^2 + |X_{-1}|^2 + |X_0|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2$$

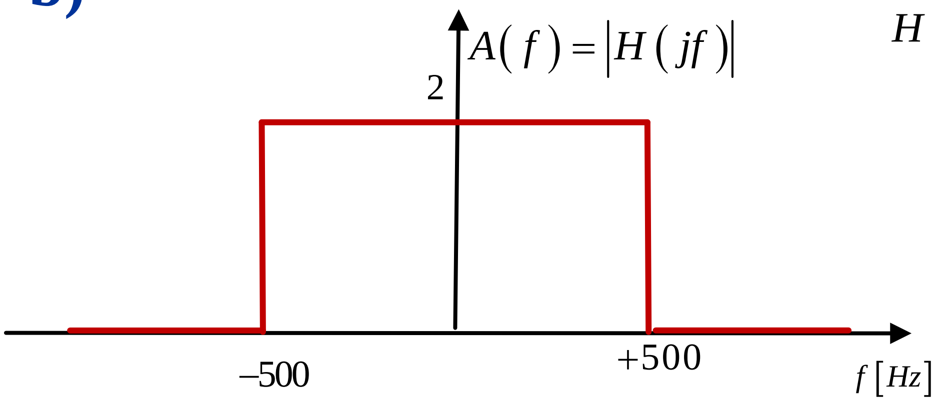
$$P_Y = \left(\frac{U}{4}\right)^2 \left[1 + 2\sum_{n=1}^{2}\left(\frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4}\right)^2\right] = 0.2145$$





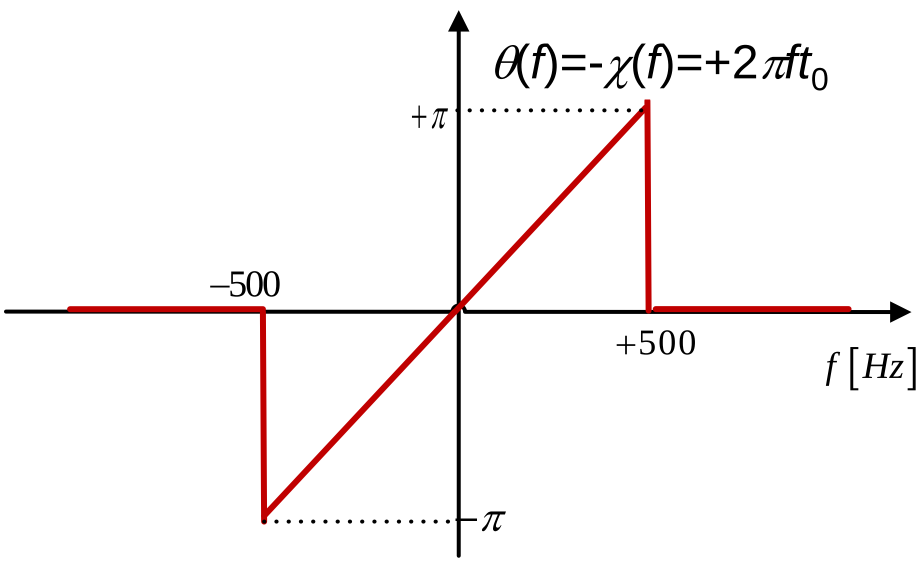
Zadatak 1 – NF filtar

b)



$$H(jf)=A(f)e^{-j2\pi\times f\times t_0}=\begin{cases}2\times e^{-j2\pi\frac{f}{1000}}, & f_g\le 500Hz\\ 0, & f_g>500Hz\end{cases}$$

$$\left|H(jf)\right|=\begin{cases}2, & f_g\le 500Hz\\ 0, & f_g>500Hz\end{cases}$$



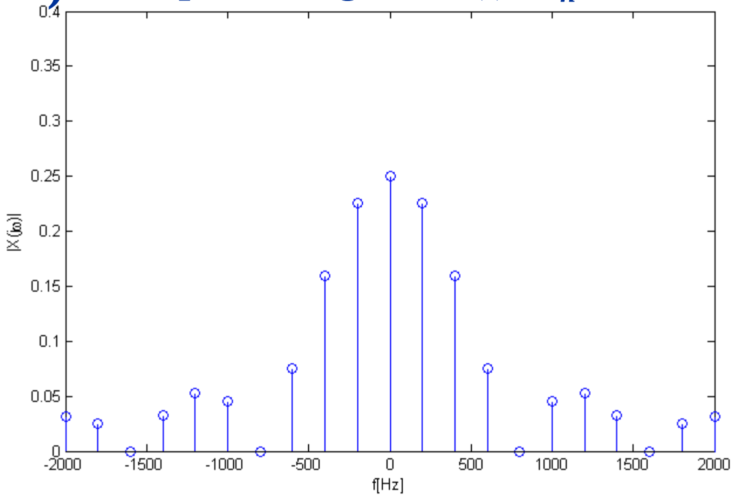
-Kroz NF filtar granične učestanosti f_{gr} prolaze sve komponente koje se nalaze na učestanostima manjim od f_{gr}=500Hz

-Amplituda <u>svake od komponenata</u> u propusnom opsegu filtra u ovom slučaju pojačana je 2 puta

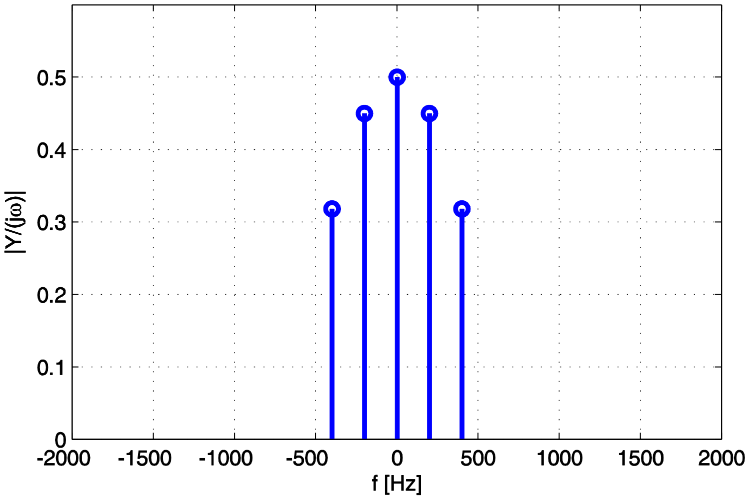
- Za sve komponente koje se nalaze unutar propusnog opsega filtra uneto je kašnjenje jednako t_0=1/1000s=1ms.

Zadatak 1 – NF filtar

a) Spektar signala $x(t)$, X_n



Spektar signala $y(t)$, Y_n



Posmatrani signal $x(t)$ može se napisati u obliku

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2X_n \cos(2\pi \times n \times 200 \times t)$$

Signal $y(t)$ sastoji se od jednosmerne komponente (0Hz), kao i komponenata na frekvenciji 200Hz (prvi harmonik) i 400Hz (drugi harmonik). Svaka od komponenata koje se nalaze u propusnom opsegu filtra, na izlazu filtra je dva puta veće vrednosti amplitude (A=2).

$$y(t) = AX_0 + \sum_{n=1}^{2} 2AX_n \cos(2\pi \times n \times 200 \times (t - t_0))$$

$$y(t) = 2 \times \frac{U}{4} + \sum_{n=1}^{2} 2 \times 2 \frac{U}{4} \frac{\cos(n\pi/4)}{n\pi/4} \cos(2\pi \times n \times 200 \times (t - t_0))$$

Zadatak 1 – NF filtar

Pojačanje po amplitudi svake od komponenata koje su u propusnom opsegu filtra je $A=|Y_n|/|X_n|=2$.

Pojačanje snage svake od komponenata koje su u propusnom opsegu filtra je $A_p=A^2=4$.

Vrednost pojačanja u decibelima u propusnom opsegu filtra jednaka je $a[\mathrm{dB}]=10\log_{10}(A_p)=20\log_{10}(A)=6\mathrm{dB} > 0$ (jer je signal zaista pojačan).

Slabljenje signala u propusnom opsegu filtra je $1/A=|X_n|/|Y_n|=1/2$, slabljenje snage $1/A^2= |X_n|^2/|Y_n|^2=1/4$.

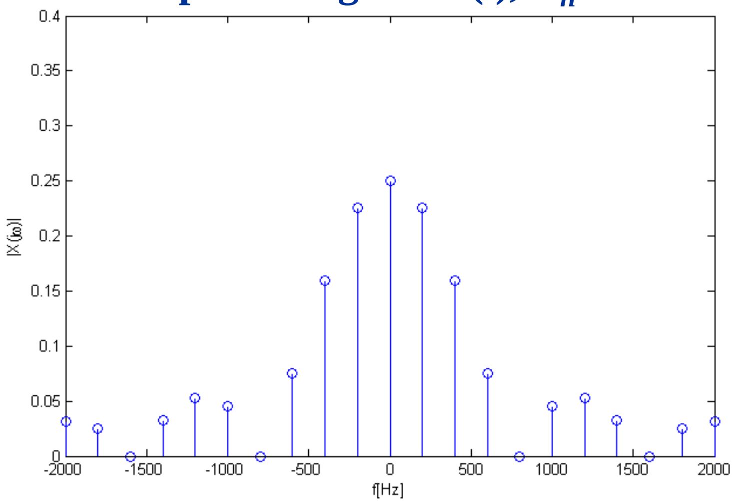
Vrednost slabljenja u decibelima u propusnom opsegu filtra jednaka je $a_t[\mathrm{dB}]= - a[\mathrm{dB}] = 10\log_{10}(1/A_p) = 20\log_{10}(1/A) = - 6\mathrm{dB} < 0$ (jer je signal zaista pojačan).

Na izlazu NF filtra nalaze se komponente koje odgovaraju jednosmernoj komponenti i prvom i drugom harmoniku signala $x(t)$, koje su pojačane dva puta (u propusnom opsegu NF filtra pojačanje signala je $A=2$).

Odgovarajuće vrednosti amplituda komponenti na izlazu filtra su $|Y_0|=2|X_0|$, $|Y_{-1}|=|Y_{+1}|=2|X_{-1}|=2|X_{+1}|$, $|Y_{-2}|=|Y_{+2}|= 2|X_{-2}| =2|X_{+2}|$

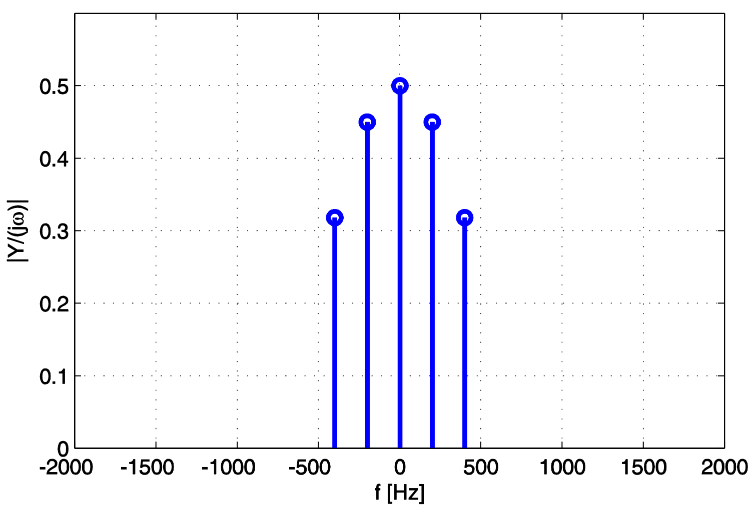
Zadatak 1 – NF filtar

Spektar signala $x(t)$, X_n



$$P_X = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = \frac{U^2}{4}$$

Spektar signala $y(t)$, Y_n



$$P_Y = \sum_{n=-2}^{2} |Y_n|^2$$

$$P_Y = \sum_{n=-2}^{2} A^2 |X_n|^2$$

$$P_Y = A^2 |X_{-2}|^2 + A^2 |X_{-1}|^2 + A^2 |X_0|^2 + A^2 |X_1|^2 + A^2 |X_2|^2$$

$$P_Y = A^2 \left(\frac{U}{4}\right)^2 \left[1 + 2\sum_{n=1}^{2}\left(\frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4}\right)^2\right] = 4 \times 0.2145 = 0.858$$

Zadatak 2 – Idealno odabiranje

Potrebno je izvršiti diskretizaciju u vremenu (odabiranje) signala $x(t)=U\cos(2\pi f_0 t)$, U=1V, f_0=5kHz. Pretpostaviti da se primenjuje idealno odabiranje i da je za potrebe rekonstrukcije na raspolaganju idealni NF filtar.

a) Odrediti minimalnu vrednost učestanosti odabiranja, tako da se signal može pravilno rekonstruisati na osnovu svojih odbiraka.

b) Nacrtati spektar diskretizovanog signala (nakon postupka odabiranja) ukoliko je primenjeno idealno odabiranje sa učestanošću f_s=12kHz. Da li je u ovom slučaju ispunjen uslov teoreme odabiranja?

c) Ponoviti prethodnu tačku ukoliko se idealno odabiranje vrši učestanošću f_s=9kHz. Da li je u ovom slučaju ispunjen uslov teoreme odabiranja?

Rešenje: Signal $x(t)$ se sastoji od samo jedne komponente na učestanosti f_0=5kHz. Po uslovu teoreme odabiranja, minimalna učestanost $f_s=1/T_s$ kojom je potrebno odabirati signal $x(t)$ jednaka je dvostrukoj vrednosti maksimalne učestanosti u spektru signala $x(t)$ (u ovom slučaju $f_{max}=f_0$=5kHz)

$$f_s=2f_0=10\text{kHz},$$

odnosno, odbirci se moraju uzimati u ekvidistantnim intervalima čije je maksimalno trajanje $T_s=1/f_s$=100μs.

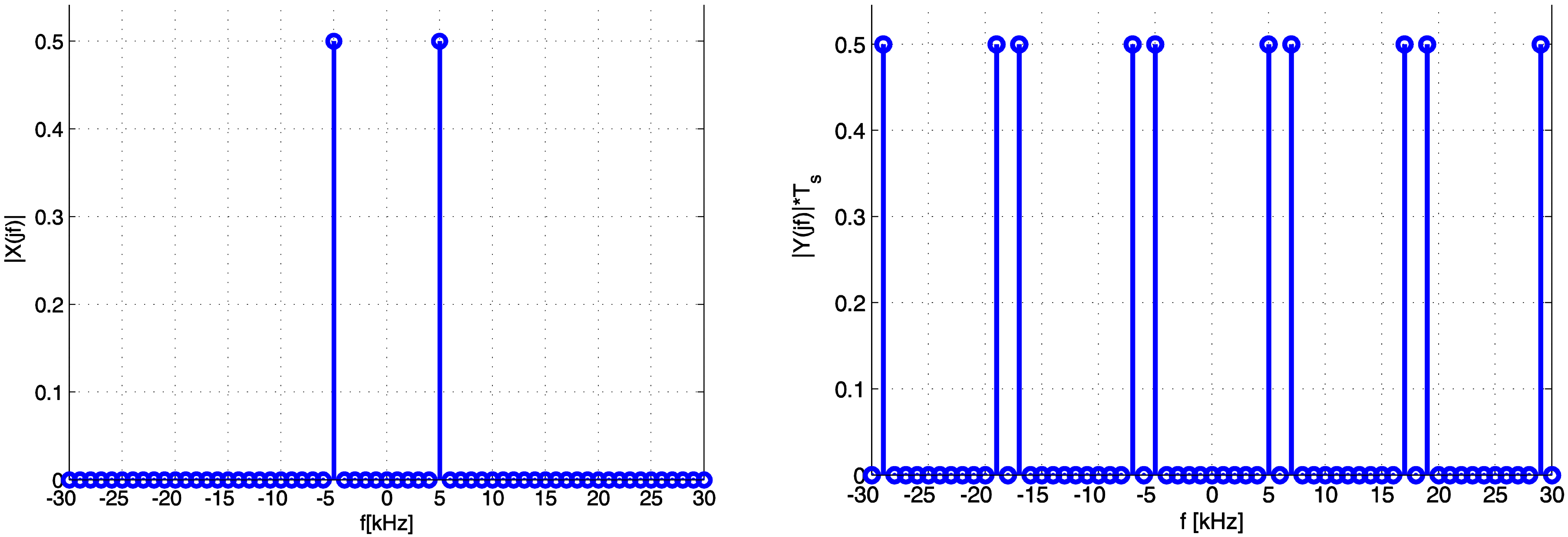
Zadatak 2 – Idealno odabiranje

Spektar diskretizovanog signala *y*(*t*) (nakon primenjenog idealnog odabiranja)

$$Y(jf) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left[j(f - nf_S) \right]$$

Ovom formulom je matematički opisano da spektar signala nakon postupka idealnog odabiranja predstavlja sumu beskonačno spektara kontinualnog signala (pre diskretizacije) transliranih oko umnoška učestanosti odabiranja, *$n \times f_s = n \times 12kHz$, $n=0, \pm 1, \pm 2$, ...*

Kako spektar signala x(t) ima komponente na ±5kHz, spektar signala y(t) imaće komponente na ±5kHz, ±12kHz±5kHz (tj. ±7kHz i ±17kHz), ±24kHz ±5kHz (tj. ±19kHz i ±29kHz),...

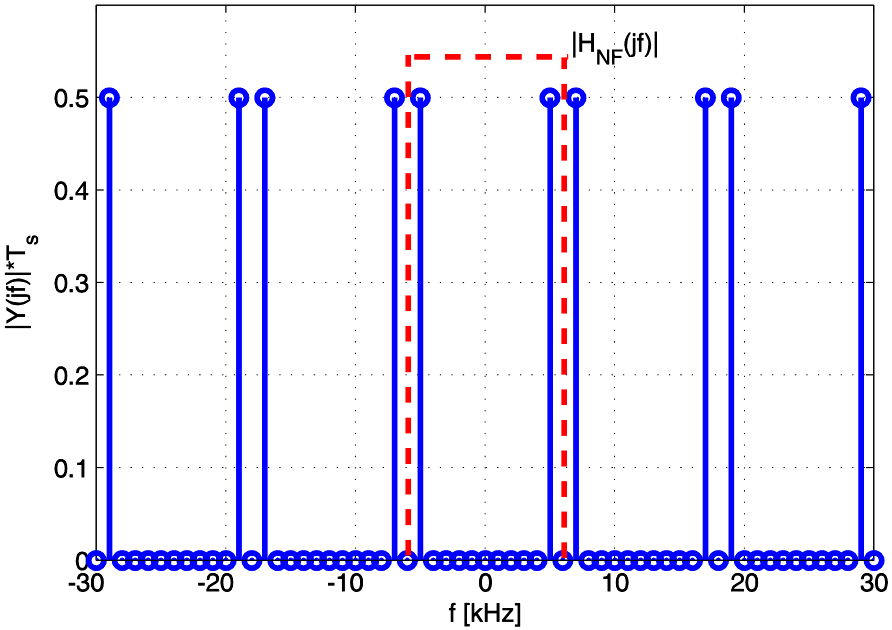


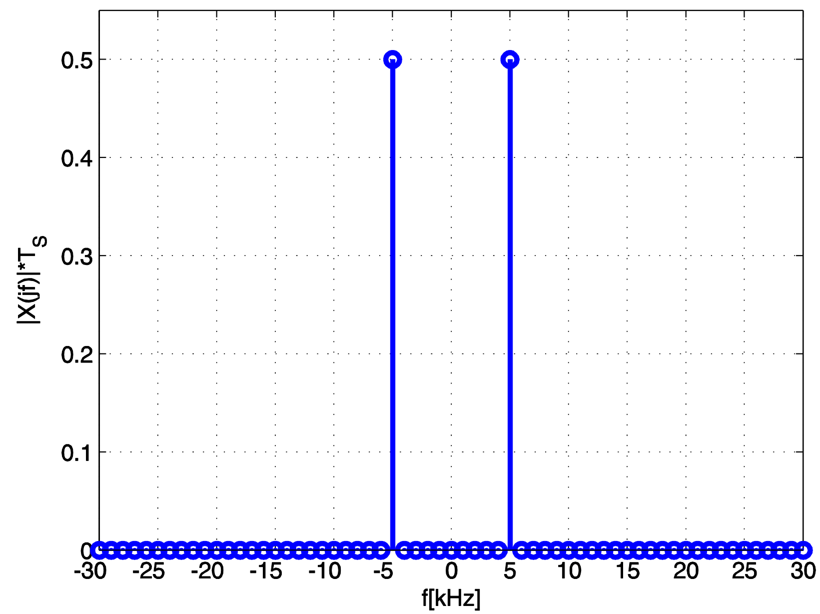
Zadatak 2 – Idealno odabiranje

Spektar signala *y*(*t*) dat je sa

$$Y(jf)=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left[j(f-nf_S)\right]$$

Komponente signala *y*(*t*) nalaze se na ±5kHz, ±7kHz, ±17kHz, ±19kHz, ±29kHz,...
Kako je f_s=12kHz>2·f_{max}=2·f_0=2·5kHz=10kHz, uslov teoreme odabiranja je ispunjen. Rekonstrukcija originalnog signala je moguća propuštenjem signala *y*(*t*) kroz idealan NF filtar čija je granična učestanost 5kHz<f_{gr} <7kHz. Pri rekonstrukciji filtar propušta komponente originalnog signala, a potrebno je da potisne (eliminiše) komponente nastale transliranjem spektra signala oko učestanosti ±12kHz, ±24kHz, ±36kHz,...

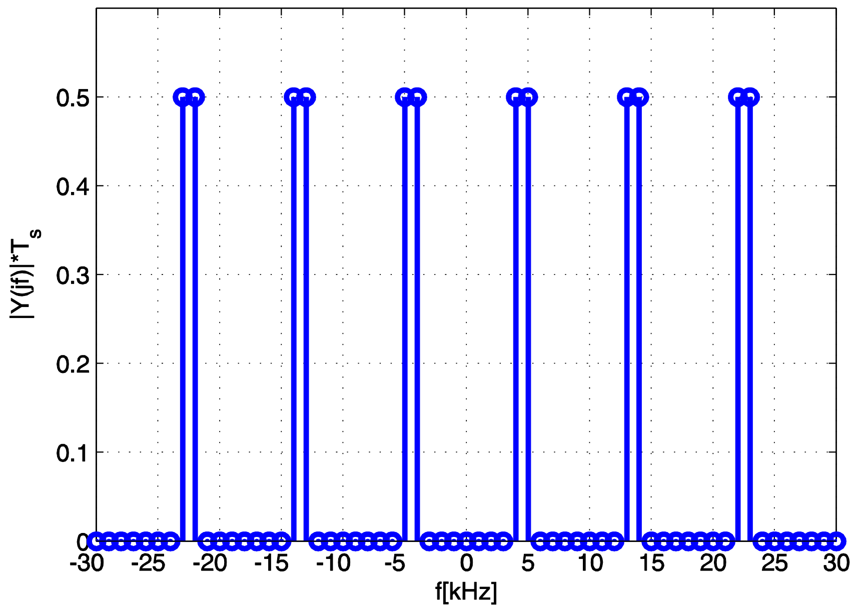


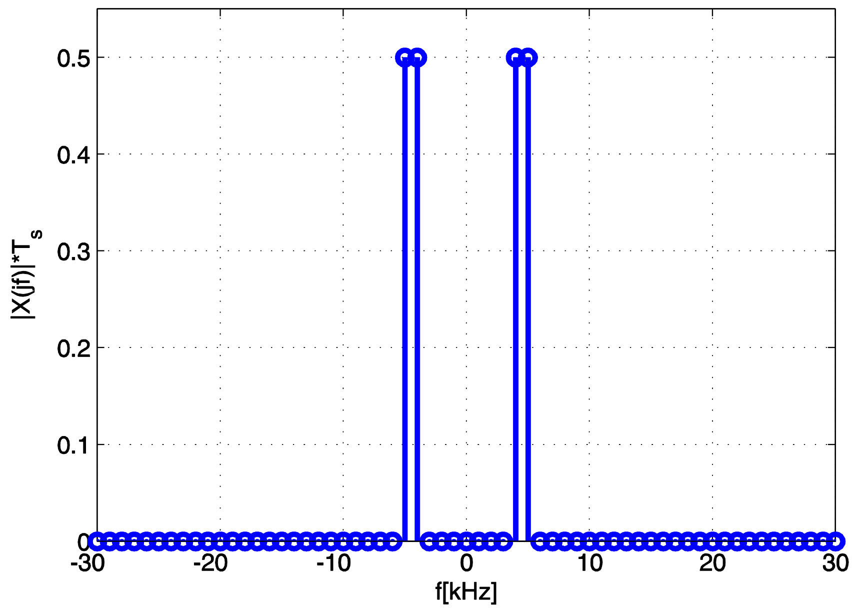


Zadatak 2 – Idealno odabiranje

c) Spektar signala nakon odabiranja je $$Y(jf)=\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left[j(f-nf_S)\right]$$

U ovom slučaju učestanost odabiranja je f_s=9kHz, pa kako signal $x(t)$ ima komponente na ±5kHz, spektar signala $y(t)$ imaće komponente na ±5kHz, ±9kHz±5kHz, ±2×9kHz ±5kHz,... odnosno, na učestanostima ±4kHz, ±5kHz, ±13kHz, ±14kHz, ±22kHz, ±23kHz,...
Uslov teoreme odabiranja nije ispunjen jer je f_s=9kHz<$2\cdot f_{max}=2\cdot f_0=2\cdot 5$kHz=10kHz.
Propuštenjem signala y(t) kroz NF filtar čija je granična učestanost $f_0<f_{gr}<f_s-f_0$, dobio bi se signal $z(t)$ koji predstavlja zbir komponente originalnog signala na ± 5kHz i komponente na ± 4kHz (nastala transliranjem spektra originalnog signala oko učestanosti ±9kHz).





Zadatak 3 – Idealno odabiranje

Potrebno je izvršiti diskretizaciju u vremenu (odabiranje) signala $x(t)=U_1\cos(2\pi f_1 t)+U_2\cos(2\pi f_2 t)+U_3\cos(2\pi f_3 t)$, U_1=1V, U_2=0.8V, U_3=0.6V, f_1=1kHz, f_2=2kHz, f_3=4kHz.

a) Odrediti minimalnu vrednost učestanosti odabiranja, tako da se signal može pravilno rekonstruisati na osnovu svojih odbiraka.

b) Nacrtati spektar diskretizovanog signala ukoliko je primenjeno idealno odabiranje sa učestanošću f_s=10kHz. Da li je u ovom slučaju ispunjen uslov teoreme odabiranja?

Rešenje: Signal $x(t)$ se sastoji od tri komponente na učestanostima f_1=1kHz, f_2=2kHz, f_3=4kHz. Po uslovu teoreme odabiranja minimalna učestanost $f_s=1/T_s$ kojom je potrebno odabirati signal $x(t)$ jednaka je dvostrukoj vrednosti maksimalne učestanosti u spektru signala $x(t)$ (u ovom slučaju $f_{max}=f_0$=4kHz)

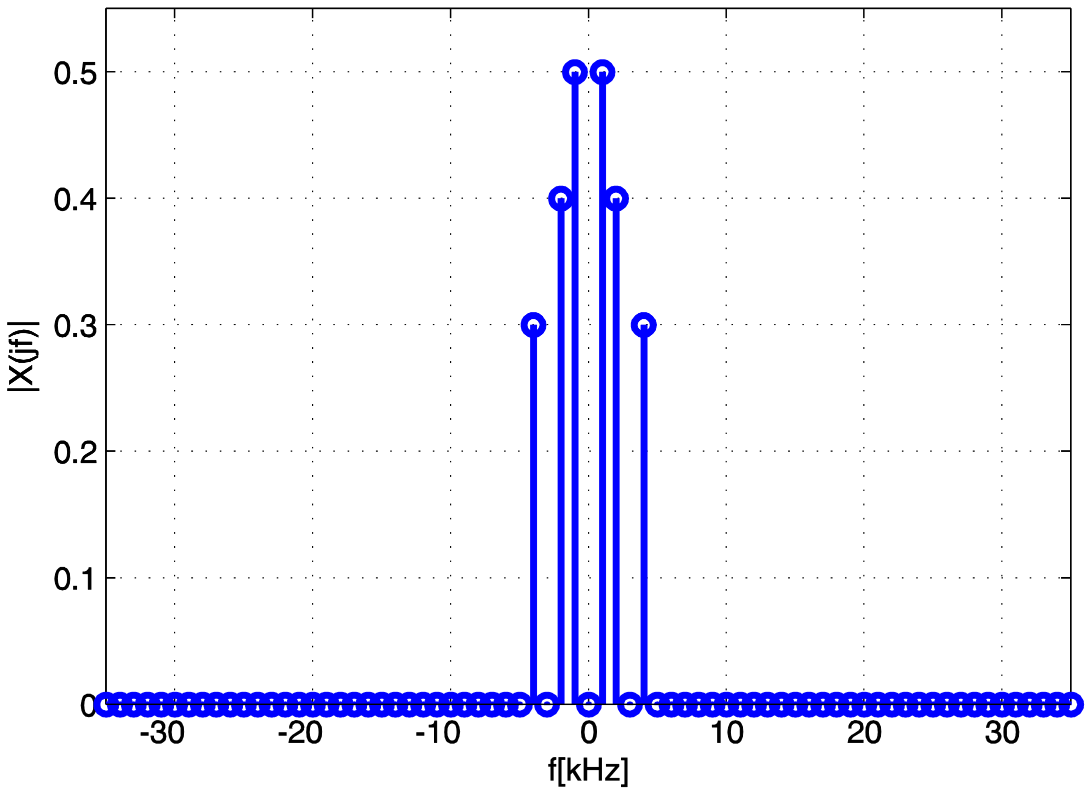
$$f_s=2\max(f_1, f_2, f_3)=8\text{kHz},$$

odnosno, odbirci se moraju uzimati sa maksimalnim razmakom od $T_s=1/f_s=125\mu$s.

Zadatak 3 – Idealno odabiranje

Spektar signala $x(t)$ sastoji se od tri komponente na učestanostima f_1=1kHz, f_2=2kHz, f_3=4kHz. Učestanost odabiranja $f_S=1/T_S$ zadovoljava uslov teoreme odabiranja jer je f_s=10kHz>2max(f_1, f_2, f_3) =8kHz.

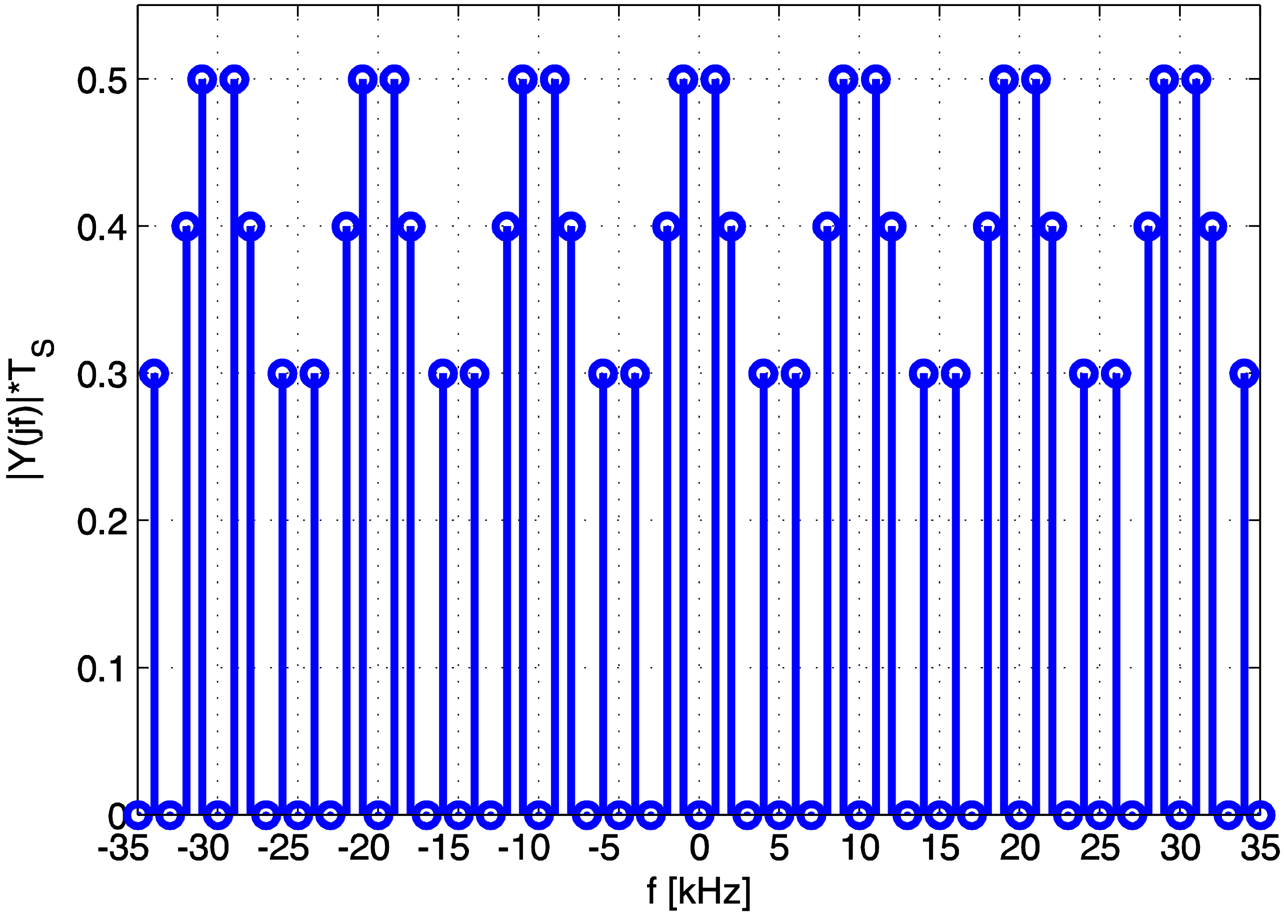
Spektar signala $x(t)$



Zadatak 3 – Idealno odabiranje

Spektar diskterizovanog signala

$$Y(jf) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left[j(f - nf_S) \right]$$



Kako se izvršava rekonstrukcija signala?