



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020.*

Zadatak 1

*Izvršiti binarno statističko kodovanje izvora informacija bez memorije koji emituje $q=6$ simbola sa sledećim verovatnoćama:

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
$P(s_i)$	0,65	0,05	0,08	0,15	0,04	0,03

- Primeniti binarni Hafmenov postupak kodovanja, odrediti efikasnost dobijenog koda.
- Nacrtati kodno stablo koje odgovara ovom kodu.
- Ako izvor emituje sekvencu simbola $s_2, s_1, s_4, s_1, s_5, s_3, s_6$ i kanal greši pri prenosu prvog i osmog bita, odrediti dekodovanu sekvencu u svakom od dva posmatrana slučaja

Zadatak 1 – rešenje (1)

Rešenje: Hafmenov postupak ilustrovan pomoću tabele

s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
s_1	0,65	0	s_1	0,65	0	s_1	0,65	0	s_1	0,65	0	s_1	0,65	0
s_4	0,15	11	s_4	0,15	11	s_4	0,15	11	$s_2s_3s_5s_6$	0,20*	10	$s_2s_3s_4s_5s_6$	0,35*	1
s_3	0,08	101	s_3	0,08	101	$s_2s_5s_6$	0,12*	100	s_4	0,15	11			
s_2	0,05	1001	s_5s_6	0,07*	1000	s_3	0,08	101						
s_5	0,04	10000	s_2	0,05	1001									
s_6	0,03	10001												

Entropija

$$H(S) = \sum_{i=1}^6 P(s_i) \lg \frac{1}{P(s_i)} = 1,66 \text{ [Sh/simb]}$$

Srednja dužina kodne reči

$$L = \sum_{i=1}^6 P(s_i) l(s_i) = 0,65 \times 1 + 0,05 \times 4 + 0,08 \times 3 + 0,15 \times 2 + 0,04 \times 5 + 0,03 \times 5 = 1,74 \text{ [b/simb]}$$

Efikasnost koda

$$\eta = \frac{H(S)}{L} \times 100\% = 95,4\%$$

*

Zadatak 1 – rešenje (2)

*Ostvareni stepen kompresije ρ pokazuje koliko se puta smanjuje broj bita na izlazu statističkog kodera u poređenju sa slučajem kada je primenjen binarni kod

$$\rho = \frac{\lceil \lg q \rceil}{L} = \rho_{\max} \eta$$

*Operator $\lceil \cdot \rceil$ označava prvi veći (ili jednak) ceo broj od vrednosti argumenta

* ρ_{\max} – maksimalna moguća vrednost stepena kompresije

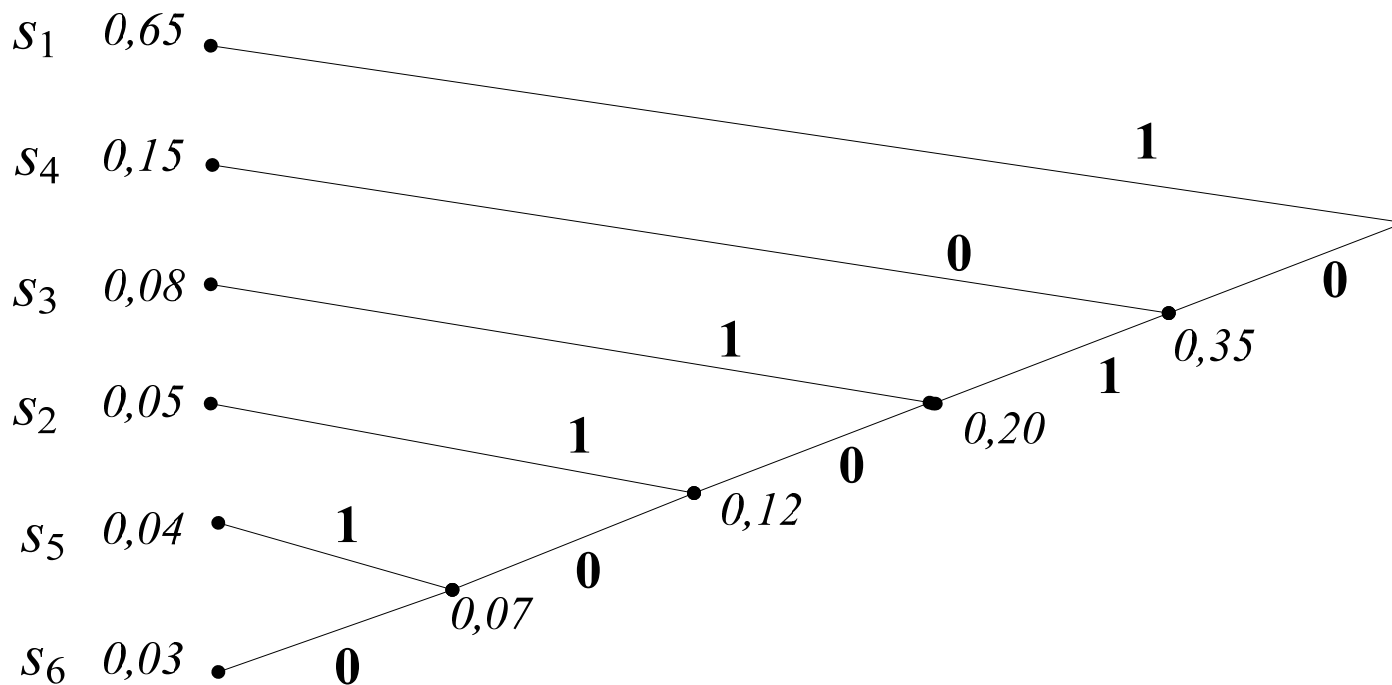
ρ_{\max} ne zavisi od primenjenog koda već je karakteristika izvora i pokazuje koliki je „kompresioni potencijal izvora“ a definisana je izrazom.

$$\rho = \frac{\lceil \lg q \rceil}{L} = \frac{3}{1,74} = 1,724$$

$$\rho_{\max} = 1.8072$$

Zadatak 1 – rešenje (3)

b) Hafmenov postupak ilustrovan pomoću stabla



Zadatak 1 – rešenje (4)

c) Izvor emituje sekvencu simbola $s_2, s_1, s_4, s_1, s_5, s_3, s_6$, kanal greši pri prenosu prvog i osmog bita

s_i	$P(s_i)$	x_i
s_1	0,65	0
s_4	0,15	11
s_3	0,08	101
s_2	0,05	1001
s_5	0,04	10000
s_6	0,03	10001

s_2	s_1	s_4	s_1	s_5	s_3	s_6	
<u>1</u> 001	0	11	<u>0</u>	10000	101	10001	
0	0	0	101	11	10000	101	10001
s_1	s_1	s_1	s_3	s_4	s_5	s_3	s_6

Zadatak 2

* Izvršiti Hafmenovo kodovanje simbola iz zadate liste

s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
$P(s_i)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.07	0.03

ako se novodobijeni simbol pri redukciji uvek stavlja na poslednje mesto u skupu jednakih verovatnoća ili se stavlja proizvoljno.

Za svako od dva rešenja odrediti:

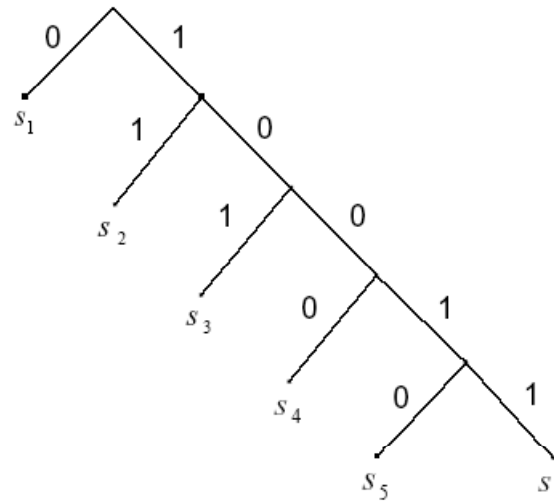
- Entropiju
- Srednju dužinu kodne reči
- Postignutu efikasnost

Zadatak 2 – rešenje 1

* Postupak ilustrovan tabelom:

s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0
s_2	0.2	11	s_2	0.2	11	s_2	0.2	11	$s_3 s_4 s_5 s_6$	0.3*	10	$s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$	0.5*	1
s_3	0.1	101	s_3	0.1	101	$s_4 s_5 s_6$	0.2*	100	s_2	0.2	11			
s_4	0.1	1000	s_4	0.1	1000	s_3	0.1	101						
s_5	0.07	10010	$s_5 s_6$	0.1*	1001									
s_6	0.03	10011												

* Kodno stablo



Srednja dužina kodne reči, efikasnost – rešenje 1

* Srednja dužina kodne reči:

$$L_{sr} = 0.5 * 1 + 0.2 * 2 + 0.1 * 3 + 0.1 * 4 + 0.07 * 5 + 0.03 * 5 = 2.1 \text{ [b / s]}$$

* Entropija izvora

$$H(s) = \sum_{i=1}^6 P(s_i) \log_2 \frac{1}{P(s_i)} = 2.0502 \text{ [Sh / simb]}$$

* Efikasnost

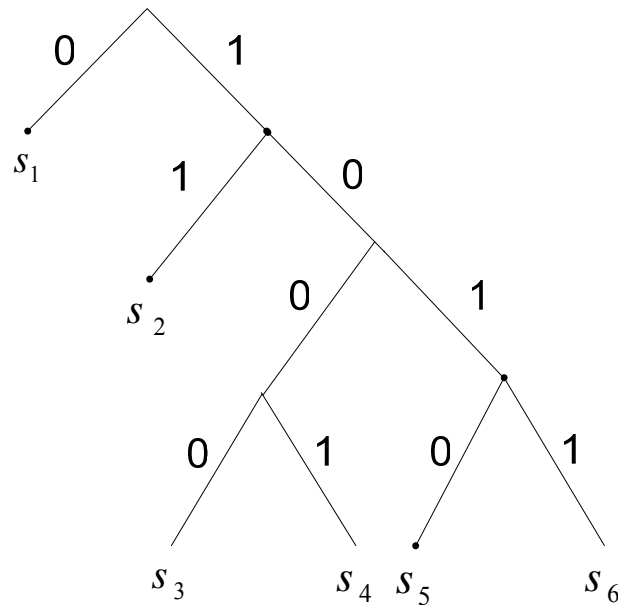
$$\eta = \frac{H(s)}{L_{sr}} \cdot 100\% = 97.63\%$$

Zadatak 2 – rešenje 1

* Postupak ilustrovan tabelom:

s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0	s_1	0.5	0
s_2	0.2	11	s_2	0.2	11	s_2	0.2	11	$s_3s_4s_5s_6$	0.3*	10	$s_2s_3s_4s_5s_6$	0.5*	1
s_3	0.1	1000	s_5s_6	0.1*	101	s_3s_4	0.2*	100	s_2	0.2	11			
s_4	0.1	1001	s_3	0.1	1000	s_5s_6	0.1	101						
s_5	0.07	1010	s_4	0.1	1001									
s_6	0.03	1011												

* Kodno stablo



Srednja dužina kodne reči, efikasnost – rešenje 2

* Srednja dužina kodne reči:

$$L_{sr} = 0.5 * 1 + 0.2 * 2 + 0.1 * 4 + 0.1 * 4 + 0.07 * 4 + 0.03 * 4 = 2.1 [b / s]$$

* Entropija izvora

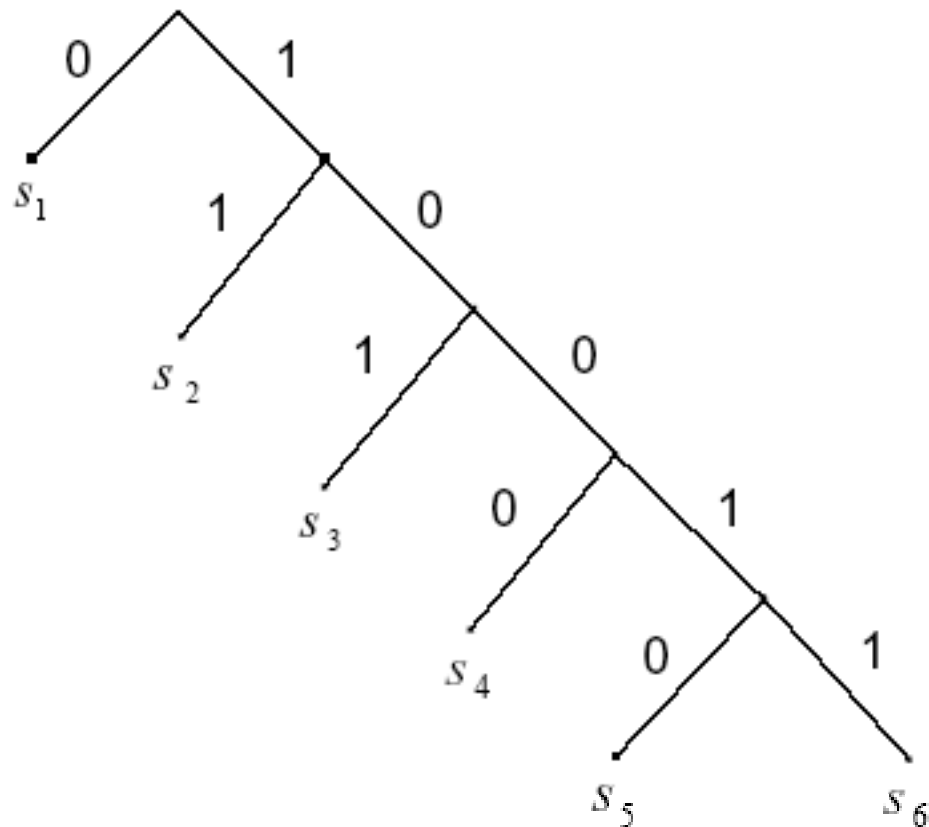
$$H(s) = \sum_{i=1}^6 P(s_i) \log_2 \frac{1}{P(s_i)} = 2.0502 [Sh / simb]$$

* Efikasnost

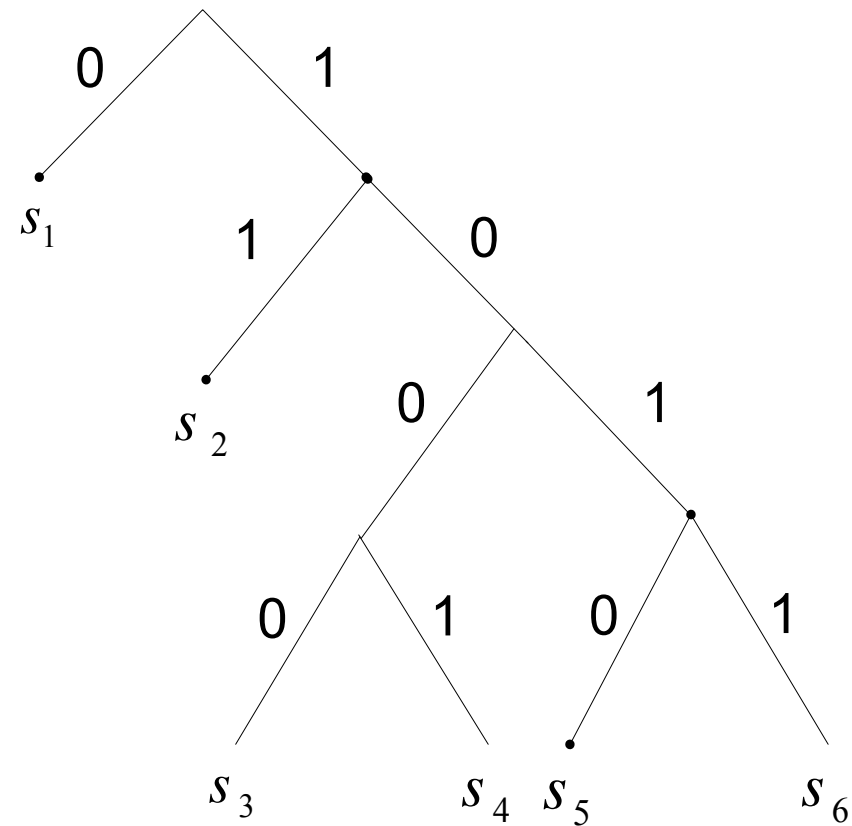
$$\eta = \frac{H(s)}{L_{sr}} \cdot 100\% = 97.63\%$$

Kodno stablo – poređenje dva rešenja

* Predstava koda koje odgovara prvom rešenju :



* Stablo koje odgovara drugom mogućem rešenju koje ima istu srednju dužinu kodne reči:



Zadatak 3

* Posmatra se izvor koji emituje dva simbola sa sledećim verovatnoćama:
 $P(s_1)=0.7$, $P(s_2)=0.3$.

Izvršiti binarno statističko kodovanje (po Hafmenovom postupku) izvora informacija, njegovog drugog i trećeg proširenja.

* Rešenje:

I Originalni izvor:

Postupak statističkog kodovanja elemenata liste originalnog izvora:

s_i	$P(s_i)$	x_i
s_1	0.7	0
s_2	0.3	1

Entropija originalnog izvora: $H(S) = 0.7 \cdot \lg \frac{1}{0.7} + 0.3 \cdot \lg \frac{1}{0.3} = 0.8813 \text{ Sh / simb}$

Srednja dužina kodne reči: $L_{sr} = 0.7 * 1 + 0.3 * 1 = 1 \text{ bit / simb}$

Efikasnost
 $\eta = \frac{0.8813}{1} \cdot 100\% = 88.13\%$

Koeficijent kompresije
 $\rho = \frac{\lceil \lg q \rceil}{L} = \frac{1}{1} = 1$

Zadatak 3 –rešenje (1)

* **II Drugo proširenje:**

- Postupak statističkog kodovanja elemenata liste II proširenja izvora:

s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
$\sigma_1 = s_1 s_1$	0.49	1	σ_1	0.49	1	$\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$	0.51*	0
$\sigma_2 = s_1 s_2$	0.21	01	$\sigma_3 \sigma_4$	0.30*	00	σ_1	0.49	1
$\sigma_3 = s_2 s_1$	0.21	000	σ_2	0.21	01			
$\sigma_4 = s_2 s_2$	0.09	001						

* **Entropija**

$$H(S^2) = 2H(S) = 1.7626 \text{ Sh / simb}$$

* **Srednja dužina kodne reči**

$$L_2 = 0.49 * 1 + 0.21 * 2 + 0.21 * 3 + 0.09 * 3 = 1.81 \text{ bit / simb}$$

* **Efikasnost**

$$\eta = \frac{1.7626}{1.81} \cdot 100\% = 97.38\%$$

* **Koeficijent kompresije**

$$\rho = \frac{\lceil \lg q \rceil}{L_2} = \frac{2}{1.81} = 1.105$$

Zadatak 3 –rešenje (2)

III Treće proširenje: Postupak statističkog kodovanja elemenata liste III proširenja izvora:

s_i	$P(s_i)$	x_i	S_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
$\sigma_1 = s_1 s_1 s_1$	0.343	00	σ_1	0.343	00	σ_1	0.343	00	σ_1	0.343	00
$\sigma_2 = s_1 s_1 s_2$	0.147	11	σ_2	0.147	11	σ_2	0.147	11	$*\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.216	10
$\sigma_3 = s_1 s_2 s_1$	0.147	010	σ_3	0.147	010	σ_3	0.147	010	σ_2	0.147	11
$\sigma_4 = s_1 s_2 s_2$	0.063	1000	σ_5	0.147	011	σ_5	0.147	011	σ_3	0.147	010
$\sigma_5 = s_2 s_1 s_1$	0.147	011	$*\sigma_7\sigma_8$	0.090	101	$*\sigma_4\sigma_6$	0.126	100	σ_5	0.147	011
$\sigma_6 = s_2 s_1 s_2$	0.063	1001	σ_4	0.063	1000	$\sigma_7\sigma_8$	0.090	101			
$\sigma_7 = s_2 s_2 s_1$	0.063	1010	σ_6	0.063	1001						
$\sigma_8 = s_2 s_2 s_2$	0.027	1011									

s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i	s_i	$P(s_i)$	x_i
σ_1	0.343	00	$*\sigma_2\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.363	1	$*\sigma_1\sigma_3\sigma_5$	0.637	0
$*\sigma_3\sigma_5$	0.294	01	σ_1	0.343	00	$\sigma_2\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.363	1
$\sigma_4\sigma_6\sigma_7\sigma_8$	0.216	10	$\sigma_3\sigma_5$	0.294	01			
σ_2	0.147	11						

Zadatak 3 –rešenje (3)

III Treće proširenje:

* **Entropija** $H(S^3) = 3H(S) = 2.6439 \text{ Sh / simb}$

* **Srednja dužina kodne reči**

$$L_3 = 2 * (0.343 + 0.147) + 3 * (0.147 + 0.147) + 4 * (0.063 + 0.063 + 0.063 + 0.027) = \\ = 2 * 0.49 + 3 * 0.294 + 4 * 0.216 = 2.726 \text{ bit / simb}$$

* **Efikasnost** $\eta = \frac{2.6439}{2.726} \cdot 100\% = 96.98\%$

Koeficijent kompresije $\rho = \frac{\lceil \lg q \rceil}{L} = \frac{3}{L} = \frac{3}{2.726} = 1.1005$