



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020.*

Primer 1, spektar kosinusoide

Odrediti dvostrani amplitudski i fazni spektar prostoperiodičnog signala.

$$x(t) = 10 \times \cos\left(2\pi \times 200t - \frac{\pi}{10}\right)$$

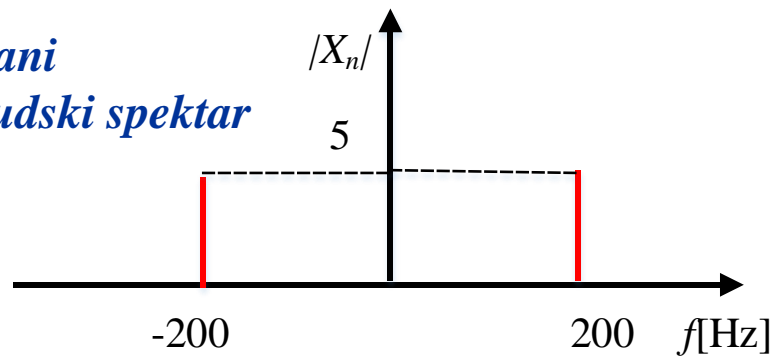
Izračunati srednju snagu signala analizom u vremenskom i u frekvencijskom domenu.

Kosinusoidalni signal amplitude $U=10\text{V}$, osnovne učestanosti $f_0=200\text{Hz}$ i početne faze $\theta = -\pi/10$ može se prikazati kao

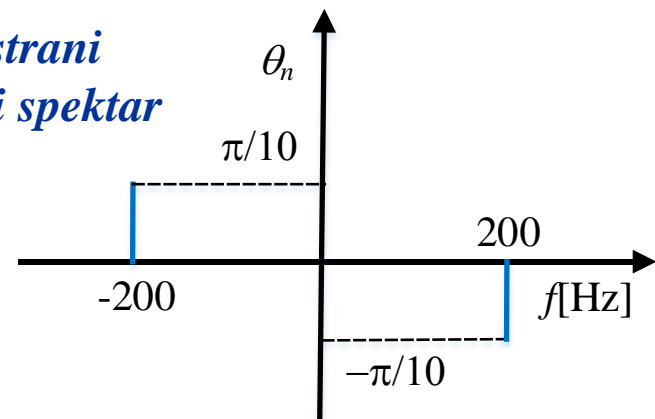
$$x(t) = U \times \cos(2\pi \times f_0 t + \theta) = \frac{U}{2} e^{-j(2\pi \times f_0 t + \theta)} + \frac{U}{2} e^{+j(2\pi \times f_0 t + \theta)}$$

$$x(t) = 10 \times \cos\left(2\pi \times 200t - \frac{\pi}{10}\right) = 5 \times e^{+j\left(-2\pi \times 200t + \frac{\pi}{10}\right)} + 5 \times e^{+j\left(2\pi \times 200t - \frac{\pi}{10}\right)}$$

*Dvostrani
amplitudski spektar*



*Dvostrani
fazni spektar*



Primer 1, spektar kosinusoide

Dvostrani spektar ima dve komponente:

komponentu X_1 na $f=f_0=+200\text{Hz}$ i komponentu X_{-1} na $f=-f_0=-200\text{Hz}$

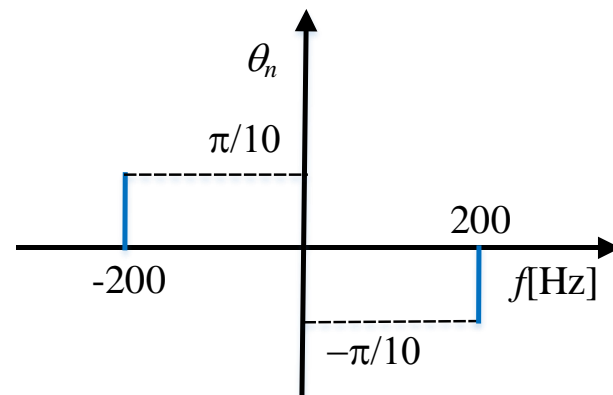
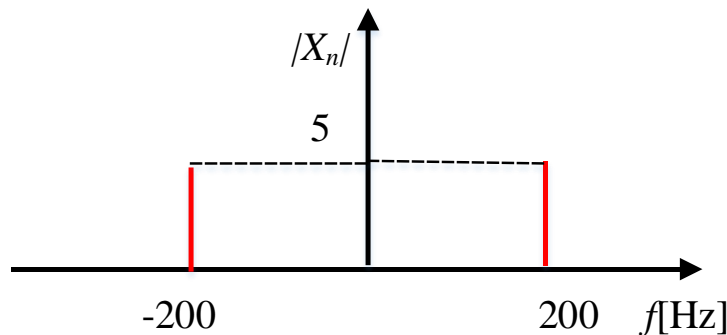
Vrednosti amplitudskog spektra kosinusoide su $|X_{-1}|=|X_{+1}|=U/2=5$

Srednja snaga kosinusoide amplitude U može se odrediti u vremenskom domenu

$$P_X = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U^2 \cos^2(2\pi \times f_0 t + \theta) dt = \frac{U^2}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\pi \times 2f_0 t + 2\theta)}{2} \right] dt = \frac{U^2}{2}$$

Na osnovu Parsevalove teoreme, srednja snaga signala se i u ovom jednostavnom primeru može odrediti i na osnovu amplitudskog spektra signala (odnosno, spektra snage $S_n = |X_n|^2$) i jednaka je

$$P_X = |X_{-1}|^2 + |X_1|^2 = 2 \times \left(\frac{U}{2} \right)^2 = 2 \times \frac{U^2}{4} = \frac{U^2}{2}$$



Primer 2, spektar zbira kosinusoida

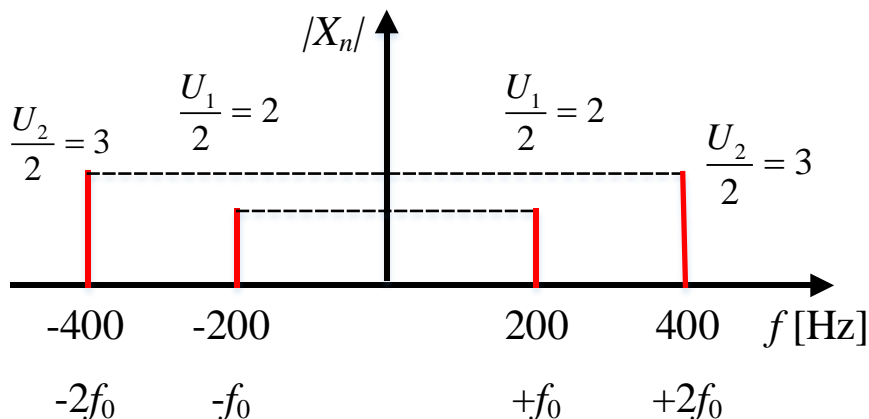
Odrediti dvostrani amplitudski i fazni spektar periodičnog signala.

$$x(t) = U_1 \times \cos(2\pi \times 200t + \theta_1) + U_2 \times \cos(2\pi \times 400t + \theta_2)$$

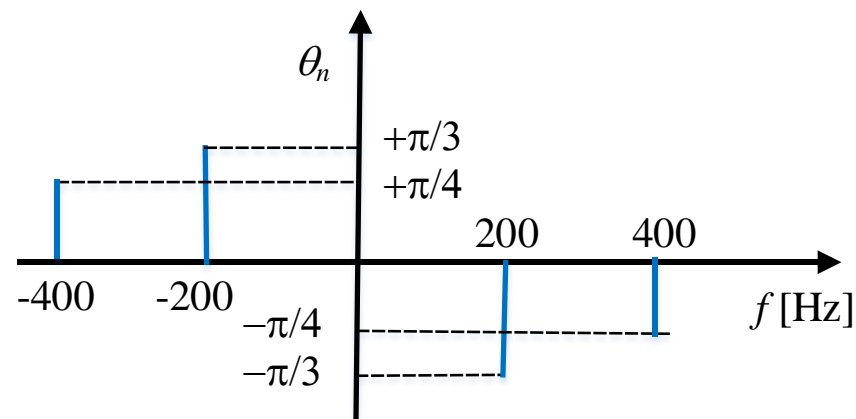
$$x(t) = 4 \times \cos\left(2\pi \times 200t - \frac{\pi}{3}\right) + 6 \times \cos\left(2\pi \times 400t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Izračunati srednju snagu signala analizom u vremenskom i u frekvencijskom domenu. Koliki deo snage signala je sadržan u komponenti na 200Hz, a koliki deo u komponenti na 400Hz?

Amplitudski spektar (dvostrani)



Fazni spektar (dvostrani)



Primer 2, spektar zbira kosinusoida

Perioda prve komponente signala je $T_1=1/200\text{Hz}=0.005\text{ms}$, dok je perioda druge komponente $T_2=1/400\text{Hz}=0.0025\text{ms}$. Perioda signala $x(t)$ jednaka je $T=T_1=2T_2=0.005\text{ms}$ i osnovna učestanost signala je $f_0=1/T=200\text{Hz}$ (jer je $200=\text{NZD}(200,400)$).

Ukupna snaga signala $x(t)$ određena u vremenskom domenu

$$P_X = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \frac{U_1^2}{2} + \frac{U_2^2}{2}$$

Ista vrednost snage signala $x(t)$ dobija se i analizom u frekvencijskom domenu

$$P_X = |X_{-2}|^2 + |X_{-1}|^2 + |X_1|^2 + |X_2|^2 = \left(\frac{U_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{U_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{U_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{U_2}{2}\right)^2 = \frac{U_1^2}{2} + \frac{U_2^2}{2}$$

Snaga prvog harmonika ($f_0=200\text{Hz}$) je $P_1 = \frac{U_1^2}{2}$ i sadrži 30.77% ukupne snage signala.

Snaga drugog harmonika ($2f_0=400\text{Hz}$) je $P_2 = \frac{U_2^2}{2}$ i sadrži 69.23% ukupne snage signala.

$$\frac{P_1}{P_X} = \frac{U_1^2}{U_1^2 + U_2^2} = \frac{4^2}{4^2 + 6^2} = 30,77\%$$

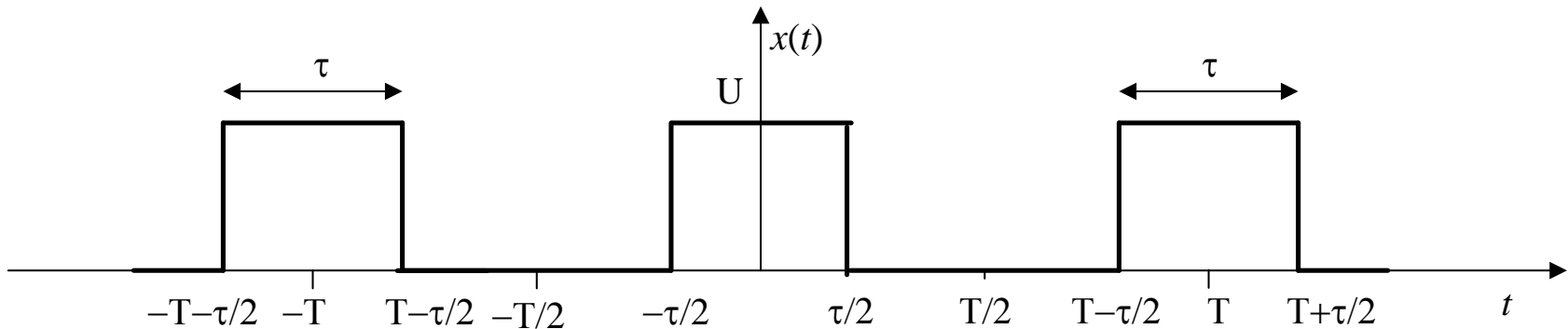
$$\frac{P_2}{P_X} = \frac{U_2^2}{U_1^2 + U_2^2} = \frac{6^2}{4^2 + 6^2} = 69,23\%$$

Spektralna analiza periodične povorke pravougaonih impulsa (1)

Odrediti amplitudski i fazni spektar periodičnog signala $x(t)$ periode T , amplitude U i trajanja impulsa τ (faktor režima τ/T), koji je na intervalu jedne periode definisan sledećim izrazom

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 < t \leq -\tau/2 \\ U, & -\tau/2 < t \leq \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < t \leq T/2 \end{cases}$$

Periodična povorka pravougaonih impulsa



Spektralna analiza periodične povorke pravougaonih impulsa (2)

$x(t)$ je periodičan signal periode T i važi $x(t)=x(t+T)$

- **Perioda** signala je T [s]
- **Osnovna učestanost** periodičnog signala je $f_0=1/T$ [Hz]

Kompleksni *Fourier*-ov red za periodičan signal $x(t)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{+j2\pi \times n f_0 \times t}$$

Kompleksni koeficijent *Fourier*-ovog reda X_n

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi \times n f_0 \times t} dt$$

$$X_n = |X_n| e^{j\theta_n}$$

$|X_n|$ - amplitudski spektar signala $x(t)$

θ_n - fazni spektar signala $x(t)$

Spektralna analiza periodične povorke pravougaonih impulsa (3)

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{U\tau}{T} \frac{\sin(n\pi f_0 \tau)}{n\pi f_0 \tau}$$

Amplitudski spektar $|X_n| = \frac{U\tau}{T} \left| \frac{\sin(n\pi f_0 \tau)}{n\pi f_0 \tau} \right|$ parna f-ja učestanosti

Fazni spektar $\theta_n = \arg(X_n)$

Periodičan signal $x(t)$ može da se predstavi u obliku sume prostoperiodičnih signala (kosinusoida) amplitude $2|X_n|$ učestanosti $n \times f_0, f_0 = 1/T, n = 1, 2, \dots$ i jednosmerne komponente signala X_0 .

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|X_n| \cos(2\pi \cdot n f_0 \cdot t + \theta_n)$$

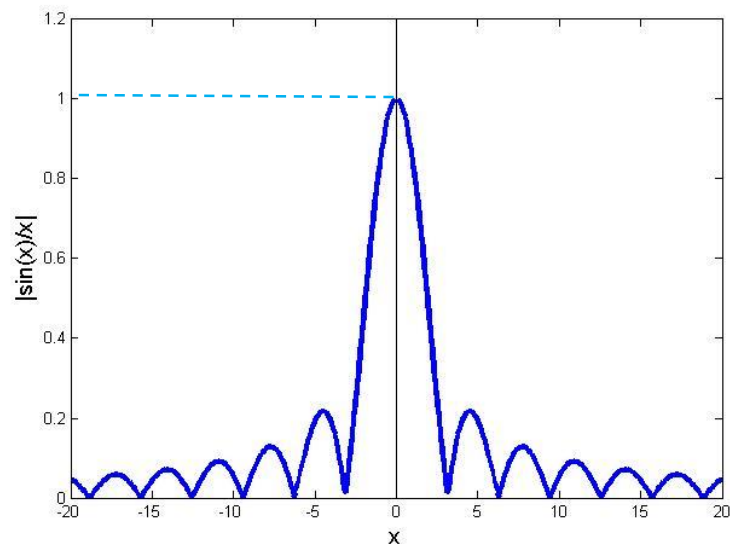
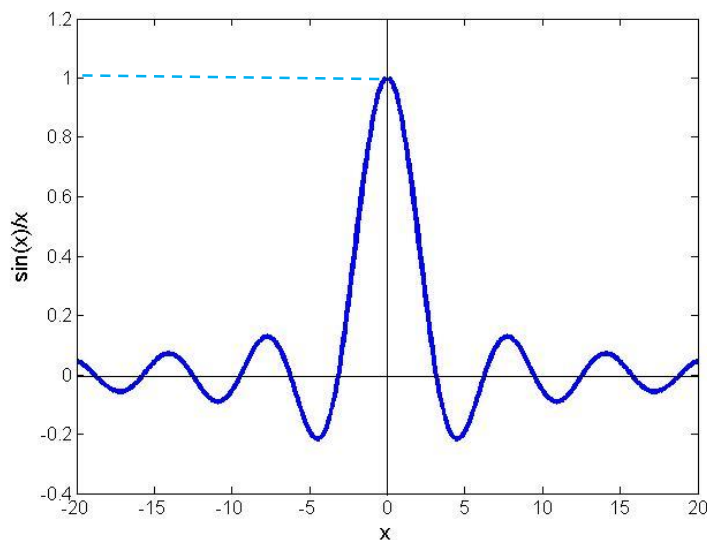
Spek. analiza povorke pravougaonih impulsa- nule anvelope (4)

Anvelopa amplitudskog spektra - pomoćna kontinualna funkcija za analizu spektra signala (umesto učestanosti nf_0 koristimo kontinualnu učestanost f)

$$\alpha(f) = \frac{U\tau}{T} \left| \frac{\sin(\pi f \times \tau)}{\pi f \times \tau} \right|$$

Nule anvelope amplitudskog spektra javljaju se na frekvencijama f_k tako da

$$\sin(\pi f_k \tau) = 0, f_k \neq 0 \Rightarrow \pi f_k \tau = k\pi \Rightarrow f_k = \frac{k}{\tau}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$$



Primer, faktor režima 1/2

Posmatra se periodična povorka pravougaonih impulsa čiji su parametri

$\tau=0.5\text{ms}$, $T=1\text{ms}$, $U=1\text{V}$

- Spektar periodične povorke impulsa je beskonačno širok (spektralnih komponenti ima beskonačno mnogo)
- Perioda signala $T=1\text{ms}$ → osnovna učestanost periodičnog signala $f_0=1\text{kHz}$.
- Spektralne komponente se nalaze na učestanostima jednakim celobrojnim umnošcima osnovne učestanosti signala → na $n \times f_0$, tj. na 0Hz , $\pm 1\text{kHz}$, $\pm 2\text{kHz}$, $\pm 3\text{kHz}$, $\pm 4\text{kHz}$, ...
- Trajanje impulsa u okviru periode je $\tau=0.5\text{ms}$ → nule anvelope se nalaze na frekvencijama koje su umnožak frekvencije $1/\tau=2\text{kHz}$.
- U posmatranom slučaju, nule anvelope se poklapaju sa svim parnim harmonicima signala (na $\pm 2\text{kHz}$, $\pm 4\text{kHz}$, $\pm 6\text{kHz}$, ...)

Primer, faktor režima 1/2

Spektralne komponente su oblika

$$X_n = \frac{U\tau}{T} \frac{\sin(n\pi f_0\tau)}{n\pi f_0\tau} = \frac{U\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}}$$

Za vrednosti trajanja impulsa i periode jednake $\tau=0.5\text{ms}$, $T=1\text{ms}$, dobija se

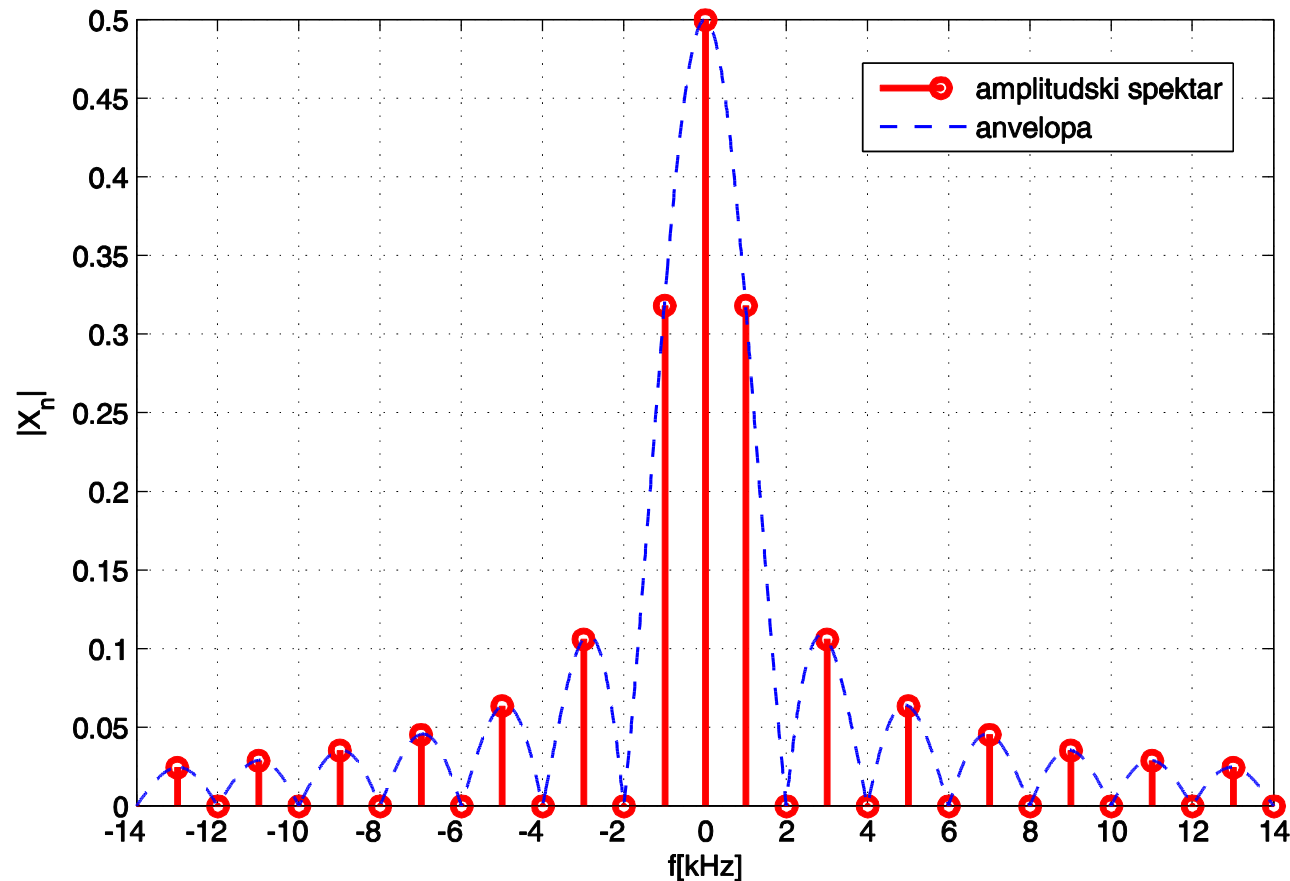
$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$X_n = \frac{U}{2} \frac{\sin(n\pi / 2)}{n\pi / 2}$$

Komponenta na učestanosti $f=0$ (za $n=0$) predstavlja jednosmernu (srednju, DC) vrednost signala i jednaka je

$$X_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} U dt = \frac{U\tau}{T} = \frac{U}{2}$$

Primer, faktor režima $\frac{1}{2}$, dvostrani spektar



$\tau=0.5\text{ms}$

$T=1\text{ms}$

$U=1\text{V}$

- Spektralne komponente nalaze se na učestanostima $n \times f_0 = n \times 1\text{kHz}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
- Nule anvelope ($k/\tau = k \times 2\text{kHz}$, $k=\pm 1, \pm 2, \dots$) poklapaju se sa parnim harmonicima i svaka druga komponenta u spektru jednaka je nuli!!!

Primer, faktor režima $\frac{1}{2}$, vrednosti spektralnih komponentata

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow X_n = \frac{U\tau}{T} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)}{\frac{n\pi\tau}{T}} = \frac{U}{2} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\frac{n\pi}{2}}$$

Kada je faktor režima jednak $\frac{1}{2}$ svaka druga komponenta u spektru signala jednaka je 0

(tj. svi parni harmonici su jednaki 0)

$$|X_0| = \frac{U}{2}$$

Jednosmerna komponenta (srednja vrednost) jednaka je $U/2$

$$|X_1| = |X_{-1}| = \frac{U}{2} \left| \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} \right| = \frac{U}{\pi}$$

$$|X_2| = |X_{-2}| = 0$$

$$|X_3| = |X_{-3}| = \frac{U}{2} \left| \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} \right| = \frac{U}{3\pi}$$

$$|X_4| = |X_{-4}| = 0$$

$$|X_5| = |X_{-5}| = \frac{U}{2} \left| \frac{\sin(5\pi/2)}{5\pi/2} \right| = \frac{U}{5\pi}$$

Spektar snage

Spektar snage

$$S_n = |X_n|^2 = \left(\frac{U\tau}{T} \right)^2 \left(\frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} \right)^2$$

Srednja snaga signala $x(t)$

$$P_S = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U^2 dt = U^2 \frac{\tau}{T}$$

Parsevalova teorema:

Srednja snaga složenog periodičnog signala jednaka je zbiru srednjih snaga svih njegovih harmonika

$$P_S = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 = |X_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|^2$$

Spektar snage

Ukupna srednja snaga signala $x(t)$

$$P_S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 = |X_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|^2$$

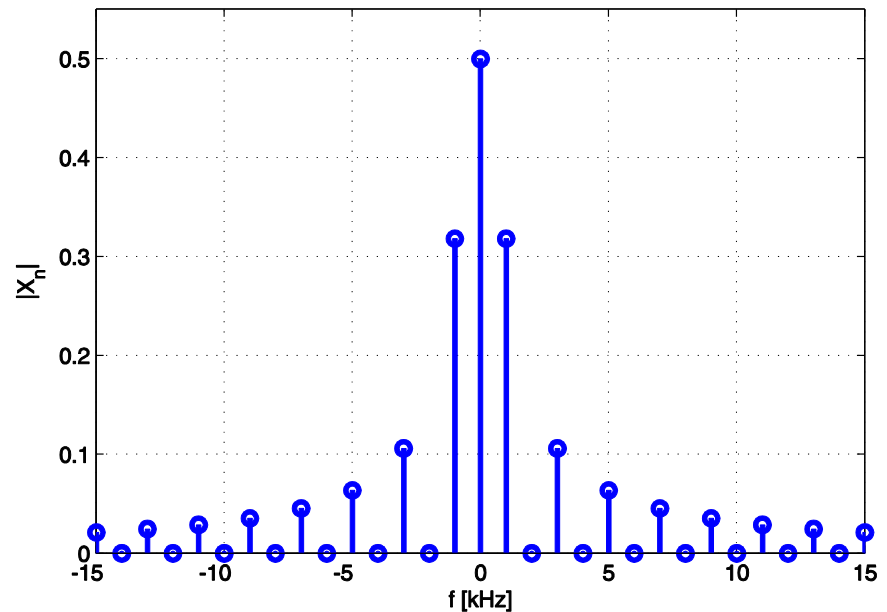
Snaga signala $x(t)$ koja je sadržana u prvih N harmonika

$$P_{h_N} = \sum_{n=-N}^N |X_n|^2 = |X_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^N |X_n|^2$$

Snaga signala $x(t)$ koja je sadržana od harmonika N_1 do N_2 ($N_1 \neq 0$)

$$P_{h_{N_1-N_2}} = \sum_{n=-N_2}^{-N_1} |X_n|^2 + 2 \sum_{n=N_1}^{N_2} |X_n|^2$$

$$P_{h_{N_1-N_2}} = 2 \sum_{n=N_1}^{N_2} |X_n|^2$$



Primer, faktor režima 1/2

Srednja snaga signala jednaka je

$$P_S = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U^2 dt = \frac{U^2}{2} \quad P_S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 = |X_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|^2$$

Snaga signala $x(t)$ koja se nalazi u nultom (DC komponenta) i prvom harmoniku

$$P_{h_1} = |X_{-1}|^2 + |X_0|^2 + |X_1|^2 = |X_0|^2 + 2|X_1|^2 = \left(\frac{U}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{U}{\pi}\right)^2 = 0.4526 \times U^2$$

Deo srednje snage signala koji je sadržan u nultom i prvom harmoniku iznosi

$$\frac{P_{h_1}}{P_S} = \frac{0.4526U^2}{0.5U^2} = 0.9053$$

Više od 90% ukupne srednje snage signala sadržano je u nultom i u prvom harmoniku!

Kada je faktor režima jednak $\frac{1}{2}$, drugi harmonik je jednak nuli, pa je snaga signala $x(t)$ koja je sadržana u nultom i prva dva harmonika takođe jednaka $0.4526U^2$

Primer, faktor režima 1/2

Srednja snaga signala $x(t)$ koja se nalazi u prva tri harmonika (tj. četiri, $X_{-4}=X_4=0$)

$$P_{h_3} = P_{h_4} = |X_0|^2 + 2|X_1|^2 + 2|X_2|^2 + 2|X_3|^2$$

$$P_{h_3} = P_{h_4} = \left(\frac{U}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{U}{\pi}\right)^2 + 2\left(\frac{U}{3\pi}\right)^2 = 0.4752 \times U^2$$

Odnos srednje snage signala u prva tri (tj. prva četiri harmonika) i ukupne srednje snage signala

$$\frac{P_{h_3}}{P_S} = \frac{0.4752U^2}{0.5U^2} = 0.9503$$

Više od 95% ukupne srednje snage signala sadržano je u prva tri harmonika!!!

Snaga signala $x(t)$ koja se nalazi u prvih pet harmonika jednaka je

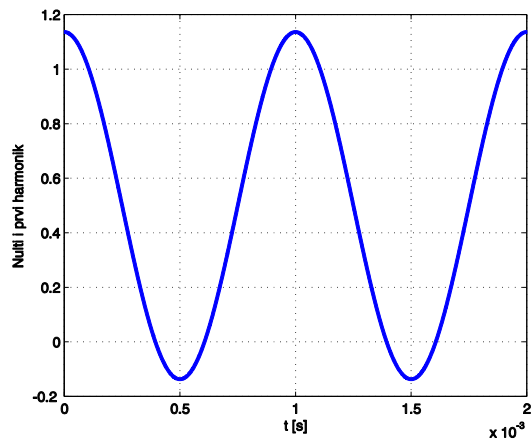
$$P_{h_5} = |X_0|^2 + 2|X_1|^2 + 2|X_3|^2 + 2|X_5|^2 = \left(\frac{U}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{U}{\pi}\right)^2 + 2\left(\frac{U}{3\pi}\right)^2 + 2\left(\frac{U}{5\pi}\right)^2$$

$$P_{h_5} = 0.4833 \times U^2 \Rightarrow \frac{P_{h_5}}{P_S} = 0.9665 = 96.65\%$$

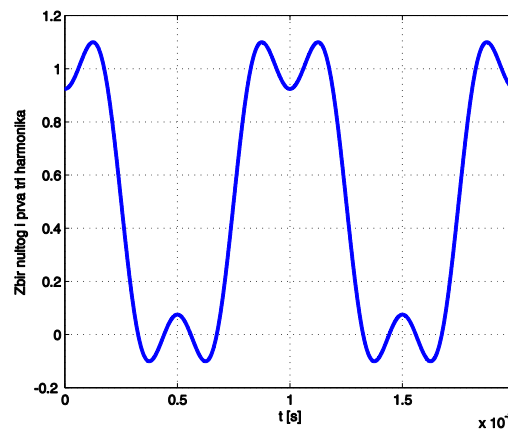
Primer, faktor režima $\frac{1}{2}$, značaj spektralnih komponenata

Periodična povorka prav. impulsa $U = 1$, $f_0 = 1\text{kHz}$, $\tau=0.5\text{ms}$, $\tau/T=1/2$

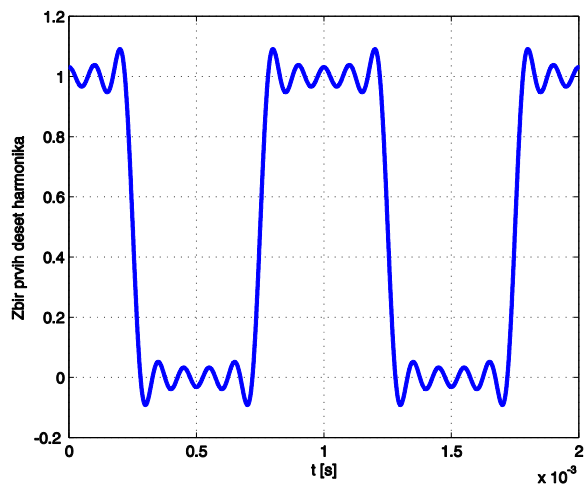
$x(t) = (U/2) + (2U/\pi) * \cos(2\pi f_0 t)$, više od 90% snage



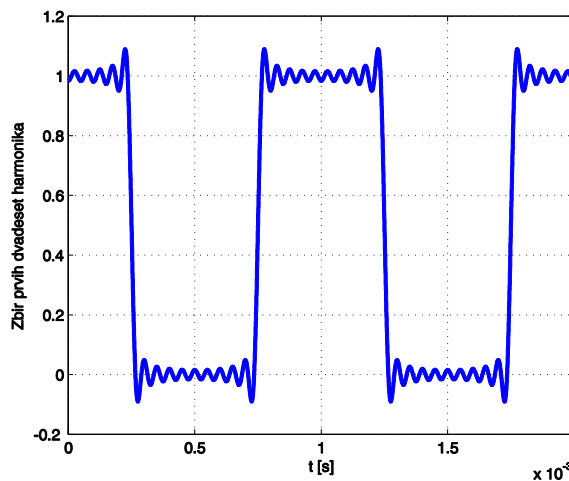
$x(t) = (U/2) + (2U/\pi) * \cos(2\pi f_0 t) - (2U/3\pi) * \cos(2\pi \cdot 3f_0 t)$



Zbir prvih 10 harmonika, više od 97.98% snage



Zbir prvih 20 harmonika, više od 98.99% snage



Zadatak 1

Posmatra se signal $x(t)$ koga čini periodična unipolarna povorka pravougaonih impulsa periode $T=5\text{ms}$, vremena trajanja impulsa τ ($\tau=T/2$) i amplitude U . Vreme početka impulsa je $t_0=-\tau/2$.

- a) Nacrtati oblik amplitudskog spektra signala $x(t)$ i odrediti koliko se spektralnih komponenti nalazi u opsegu od 700Hz do 1900Hz (navesti frekvenciju svake od spektralnih komponenti).
- b) Odrediti srednju snagu signala $x(t)$. Koliki procenat srednje snage signala je sadržan na frekvencijama nižim od 550Hz?

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow |X_n| = \frac{U\tau}{T} \left| \frac{\sin(n\pi f_0 \tau)}{n\pi f_0 \tau} \right| = \frac{U}{2} \left| \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right| \Rightarrow \text{Svaka druga komponenta u spektru jednaka je nuli}$$

- Osnovna frekvencija signala jednaka je $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{5\text{ms}} = 200\text{Hz}$
- Diskretne komponente pojavljuju se samo na celobrojnim umošćima osnovne frekvencije signala jednake 200Hz (na učestanostima 0Hz, 200Hz, 400Hz, 600Hz, 800Hz, ...)
- U opsegu učestanosti od 700Hz do 1900Hz spektralne komponente se nalaze na učestanostima: 1000Hz ($n=5$, peti harmonik), 1400Hz ($n=7$, sedmi harmonik), 1800Hz ($n=9$, deveti harmonik), dok spektralne komponente na 800Hz, 1200Hz i 1600Hz imaju amplitude jednake nuli.

Zadatak 1

Srednja snaga signala $x(t)$ je

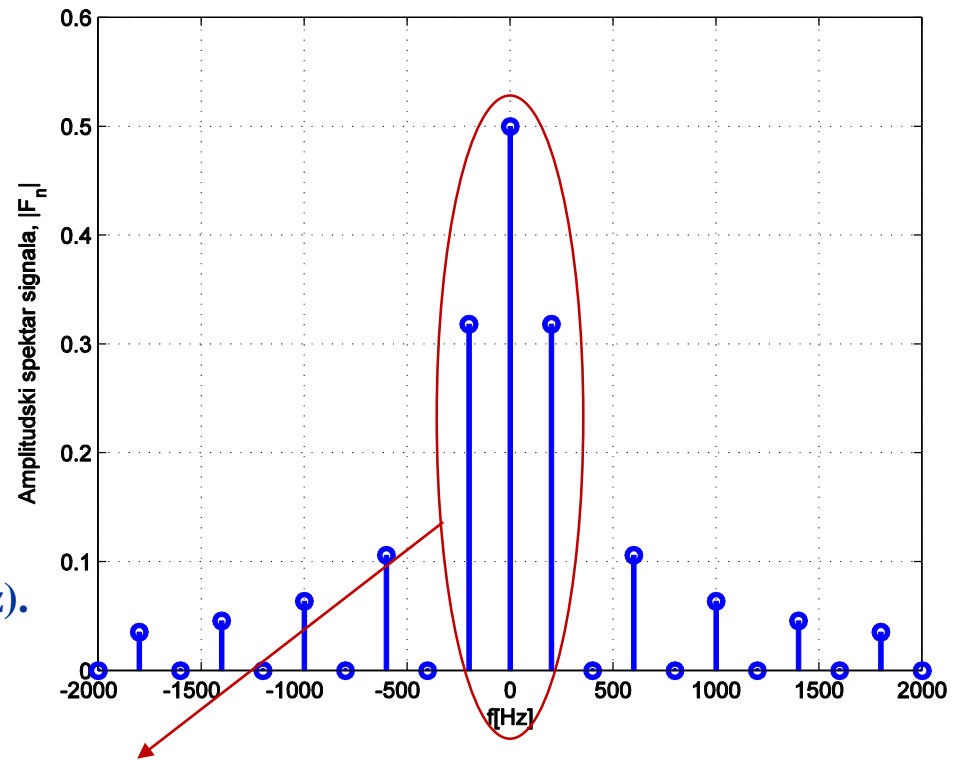
$$P_s = \frac{U^2 \tau}{T} = \frac{U^2}{2}$$

Spektar snage

$$S_n = |X_n|^2 = \frac{U^2}{2^2} \left| \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right|^2$$

Na frekvencijama nižim od 550 Hz nalaze se nulti harmonik (0Hz) i prvi harmonik (200Hz).

Drugi harmonik (400Hz) ima amplitudu jednaku 0.



Ukupna snaga komponenti na frekvencijama nižim od 550Hz je

$$P_{f < 550\text{Hz}} = |X_0|^2 + 2|X_1|^2 = 0.4526 \cdot U^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{f < 550\text{Hz}}}{P_s} = \frac{0.4526U^2}{0.5U^2} = 0.9052$$

Znači da komponente na frekvencijama nižim od 550Hz nose 90.52% srednje snage signala $x(t)$.

Primer, periodična povorka pravougaonih impulsa, faktor režima 1/4

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4} \Rightarrow |X_n| = \frac{U\tau}{T} \left| \frac{\sin(n\pi f_0\tau)}{n\pi f_0\tau} \right| = \frac{U}{4} \left| \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4} \right|$$

$$|X_0| = \frac{U}{4}$$

$$|X_1| = |X_{-1}| = \frac{U}{4} \left| \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} \right| = \frac{U}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|X_2| = |X_{-2}| = \frac{U}{4} \left| \frac{\sin(2\pi/4)}{2\pi/4} \right| = \frac{U}{2\pi}$$

$$|X_3| = |X_{-3}| = \frac{U}{4} \left| \frac{\sin(3\pi/4)}{3\pi/4} \right| = \frac{U}{3\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|X_4| = |X_{-4}| = \frac{U}{4} \left| \frac{\sin(4\pi/4)}{4\pi/4} \right| = 0$$

$$|X_5| = |X_{-5}| = \frac{U}{4} \left| \frac{\sin(5\pi/4)}{5\pi/4} \right| = \frac{U}{5\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Srednja snaga signala $x(t)$

$$P_S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{U^2\tau}{T} = \frac{U^2}{4}$$

Snaga signala $x_{ap}(t)$ - aproksimacije signala $x(t)$ koja se sastoji od prvih N harmonika

$$x_{ap}(t) = X_0 + \sum_{n=1}^N 2|X_n| \cos(2\pi \cdot n f_0 \cdot t + \theta_n)$$

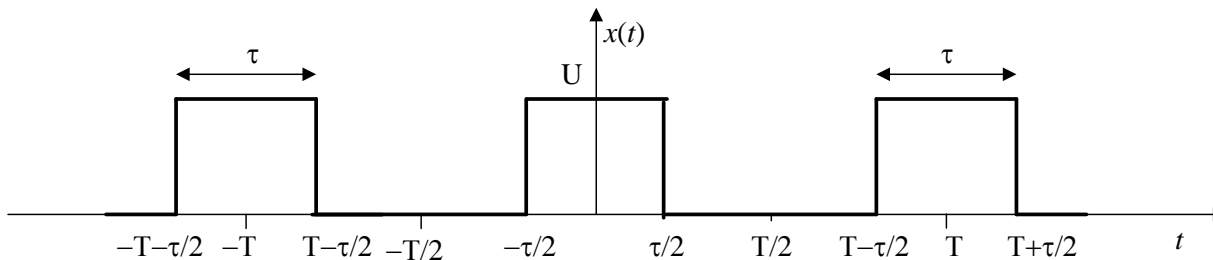
$$P_{h_N} = \sum_{n=-N}^N |X_n|^2 = |X_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^N |X_n|^2$$

Zadatak 2

Posmatra se signal $x(t)$ koga čini periodična unipolarna povorka pravougaonih impulsa periode $T=2\text{ms}$, vremena trajanja impulsa $\tau=0.5\text{ms}$ i amplitude $U=1\text{V}$.

- Nacrtati oblik amplitudskog spektra signala $x(t)$.
- Odrediti koliki je deo snage signala sadržan na frekvencijama nižim od 900Hz .
- Odrediti koliki je deo snage signala sadržan na frekvencijama od 800Hz do 1800Hz .

Periodična povorka pravougaonih impulsa



Perioda $T=2\text{ms}$

Trajanje impulsa $\tau=0.5\text{ms}$

Amplituda $U=1\text{V}$

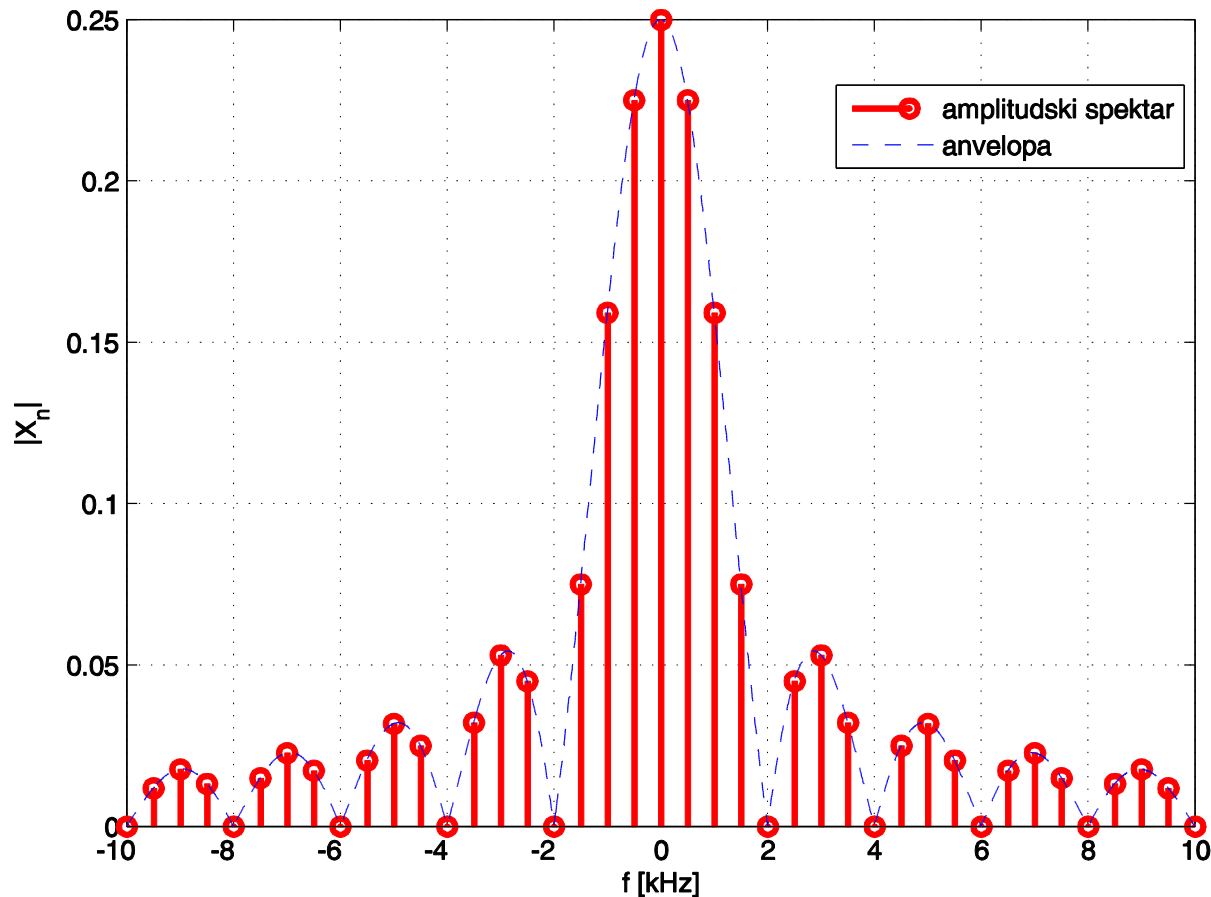
Osnovna frekvencija signala jednaka je $f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\text{ms}} = 500\text{Hz}$

Diskretne spektralne komponente se javljaju samo na celobrojnim umnošcima osnovne učestanosti jednake 500Hz , tj. na frekvencijama $n \times 500\text{Hz}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Zadatak 2

Nule anvelope (obvojnice spektra) su na učestanostima $k/\tau = k \times 2\text{kHz}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow$ tj. na $\pm 2\text{kHz}, \pm 4\text{kHz}, 6\text{kHz}, \dots$

Drugim rečima, nule anvelope nalaze na učestanostima svakog četvrtog harmonika, pa su sve spektralne komponente na učestanostima $4n \cdot 500\text{Hz}$ jednake nuli



$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$$
$$\Downarrow$$
$$|X_n| = \frac{U}{4} \left| \frac{\sin(n\pi/4)}{n\pi/4} \right|$$

Zadatak 2

b) Na učestanostima manjim od 900Hz postoje komponente:

-Jednosmerna komponenta, srednja vrednost ($n=0$)

$$|X_0| = \frac{U}{4}$$

-Prvi harmonik, komponente na $\pm 500\text{Hz}$

$$|X_1| = |X_{-1}| = \frac{U}{4} \left| \frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} \right| = \frac{U}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.2251 \times U \quad \bar{x}$$

Srednja snaga signala iznosi $P_S = U^2/4 = 0.25U^2$

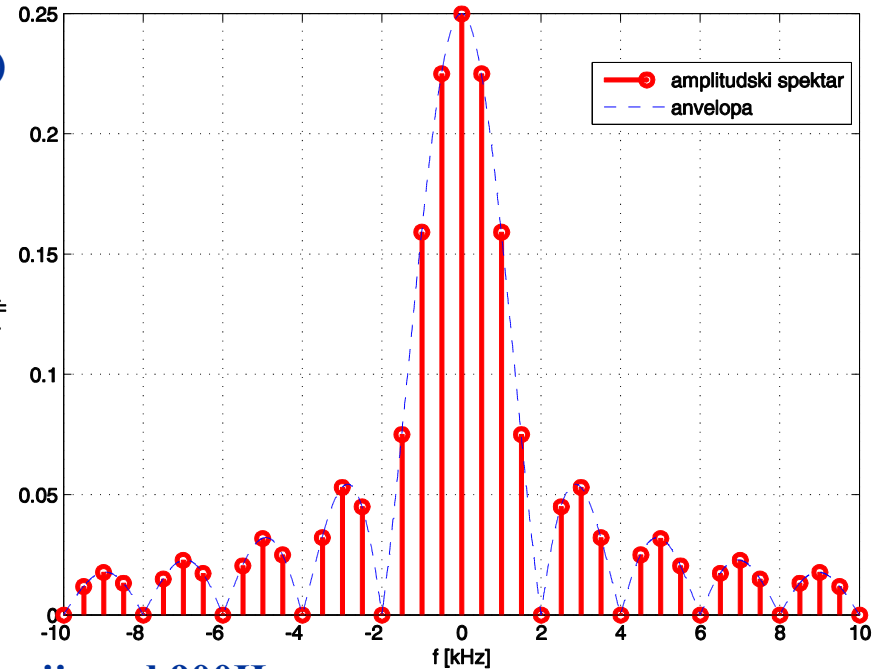
$$P_S = \frac{U^2}{4} = 0.25 \times U^2$$

Deo snage signala $x(t)$ sadržan na frekvencijama manjim od 900Hz

$$P_{900\text{Hz}} = \sum_{n=-1}^1 |X_n|^2 = 0.2251^2 U^2 + 0.25^2 U^2 + 0.2251^2 U^2 = 0.1638 U^2$$

-Dakle, na frekvencijama manjim od 900Hz sadržano je 65.53% ($0.1638U^2/0.25U^2$) ukupne srednje snage signala. Signal koji sadrži komponente na učestanostima nižim od 900Hz, tj. nulti (DC) i prvi harmonik može se opisati sa

$$x_{ap}(t) = X_0 + 2|X_1| \cos(2\pi f_0 t)$$



Zadatak 2

c) U opsegu frekvencija [800Hz, 1800Hz] nalaze se:

- drugi harmonik na 1000Hz
- treći harmonik na 1500Hz

Srednja snaga signala jednaka je $P_s = \frac{U^2}{4} = 0.25 \times U^2$

Snaga signala u opsegu frekvencija [800Hz, 1800Hz] jednaka je

$$P_{h_2h_3} = |X_{-3}|^2 + |X_{-2}|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 = 2|X_2|^2 + 2|X_3|^2$$

$$P_{h_2h_3} = 2 \times \left(\frac{U}{4} \frac{\sin(2\pi/4)}{2\pi/4} \right)^2 + 2 \times \left(\frac{U}{4} \frac{\sin(3\pi/4)}{3\pi/4} \right)^2 = 0.0619 \times U^2$$

U opsegu frekvencija [800Hz, 1800Hz] sadržano je 24.77% srednje snage signala $x(t)$

Signal koji sadrži drugi i treći harmonik signala $x(t)$, tj. komponente na 1000 i 1500Hz može se opisati sa

$$x_{ap}(t) = 2|X_2| \cos(2\pi \times 2 f_0 t) + 2|X_3| \cos(2\pi \times 3 f_0 t)$$