



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020.*

Zadatak 1 (1)

U posmatranom sistemu vrši se prenos binarnog signala čiji je protok jednak V_b , pri čemu je prosečna vrednost verovatnoće greške po bitu na izlazu iz prijemnika jednaka P_b . Odrediti prosečno vremensko rastojanje između dva uzastopna pogrešno primljena binarna simbola za sledeće slučajeve:

a) $V_b=1.024\text{Mb/s}$, $P_b=10^{-7}$

b) $V_b=1.024\text{Mb/s}$, $P_b=5 \cdot 10^{-7}$

c) $V_b=2.048\text{Mb/s}$, $P_b=10^{-7}$

Rešenje:

Prosečno vremensko rastojanje između dva pogrešno primljena binarna simbola zavisi od prosečne vrednosti verovatnoće greške i signalizacionog intervala binarnog signala T_b (odnosno, protoka binarnog signala V_b , $T_b=1/V_b$).

Zadatak 1 (2)

Verovatnoća greške određuje na koliko bita će se prosečno pojaviti jedan pogrešan \Rightarrow u proseku se na svakih n bita pojavljuje jedna greška, gde je

$$n = \frac{1}{P_b}$$

Prosečno vremensko rastojanje između dva pogrešno prenetih bita zavisi i od dužine trajanja signalizacionog intervala binarnog signala T_b i jednako je

$$t_n = nT_b = n \frac{1}{V_b}$$

a) Verovatnoća greške po bitu je $P_b=10^{-7}$ pa će se u proseku pojaviti jedan pogrešan bit na svakih $n=10^7$ bita. Kako je trajanje signalizacionog intervala jednako $T_b=1/(1.024\text{Mb/s})=9.7656\mu\text{s}$, prosečno rastojanje je

$$t_n = nT_b = \frac{n}{V_b} = \frac{10^7}{1.024\text{Mb/s}} = 9.7656\text{s}$$

Zadatak 1 (3)

b) Verovatnoća greške po bitu je 5 puta veća nego u slučaju pod a), pa je prosečan broj bita između dva pogrešno prenetih simbola 5 puta manji

$$n = \frac{1}{P_b} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-7}} = 2 \cdot 10^6$$

Trajanje signalizacionog intervala je isto kao pod a), $T_b = 9.7656 \mu$, pa je prosečan vremenski interval između dve greške 5 puta kraći u odnosu na slučaj pod a)

$$t_n = nT_b = \frac{2 \cdot 10^6}{1.024 \text{ Mb/s}} = 1.9531 \text{ s}$$

c) Verovatnoća greške po bitu je ista kao u slučaju pod a), pa je u proseku pogrešan jedan bit na svakih $n=10^7$ bita. Protok binarnog signala je dva puta veći u odnosu na slučaj pod a), odnosno trajanje signalizacionog intervala je dvostruko manje i iznosi $T_b = 1/(2.048 \text{ Mb/s}) = 4.8828 \mu\text{s}$. Prosečan vremenski interval između pogrešno prenetih bita je dva puta kraći u odnosu na slučaj pod a) i jednak

$$t_n = nT_b = \frac{n}{V_b} = \frac{10^7}{2.048 \text{ Mb/s}} = 4.8828 \text{ s}$$

Zadatak 2 (1)

Posmatra se prenos binarnog polarnog NRZ (bez povratka na nulu) signala, kod kojeg su verovatnoće pojave binarnih simbola 1 i 0 jednake (pa se pozitivni i negativni naponski nivoi signala U i $-U$ javljaju sa jednakom verovatnoćom). Prijemnik je realizovan kao integrator sa rasterećenjem, iza koga slede odabirač i odlučivač (sa optimalnim pragom odlučivanja $U_p=0$). Amplituda binarnog polarnog signala signala na ulazu u prijemnik je $U=0.02V$.

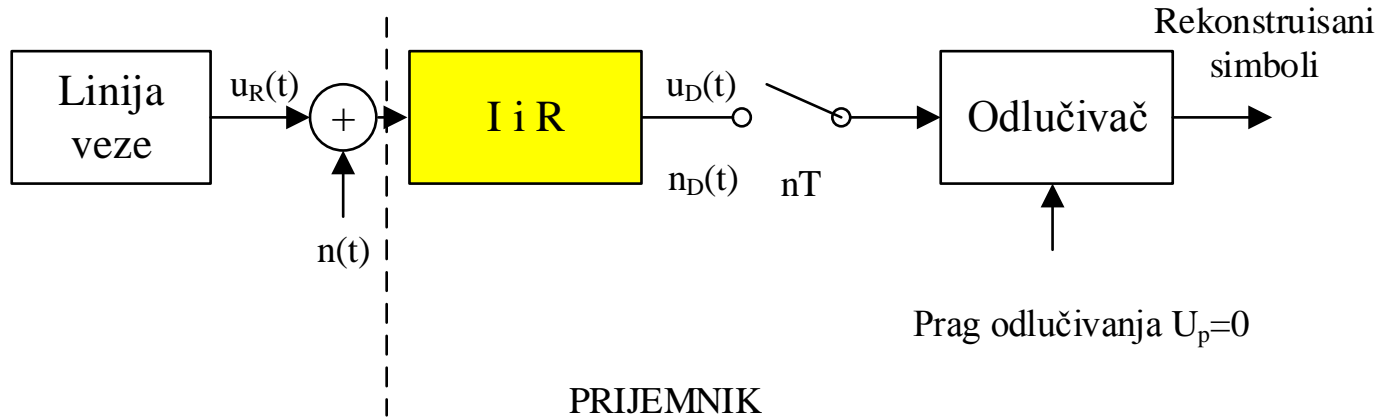
Na ulazu u prijemnik sa integracijom i rasterećenjem postoji ABGŠ čija je spektralna gustina srednje snage (SGSS) jednaka $p_N=10^{-10}[W/Hz]$. Izračunati verovatnoću greške kao i širinu propusnog opsega potrebnog za prenos signala po kriterijumu prve nule u spektru, za sledeće vrednosti trajanja signalizacionog intervala

a) $T=1\mu s$

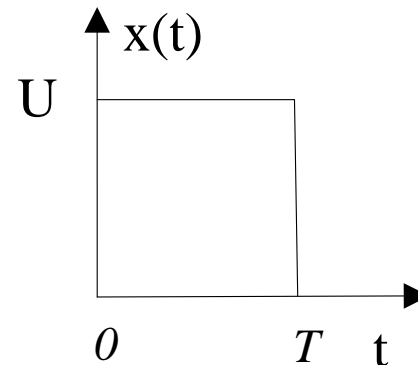
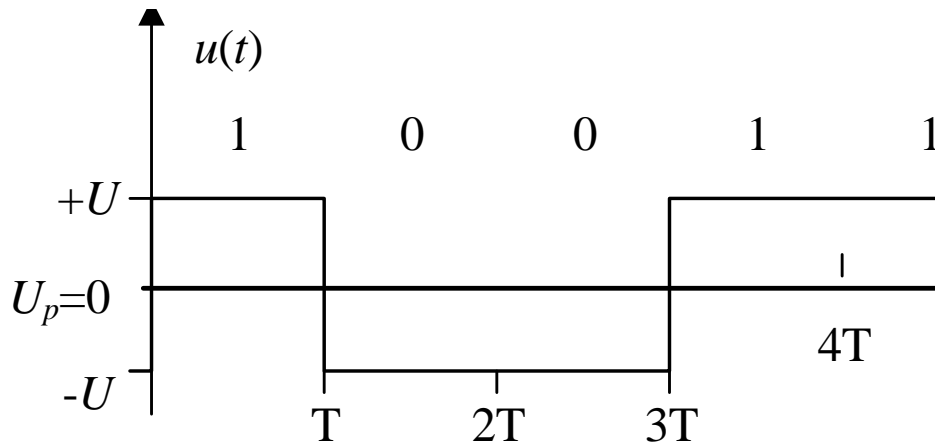
b) $T=2\mu s$

c) $T=3\mu s$

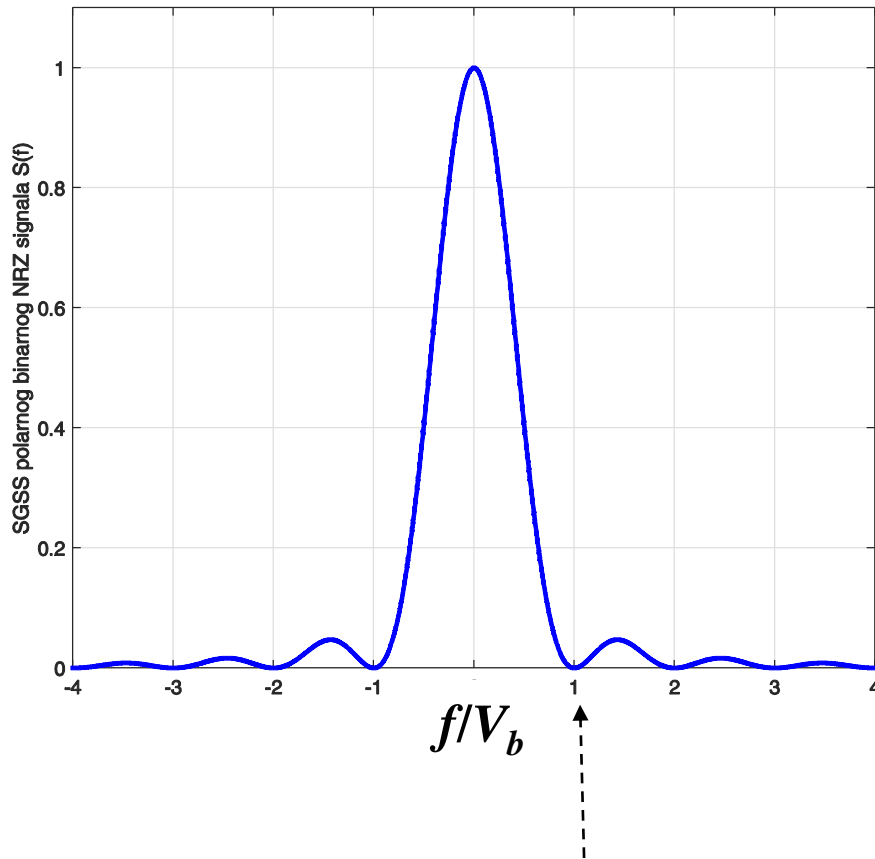
Zadatak 2 (2)



$$u(t) = \sum_k a_k x(t - kT), \quad a_k = \{\pm 1\}$$



Zadatak 2 (3)



učestanost $f=V_b$ na kojoj je
prva nula u spektru signala

$$S_{u,PNRZ}(f) = U^2 T_b \left(\frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi f T_b} \right)^2$$

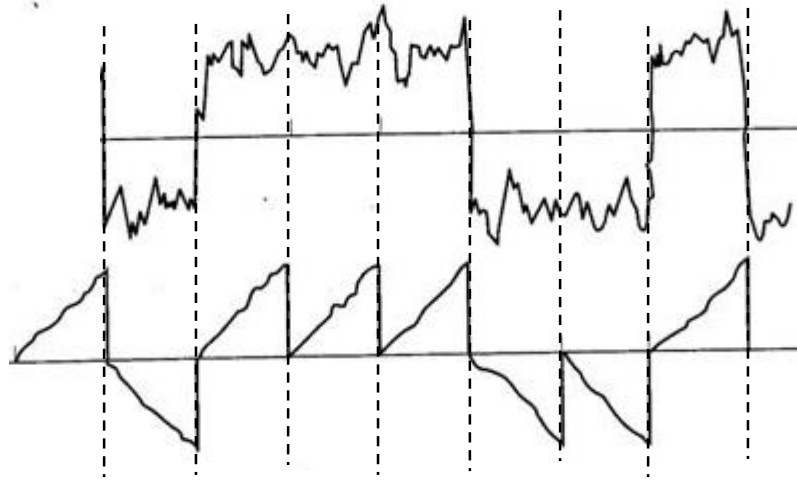
Širina koju zauzima binarni polarni NRZ signal je beskonačna, ali se veliki deo snage signala nalazi na učestanostima do „prve nule“ u spektru koja je u slučaju polarnog binarnog signala na $f=V_b$. Po kriterijumu prve nule u spektru signala, širina propusnog opsega pri prenosu binarnog polarnog (isto važi i za unipolarni) jednaka je

$$B=V_b$$

Zadatak 2 (4)

Signal na ulazu u integrator sa rasterećenjem

Signal na izlazu iz integratora sa rasterećenjem



Isprekidane linije označavaju granice signalizacionih intervala; odabiranje i odlučivanje se sada vrši na kraju sign. intervala

Vrednosti korisnog signala na izlazu integratora sa rasterećenjem (I&R) u trenutku odabiranja i odlučivanja (nakon integracije u trajanju T)

$$u_D = \int_0^T \pm U dt = \pm UT$$

Može se pokazati da je snaga šuma na izlazu I&R

$$\sigma^2 = p_N T / 2$$

Verovatnoća greške

$$P_{e, \text{polarni}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{UT}{\sqrt{2}\sqrt{p_N T / 2}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{U^2 T}{p_N}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{U^2}{p_N V}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{p_N}}\right)$$

Zadatak 2 (5)

Verovatnoća greške na izlazu integratora sa rasterećenjem u slučaju polarnog signaliziranja data je izrazom

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}}$$

gde je E_b energija po bitu (energija binarnog digitalnog signala u toku trajanja jednog signalizacionog intervala T_b , u okviru koga se predstavlja jedan bit), dok je p_N spektralna gustina snage šuma na ulazu u prijemnik [W/Hz].

Energija signala po bitu može se odrediti preko srednje snage signala P_s i trajanja signalizacionog intervala T_b

$$E_b = P_s T_b$$

Verovatnoća pojave binarnog simbola 1 (predstavlja se naponskim nivoom $+U$) je $P(1)$, a verovatnoća pojave binarnog simbola 0 (predstavlja se naponskim nivoom $-U$) je $P(0)$.

Srednja snaga binarnog polarnog signala jednaka je $P_s = U^2$.

$$P_s = P(0)(+U)^2 + P(1)(+U)^2 = \frac{U^2}{2} + \frac{U^2}{2} = U^2$$

Zadatak 2 (6)

a) Verovatnoća greške jednaka je

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{P_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{U^2 T}{P_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{(0.02V)^2 1 \cdot 10^{-6} s}{10^{-10} W / Hz}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{4} = 0.0023$$

Protok digitalnog signala jednak je

$$V_b = \frac{1}{T_b} = \frac{1}{1 \mu s} = 1 Mb / s$$

Širina koju zauzima binarni polarni digitalni signal je beskonačna, a najveći deo srednje snage signala nalazi se na niskim učestanostima, nižim od „prve nule“ u spektru signala koja se nalazi na učestanosti $f = V_b = 1/T_b$ [Hz].

U posmatranom slučaju širina opsega učestanosti po kriterijumu „prve nule“ u spektru jednaka je

$$B = V_b = \frac{1}{T_b} = 1 MHz$$

Zadatak 2 (7)

b) U ovom slučaju trajanje signalizacionog intervala je dva puta veće u odnosu na slučaj pod a), pa je binarni protok signala dvostruko manji.

Kako je amplituda signala ista, a time i srednja snaga signala, energija signala po bitu je sada dvostruko veća u odnosu na slučaj pod a). Verovatnoća greške je zbog toga manja (*erfc* funkcija je monotono opadajuća).

Širina propusnog opsega po kriterijumu „prve nule“ je dvostruko manja za dvostruko manji protok signala:

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{U^2 T}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{8} = 3.17 \cdot 10^{-5}$$

$$B = V_b = \frac{1}{T_b} = \frac{1}{2 \mu s} = 0.5 \text{ MHz}$$

c) Dužina signalizacionog intervala je tri puta veća u odnosu na slučaj pod a), pa je i energija po bitu tri puta veća u odnosu na slučaj pod a).

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{U^2 T}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{12} = 4.82 \cdot 10^{-7}$$

$$B = V_b = \frac{1}{T_b} = \frac{1}{3 \mu s} = 0.33 \text{ MHz}$$

Zadatak 3 (1)

Analogni signal $u(t)$ konvertuje se u digitalni primenom IKM sa ravnomernom kvantizacijom sa $q=1024$ nivoa. Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=15\text{kHz}$, a odabiranje se vrši minimalnom učestanošću određenom teoremom odabiranja.

Dobijeni digitalni signal predstavljen je binarnim polarnim impulsima i prenosi se u osnovnom opsegu učestanosti. Srednja snaga signala na izlazu iz predajnika iznosi $P_T=0.03\text{mW}$. Linija veze unosi slabljenje jednako $a=30\text{dB}$. Na ulazu u prijemnik osim korisnog signala postoji i aditivni beli Gausov šum, čija je spektralna gustina srednje snage (SGSS) jednaka $p_N=10^{-14}\text{W/Hz}$.

- Odrediti binarni protok signala na liniji veze.
- Izračunati širinu propusnog opsega učestanosti potrebnu za prenos digitalnog signala, po kriterijumu „prve nule“ u spektru.
- Odrediti verovatnoću greške po bitu za slučaj kada je prijemnik realizovan u obliku integratora sa rasterećenjem.

Zadatak 3 (2)

a) Protok binarnog digitalnog signala jednak je

$$V_b = 2f_m \log_2 q = 2 \cdot 15000 \cdot \log_2 (1024) \text{ b/s} = 300 \text{ kb/s}$$

b) Potrebna širina propusnog opsega za prenos signala u osnovnom opsegu učestanosti *po kriterijumu "prve nule u spektru"* jednaka je

$$B = V_b = 300 \text{ kHz}$$

c) Verovatnoća greške pri prenosu signala jednaka je

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{P_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{P_R T_b}{P_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{P_R}{P_N V_b}}$$

pri čemu je E_b energija signala po bitu, jednaka proizvodu snage signala na ulazu u prijemnik i trajanja signalizacionog intervala

$$E_b = P_R \cdot T_b$$

Slabljenje linije veze je $a = 30 \text{ dB}$, pa je odnos predajne i prijemne snage

$$P_T/P_R: \quad a [\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{P_T}{P_R} \Rightarrow \frac{P_T}{P_R} = 10^{a/10} \Rightarrow \frac{P_R}{P_T} = 10^{-a/10} = 0.001$$

Zadatak 3 (3)

Snaga signala na prijemu jednaka je

$$P_R = P_T 10^{-a/10} = 0.03mW \cdot 10^{-30/10} = 0.03\mu W$$

Verovatnoća greške jednaka je

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{P_R T_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{P_R}{p_N V_b}}$$

Zamenom brojnih vrednosti

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{0.03\mu W}{300kHz \times 10^{-14} W / Hz}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (\sqrt{10}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (3.126)$$

Primenom aproksimacije $\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ za vrednost $x=3.126$ dobija se

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(3.126) \approx \frac{1}{2} \frac{1}{3.126\sqrt{\pi}} e^{-3.126^2} = 5 \cdot 10^{-6}$$

Zadatak 4 (1)

Analogni signal $u(t)$ konvertuje se u digitalni primenom IKM sa ravnomernom kvantizacijom. Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=20\text{kHz}$, a odabiranje se vrši minimalnom učestanošću određenom teoremom odabiranja. Amplituda signala $u(t)$ je uniformno raspodeljena u intervalu $[-5,+5]\text{V}$, a maksimalna dozvoljena greška kvantizacije jednaka je 5mV .

Dobijeni binarni signal konvertuje se u M -arni signal sa $M=4$ nivoa primenom Grejevog mapiranja. Signal se prenosi preko linije veze binarnim polarnim NRZ signaliziranjem (pravougaonim impulsima bez povratka na nulu u toku trajanja intervala signalizacije). Verovatnoća greške po simbolu pri prenosu signala jednaka je $P_{e,M}=10^{-6}$.

- Odrediti minimalan potreban broj kvantizacionih nivoa $q_{min}=2^n$.
- Izračunati protok binarnog digitalnog signala na liniji veze (za q_{min}).
- Izračunati širinu propusnog opsega učestanosti potrebna za prenos digitalnog M -arnog signala, po kriterijumu „prve nule“ u spektru.
- Odrediti verovatnoću greške po bitu.

Zadatak 4 (2)

Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=20\text{kHz}$, pa se odabiranje vrši minimalnom učestanošću $f_s=2f_m=40\text{kHz}$.

Amplituda signala $u(t)$ je uniformno raspodeljena u intervalu $[-5,+5]\text{V}$, a maksimalna dozvoljena greška kvantizacije jednaka je 5mV .

Ako je broj kvantizacionih nivoa q , tada je korak kvantizacije $\Delta u=5\text{V}-(-5\text{V})$

$$\Delta u = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{q} = \frac{10}{q}$$

Maksimalna greška koja se unosi kvantizacijom je $\Delta u/2$, pa je minimalan broj potrebnih nivoa pri kvantizaciji

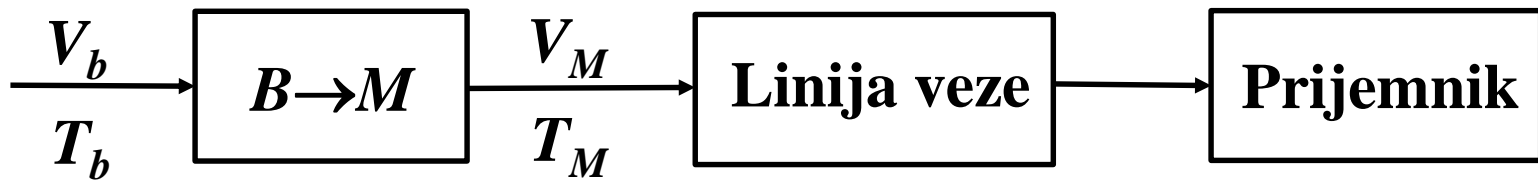
$$\frac{\Delta u}{2} = \frac{5}{q} \leq 0.005 \Rightarrow q = 2^n \geq 1000 \Rightarrow q = 1024$$

Minimalan broj nivoa kvantizacije je $q=1024$, pa je za kodiranje svakog odbirka signala potrebno $n=\log_2 1024=10\text{bita}$.

Binarni protok signala jednak je

$$V_b = f_s n = 40\text{kHz} \cdot 10 = 400\text{kb/s}$$

Zadatak 4 (3)



Po uslovu zadatka, dobijeni binarni digitalni signal protoka $V_b=400\text{kb/s}$ konvertuje se u M -arni NRZ signal.

U toku trajanja svakog signalizacionog intervala trajanja T_M signal ima oblik pravougaonog impulsa trajanja T_M sa jednom od četiri moguće vrednosti amplitude $\{-3U, -U, +U, +3U\}$.

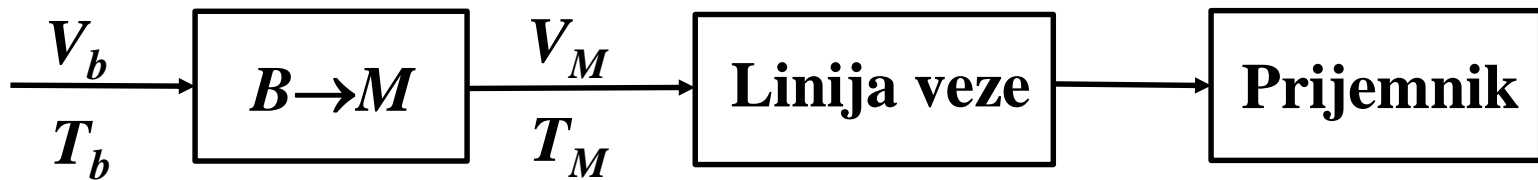
Kako je $M=4$, trajanje signalizacionog interval M -arnog signala T_M je dvostruko duže od trajanja jednog bita (informacija o ditektu sadrži se sada u jednoj od 4 moguće vrednosti amplitude) pa je

$$T_M = 2T_b = \frac{2}{V_b} = \frac{2}{400\text{kb/s}} = 5\mu\text{s}$$

Protok M -arnih simbola je dvostruko manji od binarnog protoka i

$$V_M = \frac{1}{T_M} = \frac{1}{2T_b} = \frac{V_b}{2} = 200\text{ksim/s}$$

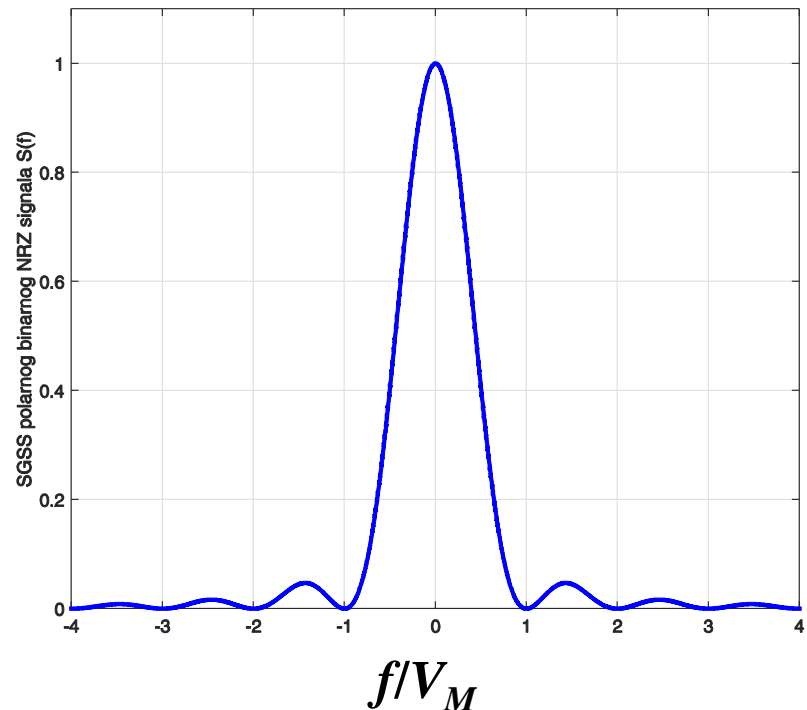
Zadatak 4 (4)



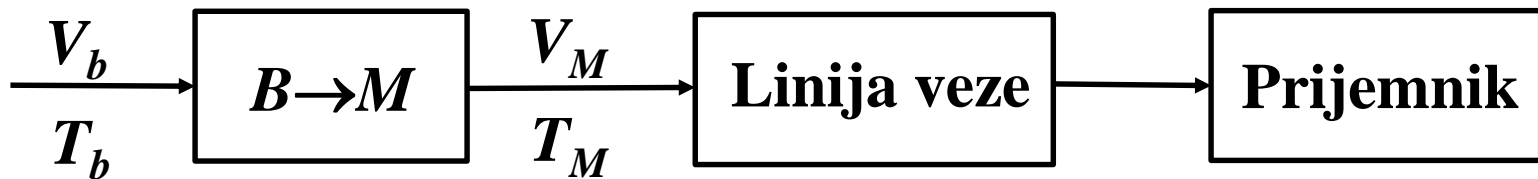
U posmatranom slučaju prenos signala vrši se signaliziranjem pravougaonim impulsima trajanja T_M , pa je širina opsega učestanosti koju signal zauzima teorijski beskonačna. Međutim, najveći deo srednje snage signala nalazi se na niskim učestanostima do „prve nule“ u spektru signala.

Prva nula u spektru signala u ovom slučaju nalazi se na

$$B_{Inule} = V_M = \frac{1}{T_M} = 200kHz$$



Zadatak 4 (5)



Po uslovu zadatka, verovatnoća greške po prenetom M -arnom simbolu jednaka je

$$P_{e,M} = 10^{-6}$$

Pri prenosu M -arnog signala najčešće dolazi do grešaka, tako što prijemnik usled dejstva šuma donese odluku da je umesto poslatog simbola poslat jedan od susednih simbola (sa najbližim vrednostima amplitude).

Kada je mapiranje bita u simbole izvršeno u skladu sa Grejevim kodom (pri mapiranju, susedni simboli se razlikuju u samo jednom bitu), tada najčešće dolazi do greške u samo jednom od $n_m = \log_2 M$ bita koji se prenose jednim M -arnim simbolom. Tako je verovatnoća greške po bitu (približno) jednaka

$$P_{e,b} \approx \frac{P_{e,M}}{\log_2 M} = \frac{P_{e,M}}{2} = 5 \cdot 10^{-7}$$

Zadatak 5 (1)

Binarni signal protoka $V_b = 5\text{Mb/s}$ prenosi se primenom binarnog polarnog NRZ signaliziranja. Prijemnik je realizovan u obliku integratora sa rasterećenjem. Za zadovoljavajući kvalitet prenosa signala potrebno je da *maksimalna vrednost verovatnoće greške po bitu ne prelazi vrednost 10^{-6}* . Slabljenje linije veze je $a[\text{dB}] = 30\text{dB}$, dok je spektralna gustina srednje snage (SGGS) aditivnog belog Gausovog šuma (ABGŠ) na ulazu prijemnika jednaka $p_N = 10^{-15}\text{W/Hz}$.

Odrediti minimalnu potrebnu srednju snagu signala na izlazu iz predajnika. Pretpostavlja se da su apriorne verovatnoće pojave binarnih simbola 0 i 1 međusobno jednake, tj. $P(0) = P(1) = 0.5$.

Potrebni podaci:

$$\text{erfc}(3.3612) = 2 \times 10^{-6}, \text{erfc}(3.4589) = 10^{-6}, \text{erfc}(3.7667) = 10^{-7}$$

Zadatak 5 (2)

Vrednost verovatnoće greške po bitu za slučaj binarnog polarnog NRZ signaliziranja data je izrazom

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{P_N}} \leq P_{e,\max} = 10^{-6}$$

Da bi vrednost verovatnoće greške po bitu bila manja od neke granične vrednosti $P_{e,\max}$, potrebno je da energija signala po bitu $E_b = P_R \times T_b$ bude veća od neke granične vrednosti $E_{b,\min} = P_{R,\min} \times T_b$ (erfc je monotono opadajuća funkcija, pa kada argument funkcije x raste vrednost funkcije $\operatorname{erfc}(x)$ opada). Za fiksnu vrednost binarnog protoka $V_b = 1/T_b$, potrebno je da srednja snaga signala na prijemu bude veća od minimalne vrednosti $P_{R,\min}$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{P_N}} \leq P_{e,\max} = 10^{-6} \Rightarrow \sqrt{\frac{E_b}{P_N}} \geq \operatorname{erfc}^{-1}(2 \times 10^{-6}) = 3.3612 \Rightarrow \sqrt{\frac{P_{R,\min} T_b}{P_N}} = 3.3612$$

(koristi se jedna od datih vrednosti erfc funkcije, zavisno od vrednosti verovatnoće greške, u ovom slučaju $\operatorname{erfc}(3.3612) = 2 \times 10^{-6}$)

Zadatak 5 (3)

Minimalna vrednost srednje snage signala na ulazu u prijemnik jednaka je

$$\sqrt{\frac{P_{R,\min} T_b}{P_N}} = 3.3612 \Rightarrow P_{R,\min} = 3.3612^2 P_N V_b$$

odnosno jednaka je $P_{R,\min} = 5.65 \cdot 10^{-8} \text{W}$.

Srednja snaga signala na izlazu iz predajnika određena je sa

$$a[\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{P_T}{P_R} \Rightarrow P_{R,\min} = P_{T,\min} \times 10^{-a/10} \Rightarrow P_{T,\min} = P_{R,\min} \times 10^{+a/10}$$

Za date uslove prenosa minimalna vrednost srednje snage signala na predaji je

$$P_{T,\min} = P_{R,\min} \times 10^{+a/10} = 5.65 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{+3} \text{W} = 5.65 \cdot 10^{-5} \text{W}.$$

Da bi za date uslove prenosa verovatnoća greške bila manja od 10^{-6} , potrebno je da srednja snaga signala na predaji bude veća od $5.65 \cdot 10^{-5} \text{W}$.