PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

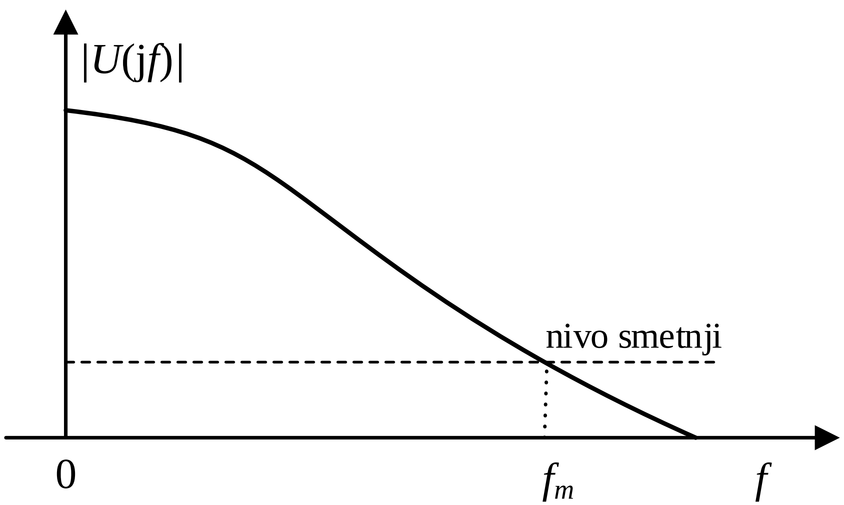
Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020

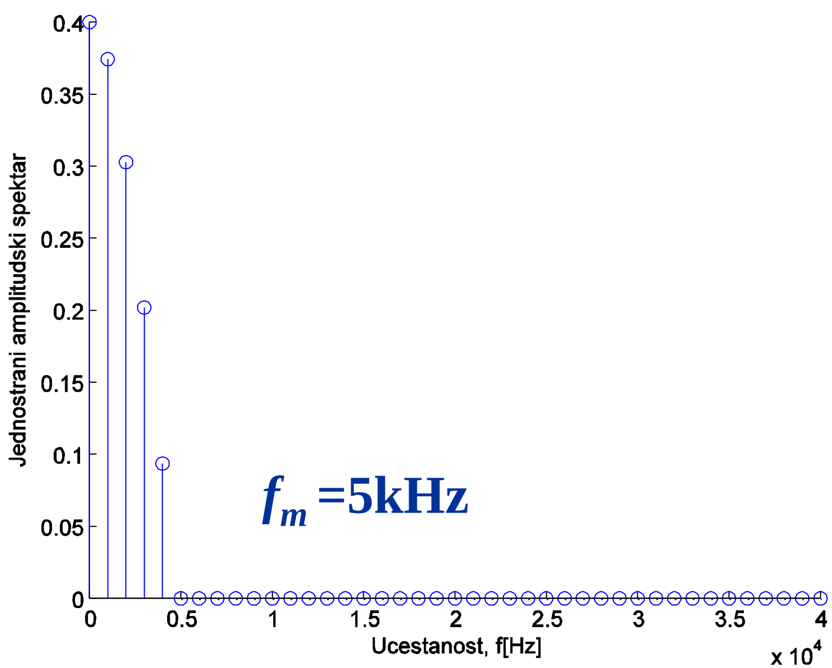
DISKRETIZACIJA SIGNALA U VREMENU, TEOREMA O ODABIRANJU

Kontinualni signal

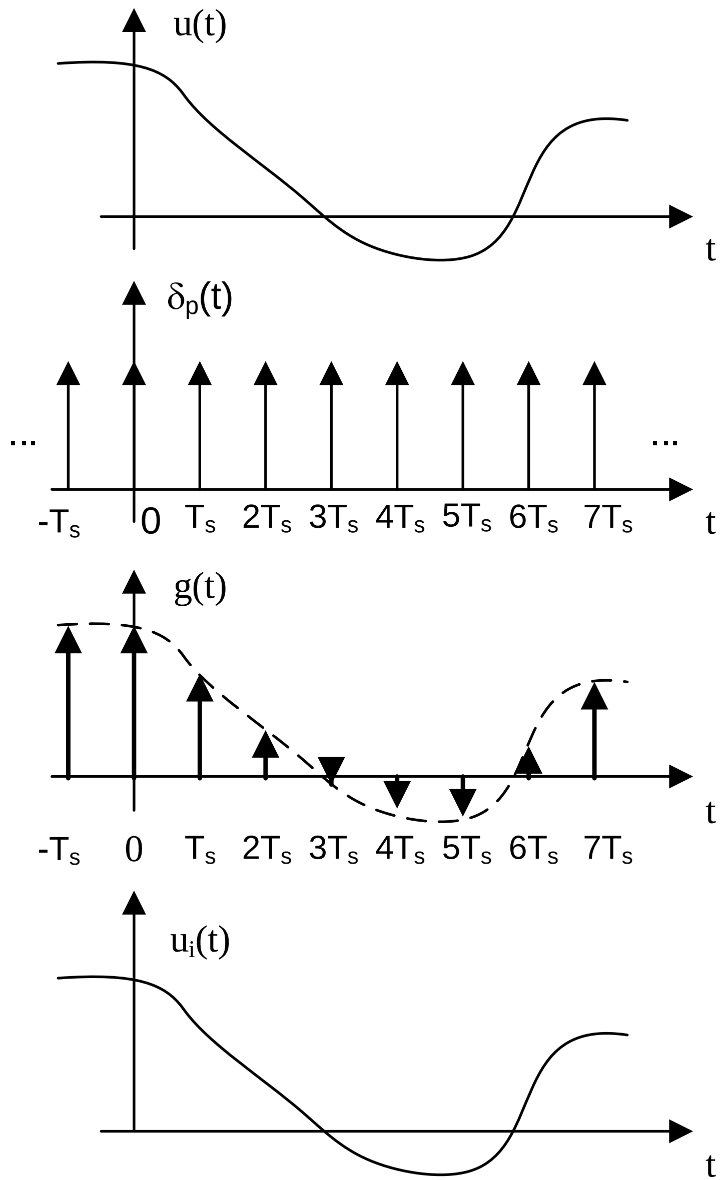
Kontinualni signali (koji se nalaze u svom prirodnom opsegu učestanosti) najčešće imaju spektar koji je ograničen na neku maksimalnu učestanost f_m

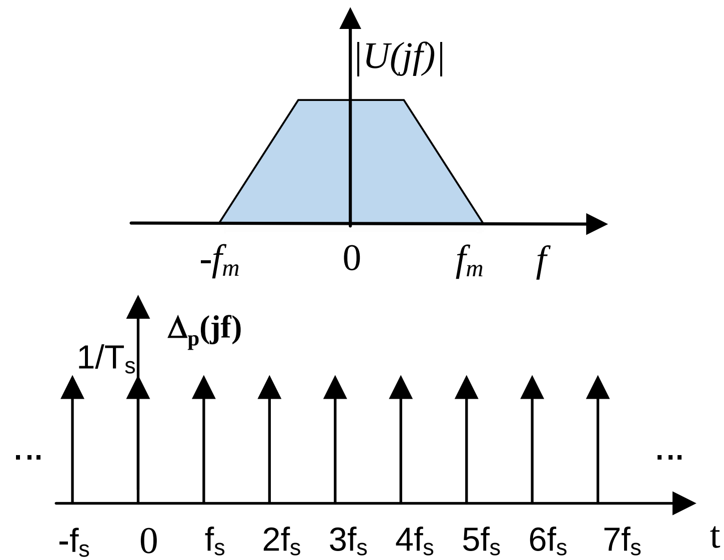
- Spektar modulišućeg signala može da bude i teorijski beskonačno širok, ali se tada ne prenose sve spektralne komponente!
- Signal se propušta kroz NF filtar, pri čemu se granična učestanost f_m bira tako da spektralne komponente iznad f_m ne nose veliki procenat srednje snage signala (tj. da nivo izobličenja kontinualnog signala usled njihovog odsustva bude prihvatljiv).
- Za govorni signal f_m=4kHz, za audio signal f_m=20kHz, za TV signal f_m=5MHz.

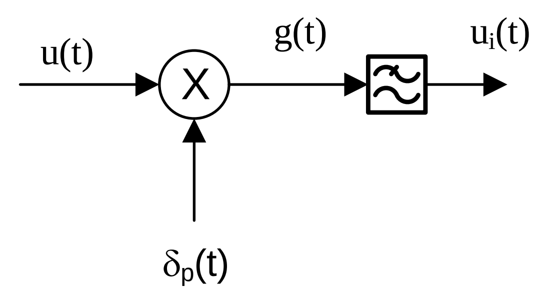




Diskretizacija kontinualnog signala







Kontinualni signal koji ima spektar ograničen učestanošću f_m množi se (periodičnom) povorkom Delta impulsa, koji se pojavljuju sa periodom $T_S=1/f_S$.

Spektar diskretizovanog signala

Signal povorke odbiraka *g*(*t*) nastalog diskretizacijom definisan je izrazom:

$$g(t) = u(t)\delta_p(t)$$

Povorka Delta impulsa može se predstaviti i u obliku (periodičan signal – razvoj u *Fourier*-ov red)

$$\boxed{\delta_p(t) = \frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \times n f_S \times t},\ T_S = \frac{1}{f_S}}$$

Spektar diskretizovanog signala:

$$G(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\underbrace{\left(\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_s t}\right)}_{\delta_p(t)} e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi(f-nf_S)t}dt}_{U(j(f-nf_S))}$$

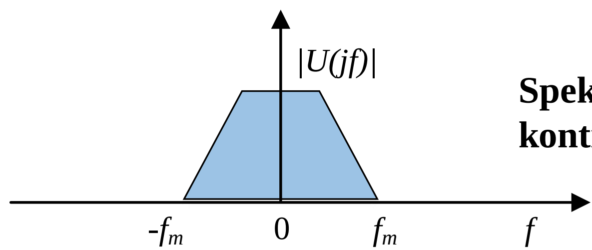
Veza spektra diskretizovanog signala, G(j*f*) i spektra kontinulanog signala U(j*f*)

$$\boxed{G(jf) = \frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty} U[j(f-nf_S)]}$$

Spektar diskretizovanog signala

Spektar diskretizovanog signala sadrži više (teorijski beskonačno mnogo) transliranih “kopija” spektra originalnog (kontinualnog) signala.

- **Učestanost pojave Delta impulsa obeležava se sa $f_S=1/T_S$ i naziva se učestanošću odabiranja (*sampling frequency*), dok je T_S perioda odabiranja (*sampling period*).**
- **Svaka od ovih kopija ima istu “visinu” (istu snagu).**
- **Kopije su međusobno razmaknute za f_S.**
- **Spektar je periodična funkcija učestanosti sa periodom f_S.**
- ***Da se kopije ne bi preklapale, potrebno je da bude ispunjeno $f_S \geq 2f_m$.***

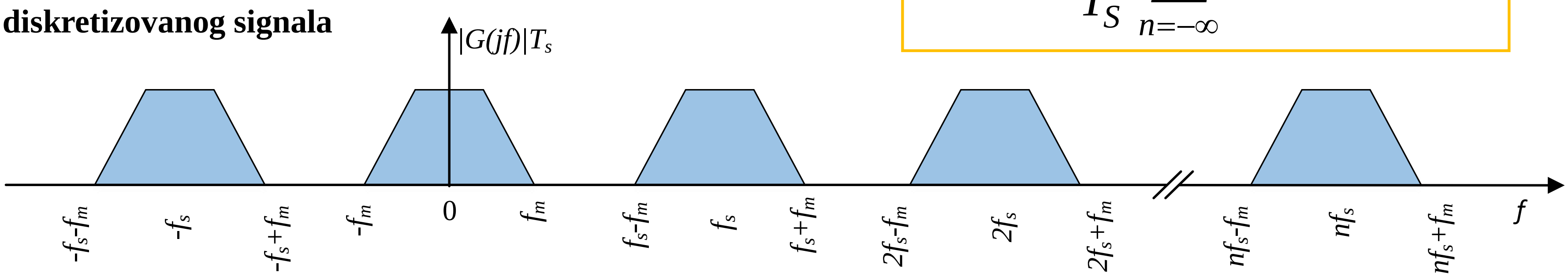


Spektar originalnog kontinualnog signala

$f_s > 2f_m$

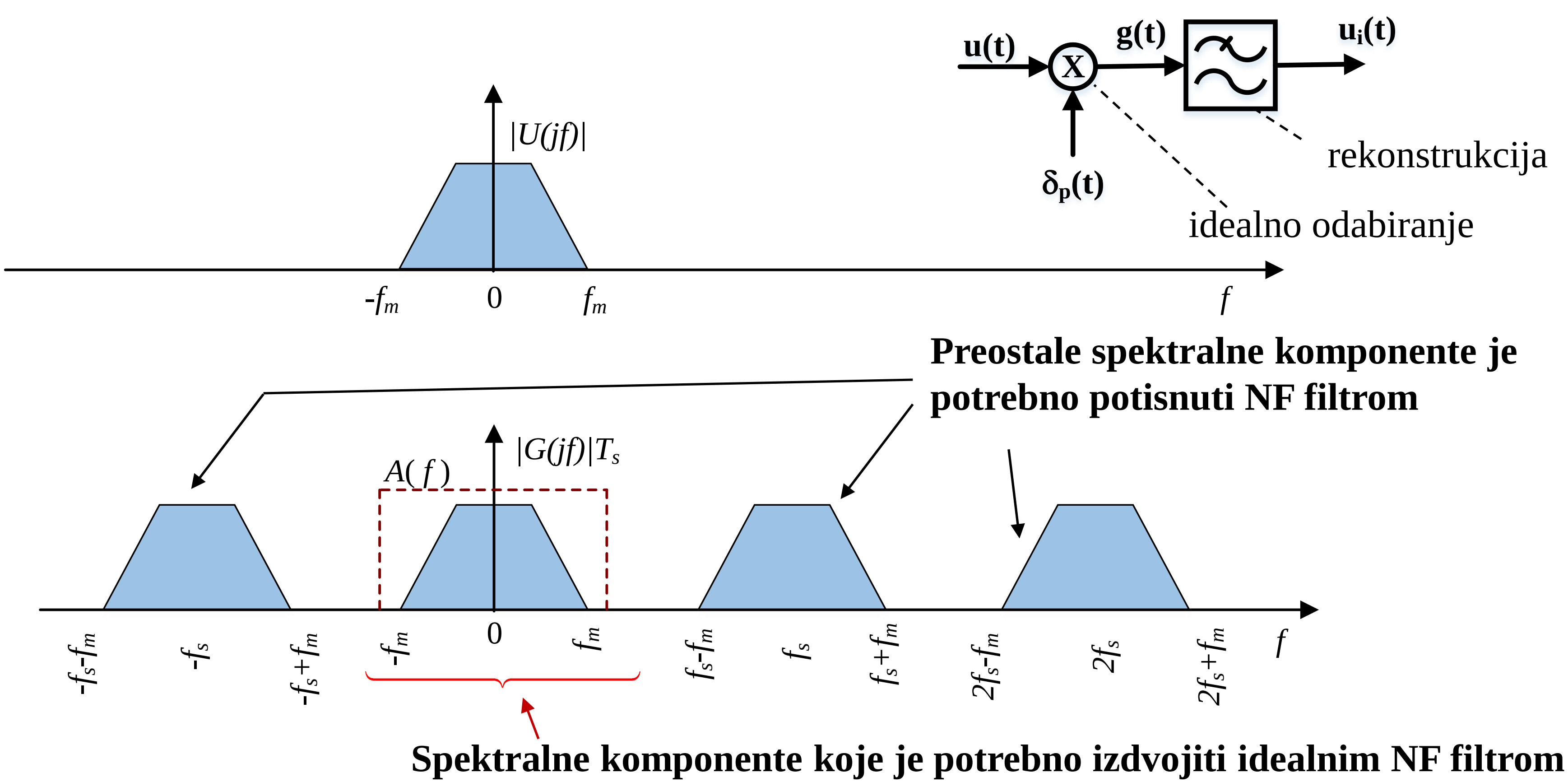
Spektar diskretizovanog signala

$$G(jf) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U[j(f - nf_S)]$$



Rekonstrukcija kontinualnog signala

- **Signal se iz svojih odbiraka rekonstruiše propuštanjem kroz idealni NF filtar granične učestanosti f_m**
- **Da bi rekonstrukcija bila moguća potrebno da bude ispunjen uslov $f_s \geq 2f_m$**

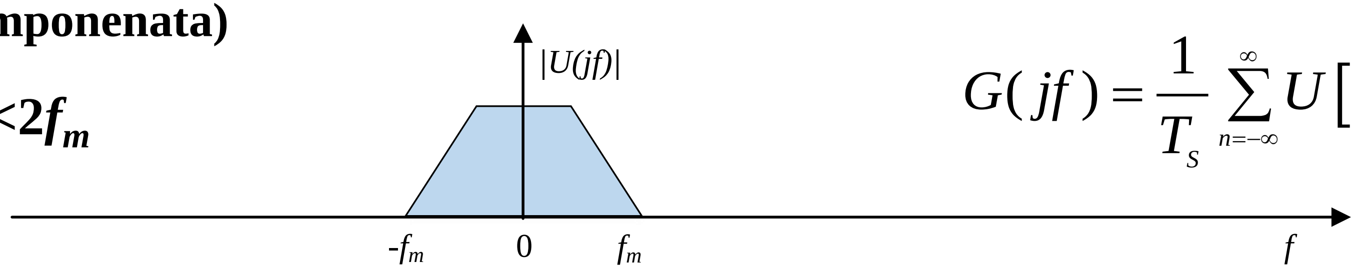


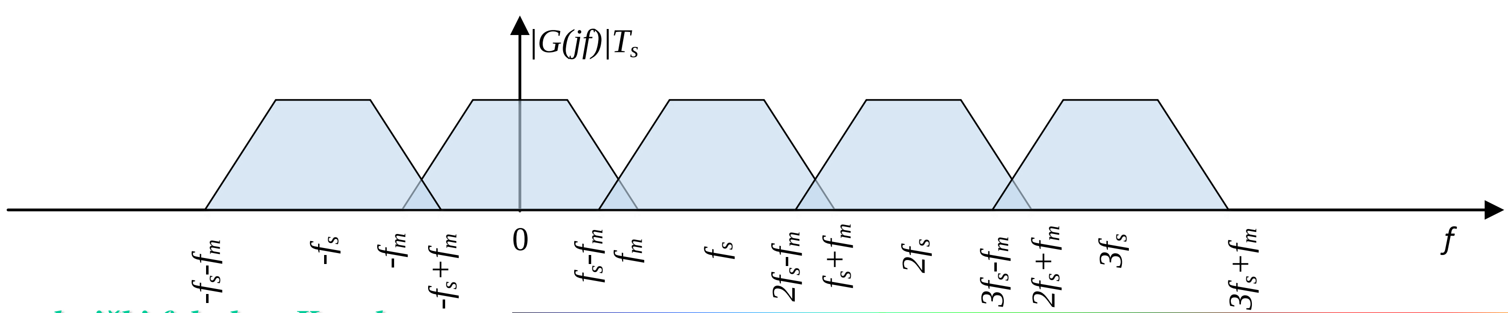
Spektar diskretizovanog signala

- <u>Ukoliko učestanost odabiranja ne zadovoljava uslov</u> $f_s \geq 2f_m$ **dolazi do preklapanja (*aliasing*, engl.) spektra originalnog signala i replika spektra nastalih diskretizacijom.**
- **Spektar diskretizovanog signala sadrži spektar originalnog kontinualnog signala (koji je član sume za n=0) i zauzima opseg učestanosti od $-f_m$ do f_m.**
  Član sume za n=1 nalazi se u opsegu oko $+f_s$ (od $+f_s - f_m$ do $+f_s + f_m$), dok se član sume za n= -1 nalazi u opsegu oko $-f_s$ (od $-f_s - f_m$ do $-f_s + f_m$).
- **Kada nije ispunjen uslov $f_s \geq 2f_m$, član za n=0 se preklapa sa članom n= ±1 i nije moguće izdvojiti originalni signal korišćenjem NF filtra ⇒ *nije moguće u potpunosti izvršiti rekonstrukciju signala* (na učestanostima višim od f_s-f_m dolazi do preklapanja komponenata)**

$f_s < 2f_m$

$$G(jf) = \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} U\left[j(f - nf_S) \right]$$





Rekonstrukcija kontinualnog signala

Povorka odbiraka propušta se kroz NF filtar.

Na osnovu osobina linearnosti i vremenske nepromenljivosti, odziv NF filtra na jedan delta impuls, *δ(t-nT)* amplitude *u(nT)* je *u(nT)h(t-nT)*, gde je *h(t)* impulsni odziv NF filtra.

Signal na izlazu idealnog NF filtra definisan je izrazom:

$$u_i(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(nT_s)h(t-nT_s)\qquad h(t)=2f_m\frac{\sin(2\pi f_m t)}{2\pi f_m t}=\frac{1}{T_s}\frac{\sin(2\pi f_m t)}{2\pi f_m t}$$

pa je konačno:

$$\boxed{u_i(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(nT_S)\frac{\sin\left(2\pi f_m\left(t-nT_S\right)\right)}{2\pi f_m\left(t-nT_S\right)}}$$

Sa druge strane, jasno je da se propuštanjem signala *g*(*t*) kroz NF filtar dobija signal $u_i(t)$ čiji se spektar sastoji samo od kopije spektra signala *u*(*t*) koja je smeštena na niskim učestanostima:

$$\boxed{U_i(jf)=\frac{1}{T_S}U(jf)\quad\Rightarrow\quad u_i(t)=\frac{1}{T_S}u(t)}$$

Rekonstrukcija kontinualnog signala

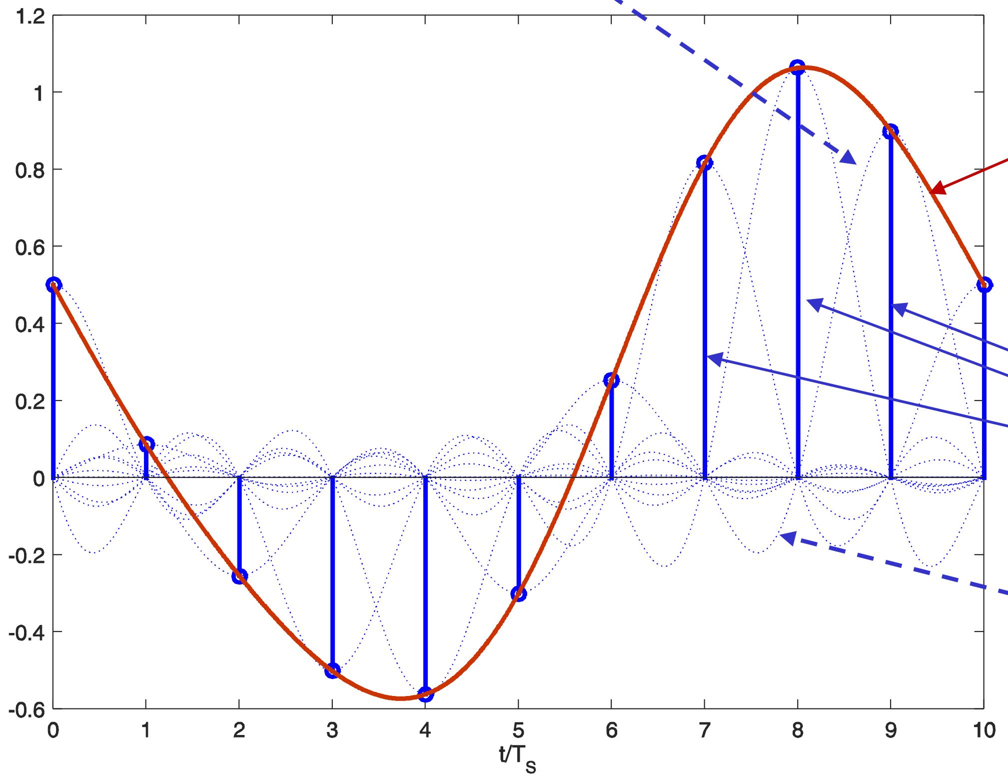
* **Vremenski oblik diskretizovanog signala je definisan samo u trenucima koji su umnošci periode odabiranja ($t=nT_S$).**
  - Ove vrednosti signala nazivaju se odbircima originalnog kontinualnog signala u trenucima nT_S.
  - Diskretizovani signal predstavlja niz odbiraka kontinualnog signala.
* **Ako se diskretizovani signal propusti kroz NF filtar, granične učestanosti $f_m \le f_g \le f_s - f_m$, na izlazu filtra se pojavljuje signal koji ima isti oblik spektra kao kontinualni signal koji smo diskretizovali.**
  - Dva signala koji imaju isti oblik spektra mogu se razlikovati samo po amplitudi.
  - To znači da se na izlazu NF filtra pojavljuje oslabljeni ili pojačani kontinualni signal, koji smo prethodno diskretizovali. Rekonstrukciju je moguće obaviti samo kada je $f_s - f_m \ge f_m \Rightarrow f_s \ge 2f_m$.
  - Propuštanjem kroz običan NF filtar, znajući samo diskretizovani signal definisan samo u nekim trenucima (u trenucima oblika, $t=nT_s$), može se rekonstruisati kontinualni signal koji je definisan u bilo kom trenutku.
  - Matematički zapis poslednje tvrdnje (za minimalnu moguću vrednost učestanosti odabiranja $f_s = 2f_m$), koristeći činjenicu da je $u_i(t)=u(t)/T_s$, postaje

$$\boxed{u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(nT_s)\frac{\sin(2\pi f_m (t-nT_S))}{2\pi f_m (t-nT_S)}, \quad T_S = \frac{1}{2f_m}}$$

Rekonstrukcija kontinualnog signala

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(nT_s)\frac{\sin(2\pi f_m(t-nT_s))}{2\pi f_m(t-nT_s)},\quad T_s=1/(2f_m)$$

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(nT_S)\boxed{\frac{\sin(\pi(t-nT_S)/T_S)}{\pi(t-nT_S)/T_S}}$$



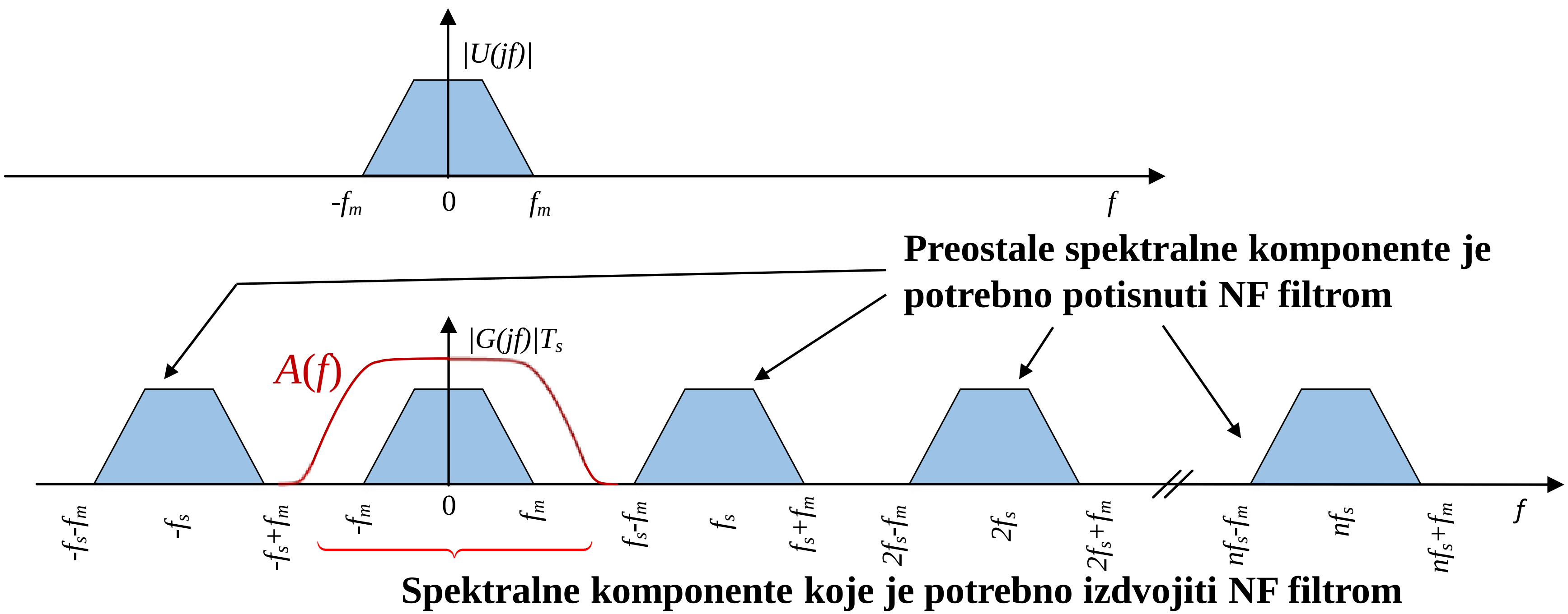
Rekonstruisan kontinualan signal, na izlazu NF filtra

Diskretizovan signal, odbirci

Odziv NF filtra na pojedinačnu pobudu (jedan impuls diskretizovanog signala) pri rekonstrukciji

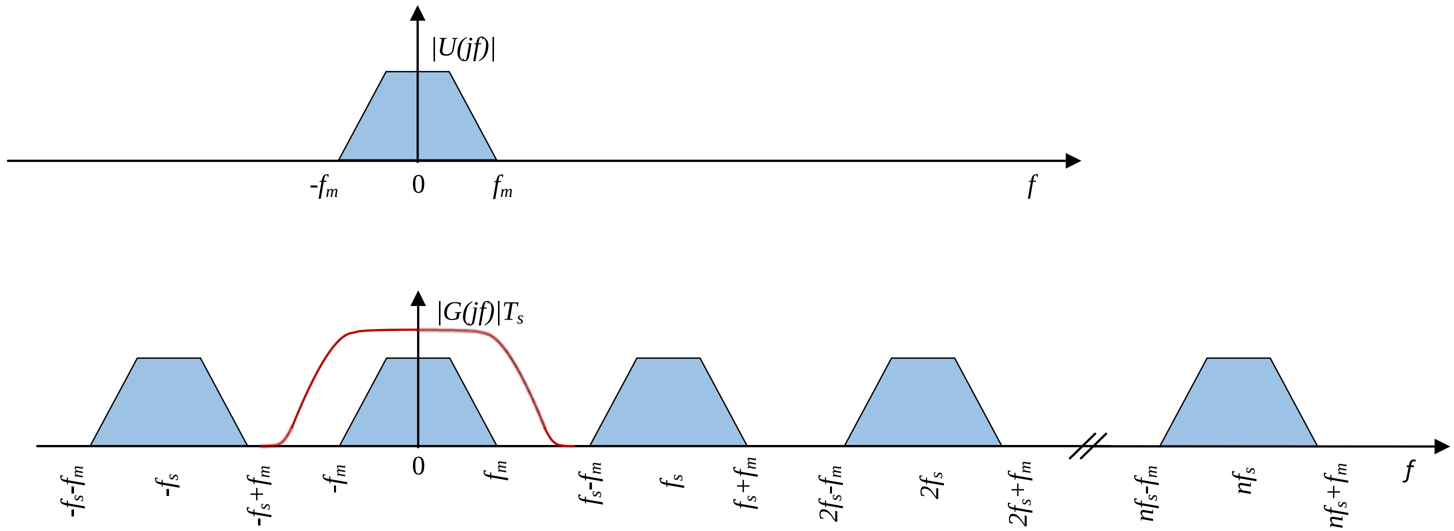
Idealno odabiranje signala – realan NF filtar

* **NF filtar potreban za rekonstrukciju nikada nije idealan**
  - **Potrebno je da amplitudska karakteristika filtra $A(f)$ bude približno konstantna u opsegu učestanosti do f_m (u opsegu učestanosti kontinualnog signala).**
  - Amplitudska karakteristika filtra $A(f)$ treba da padne na nultu vrednost pre prve naredne kopije u spektru diskretizovanog signala (potrebno je da prva kopija u spektru bude u potpunosti potisnuta na izlazu NF filtra).
  - U praksi se obično usvaja da je $f_s \geq 2.2 \times f_m$



Idealno odabiranje signala – realan NF filtar

* **NF filtar potreban za rekonstrukciju nikad nije idealan**
* **U praksi se obično koristi nešto veća učestanost odabiranja od minimalno potrebne, radi lakše realizacije filtriranja pri rekonstrukciji signala, npr.:**
  - Za odabiranje govornog signala, koji zauzima opseg učestanosti od 0.3kHz do 3.4kHz (f_m=3.4kHz) u telefoniji se koristi učestanost odabiranja f_s = 8kHz.
  - Za odabiranje muzičkog signala, koji zauzima opseg učestanosti od 20Hz do 20kHz prilikom snimanja muzike na kompakt-diskove koristi se učestanost odabiranja f_s= 44.1kHz (dodatni razlog da se izabere baš ova vrednost je potreba da signal bude kompatibilan sa PAL TV sistemom).



Teorema o odabiranju

Ako kontinualni realni signal u(t) ima maksimalnu učestanost u spektru f_m, onda je taj signal u potpunosti opisan svojim trenutnim vrednostima uzetim u ekvidistantnim trenucima trajanja $T_s=1/f_s \leq 1/(2f_m)$. Ukoliko je učestanost odabiranja f_s bar dva puta veća od f_m, ovi odbirci potpuno opisuju kontinualni signal u(t)! Signal se iz svojih odbiraka rekonstruiše propuštanjem kroz idealni NF filtar granične učestanosti f_m.

- **Izuzetno važno - ako se znaju odbirci nekog signala, on se može potpuno verno rekonstruisati.**
- **Posledica - nema potrebe da se prenosi čitav kontinualni signal - dovoljno je preneti samo njegove odbirke!**
- **Sama teorema pre svega govori *koliko često* treba uzimati odbirke signala, da bi signal na strani prijema bio verno rekonstruisan.**
- **Ovo omogućava *diskretizaciju* (a uz neke dodatne tehnike i *digitalizaciju*) signala.**

Prethodno opisan proces naziva se idealnim odabiranjem.

- **Opisani proces nije moguće realno ostvariti – nije moguće generisati idealne delta impulse (nije moguće napraviti prekidač koji bi se mogao beskonačno brzo otvarati i zatvarati).**

Prirodno odabiranje signala

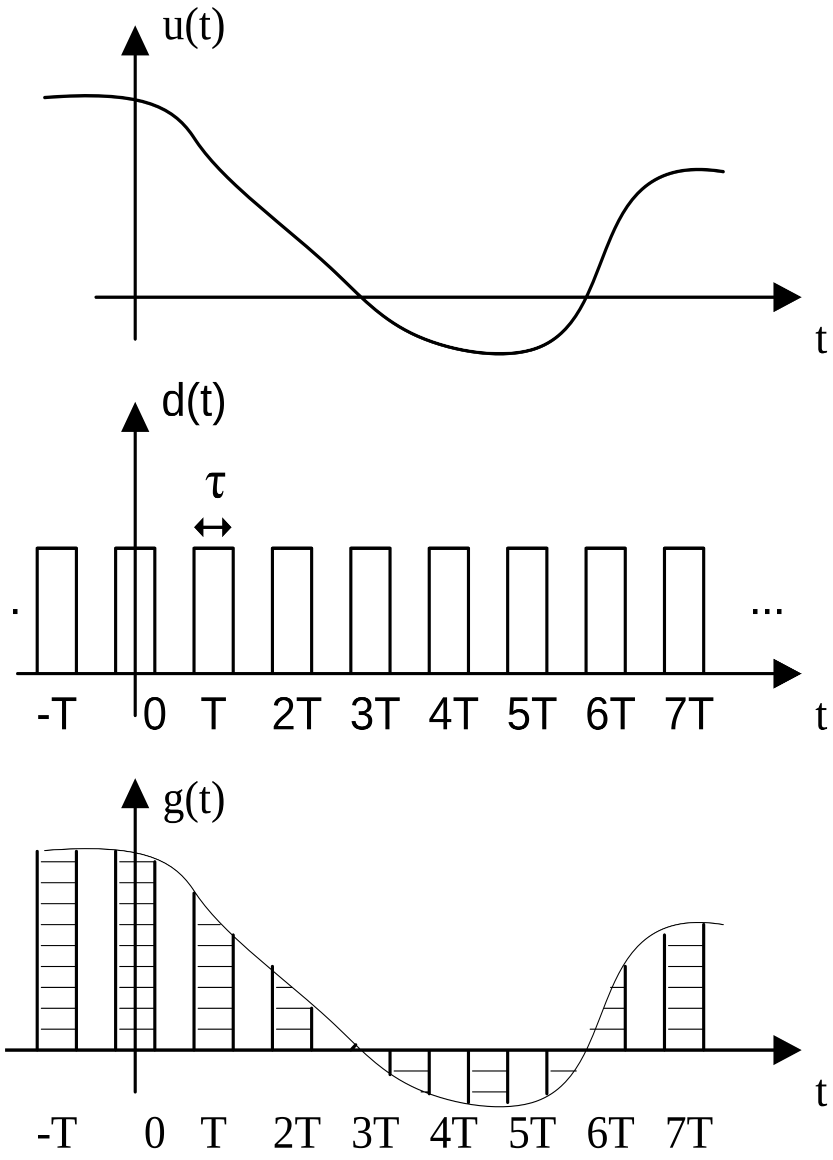
Kod ovog tipa odabiranja u generatoru impulsa koristi se prekidač sa konačnom brzinom zatvaranja/otvaranja.

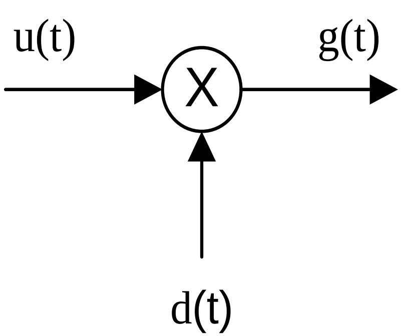
- **Prekidač se periodično zatvara sa periodom *T*,**
- **Svaki put ostaje zatvoren tokom kratkog intervala τ.**
- **Signal koji se dobija na izlazu generatora impulsa je periodična povorka pravougaonih impulsa periode *T* i trajanja τ.**

Pri svakom odabiranju, na izlazu prekidača dobijamo odbirak signala koji odgovara proizvodu kontinualnog signala koji odabiramo i signala na izlazu generatora impulsa

- **Svaki odbirak ima amplitudu koja prati oblik originalnog kontinualnog signala (*prirodnog* je oblika) i trajanja τ.**
- **Dobijeni rezultat je isti kao da smo izvršili množenje originalnog kontinualnog signala sa periodičnom povorkom pravougaonih impulsa periode *T* i trajanja impulsa τ.**

Prirodno odabiranje signala

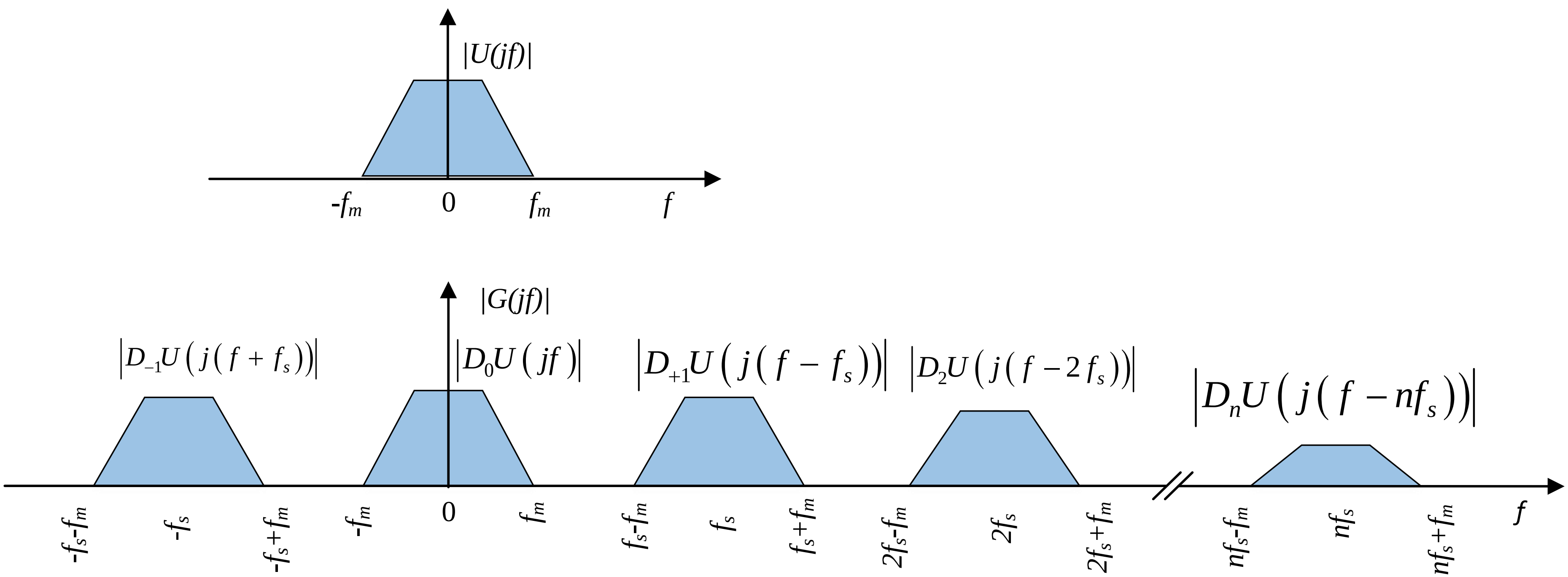




Prirodno odabiranje – spektar diskretizovanog

$$\boxed{G(jf)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, U(j(f-nf_S))}$$

$$D_n=\begin{cases}\dfrac{\tau}{T_S}\dfrac{\sin(n\pi f_S\tau)}{n\pi f_S\tau}, n\neq 0\\[2mm] \dfrac{\tau}{T}, n=0\end{cases}$$



Prirodno odabiranje signala - rekonstrukcija

Sličan rezultat kao i kod idealnog odabiranja, ali

- U ovom slučaju n-te replike originalnog spektra (translirane oko učestanosti nf_s) pomnožene su n-tim koeficijentom D_n razvoja povorke pravougaonih impulsa $d(t)$ u Furijeov red.
- Snage ovih transliranih kopija su sve manje kako n raste (najjača je komponenta na niskim učestanostima!)

U slučaju da učestanost odabiranja zadovoljava uslov teoreme o odabiranju, neće doći do preklapanja originalnog spektra i transliranih replika spektra, pa se primenom NF filtra može izvršiti rekonstrukcija originalnog signala.

- U tom slučaju, na izlazu filtra za rekonstrukciju dobijamo signal, čiji su spektar i vremenski oblik definisani izrazima:

$$\boxed{U_i(jf) = D_0 U(jf) \wedge D_0 = \frac{\tau}{T} \Rightarrow u_i(t) = \frac{\tau}{T} u(t)}$$

Regularno odabiranje signala

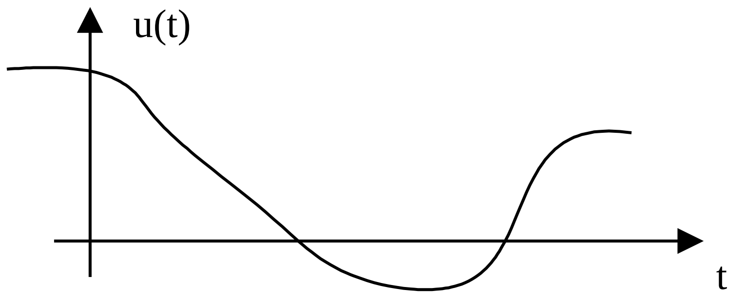
I kod ovog tipa odabiranja u generatoru impulsa koristi se prekidač sa konačnom brzinom zatvaranja/otvaranja.

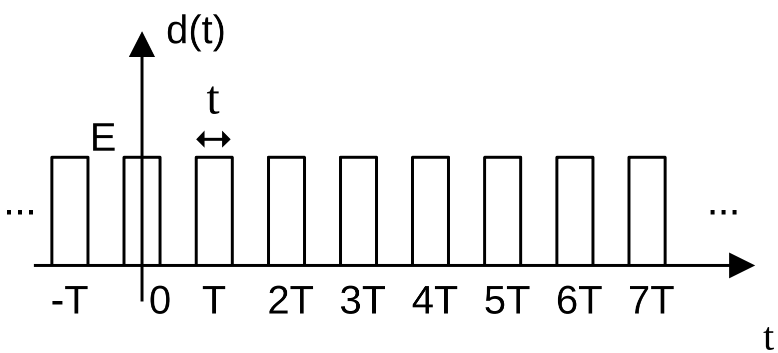
- Prekidač se periodično zatvara sa periodom T_S,
- Svaki put ostaje zatvoren tokom kratkog intervala τ.
- Signal koji se dobija na izlazu generatora impulsa je periodična povorka pravougaonih impulsa periode T_S i trajanja τ.

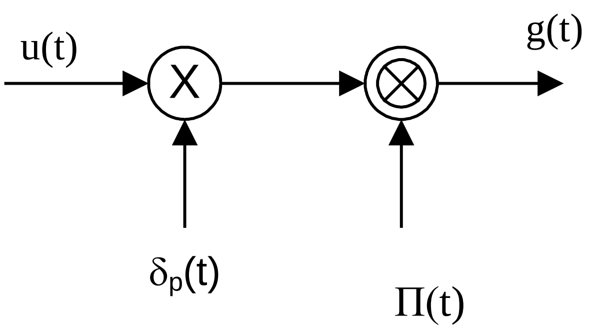
Pri svakom odabiranju, na izlazu prekidača dobijamo odbirak signala koji odgovara proizvodu kontinualnog signala koji odabiramo i signala na izlazu generatora impulsa, ali je vrednost amplitude impulsa konstantna za vreme trajanja jednog odbirka

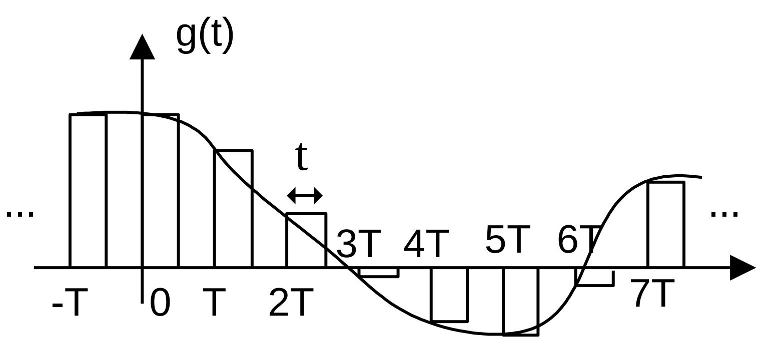
- U trenutku kada počne odabiranje se uzima vrednost odbirka signala, i ta vrednost se drži na izlazu odabirača još neki period vremena τ.
- U početnom trenutku zapamti se vrednost napona odbirka, koja se ne menja dok se ne uzme novi odbirak **- S&H (*Sample &Hold*).**
- Zato svaki odbirak ima amplitudu koja je konstantna tokom trajanja odbirka τ.

Regularno odabiranje signala









Regularno odabiranje signala

Spektar diskretizovanog signala u slučaju regularnog odabiranja jednak je proizvodu spektra signala pri idealnom odabiranju sa spektrom usamljenog pravougaonog impulsa trajanja τ.

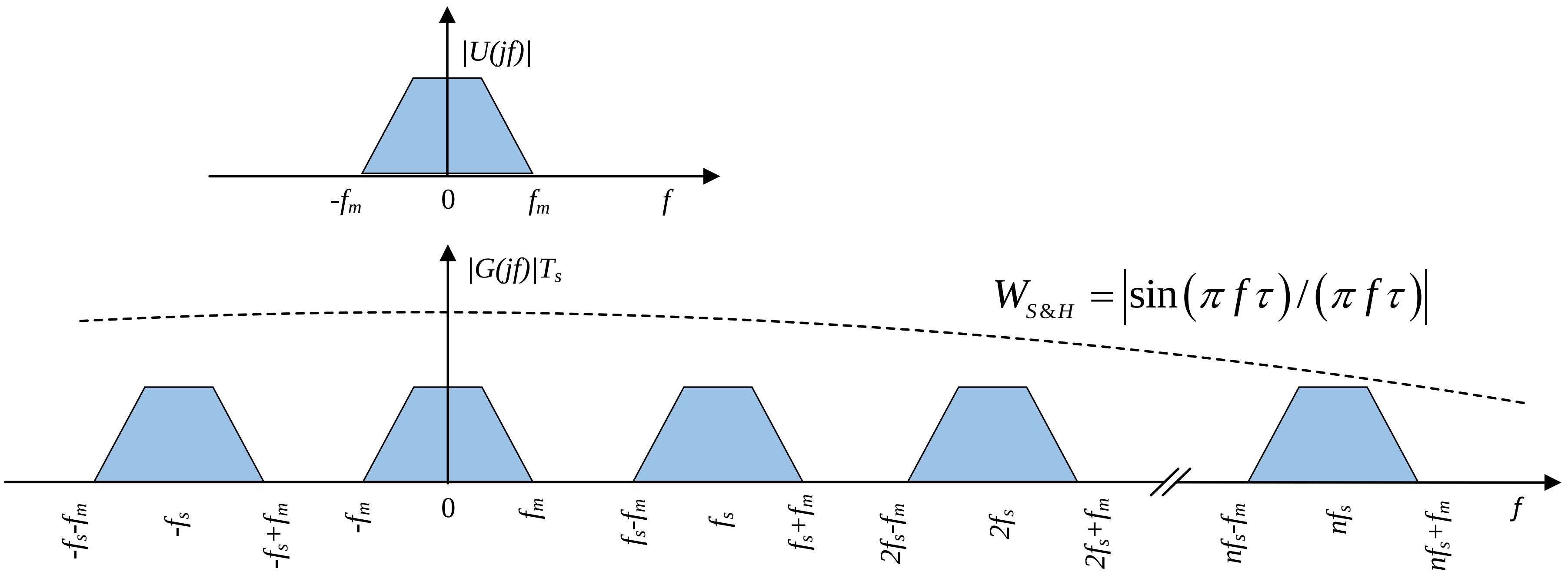
$$G_{S\&H}(jf)=\left[\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}U(j(f-nf_S))\right]\cdot\tau E\,\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}\,e^{-j2\pi f\tau/2}$$

Originalni spektar signala (*n*=0), množi se *kontinualnom funkcijom*, a ne konstantom, kao kod idealnog ili prirodnog odabiranja,

- Različite spektralne komponente množe se različitim vrednostima.
- Dolazi do ***promene originalnog spektra***, pa se nakon rekonstrukcije primenom NF filtra ***ne dobija originalni spektra signala – dolazi do izobličenja signala.***
- I pored ovog nedostatka, S&H se najčešće koristi u praksi zbog jednostavnosti i male cene praktične realizacije.

Regularno odabiranje – spektar diskretizovanog signala

$$G_{S\&H}(jf)=\left[\frac{1}{T_S}\sum_{n=-\infty}^{\infty}U(j(f-nf_S))\right]\times\tau E\,\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}\,e^{-j\pi f\tau}$$



Spektar signala nakon procesa regularnog odabiranja, po obliku odgovara spektru signala nakon procesa idealnog odabiranja koji je pomnožen sa kontinualnom težinskom funkcijom $W_{S\&H}$.