



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

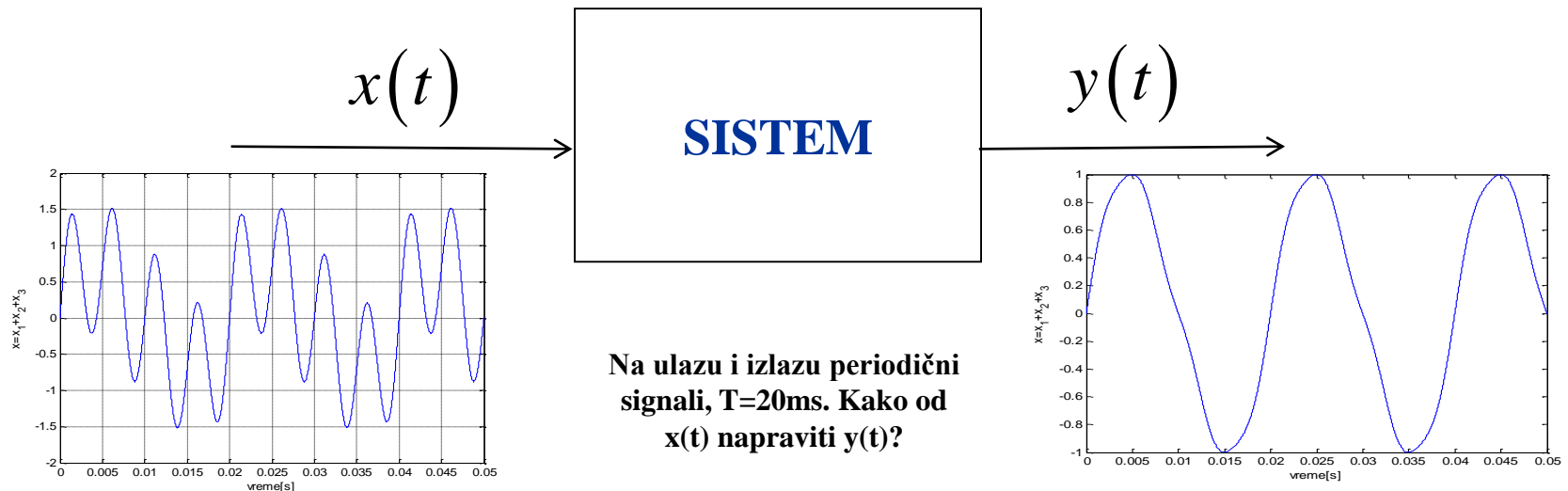
*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020*



LINEARNI SISTEMI

Sistemi za prenos signala

- * **Sistem** je opšti naziv za entitet sastavljen od međusobno povezanih uređaja, u kome se obavlja transformacija ulaznog signala u signal na izlazu iz sistema.
- * Ulazni i izlazni signal po pravilu su *funkcije vremena*, mada mogu da budu i funkcije drugih argumenata.
 - Ako znamo oblik ulaznog i izlaznog signala, tada možemo da opišemo rad sistema.
 - Ako znamo signal na ulazu i znamo kako radi sistem, tada možemo da predvidimo šta će se pojaviti na izlazu.



Osobine sistema

* **Linearnost:** Za linearni sistem važi da, ukoliko pobuda $x_1(t)$ daje odziv $y_1(t)$, i pobuda $x_2(t)$ daje odziv $y_2(t)$, tada pobuda $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$ daje odziv $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$. Linearni sistem zadovoljava sledeće osobine:

• **Homogenost:** Ukoliko je pobudni signal pomnožen (pojačan) konstantom a , tada će i odziv biti pomnožen (pojačan) konstantom a .

$$f[ax(t)] = af[x(t)] = ay(t)$$

• **Aditivnost:** $f[x_1(t)+x_2(t)] = f[x_1(t)] + f[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$.

* **Vremenska invarijantnost** - ukoliko je pobuda na ulazu sistema zakašnjena za t_0 , tada je i odziv zakašnjen za t_0

$$f[x(t)] = y(t) \rightarrow f[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$$

* **Kauzalnost**

• Odziv u posmatranom trenutku ne zavisi od odziva u prethodnim trenucima, uključujući tu i tekući \rightarrow osobina realnih sistema

* **Stabilnost**

• Konačna pobuda proizvodi konačan odziv \rightarrow osobina realnih sistema (nema odziva beskonačne energije).

Uvod u linearne sisteme – pobuda i odziv

- * Ako na ulazu sistema za prenos postoji nekakav signal $x(t)$, on se naziva **pobuda**.
 - Pobuda se može predstaviti kao zbir prostoperiodičnih komponenti.
$$x(t) = \sum x_i(t)$$
 - Svaka prostoperiodična komponenta je oblika
$$x_i(t) = X_i \cos(2\pi f_i t + \theta_i)$$
- * Signal $y(t)$ koji se pojavi na njegovom izlazu je tada **odziv**.
 - Odziv je takođe moguće rastaviti na prostoperiodične komponente (*u opštem slučaju broj ovih komponenti i njihove učestanosti ne moraju biti iste kao kod pobudnog signala, ali kod linearnog sistema to je obavezno ispunjeno!*).
- * Sistem za prenos se tada posmatra kao crna kutija (*black box*) koja je **potpuno opisana pobudom i odzivom**.



Uvod u linearne sisteme – vremenski domen

* Za linearne invremenski invarijantne sisteme važi:

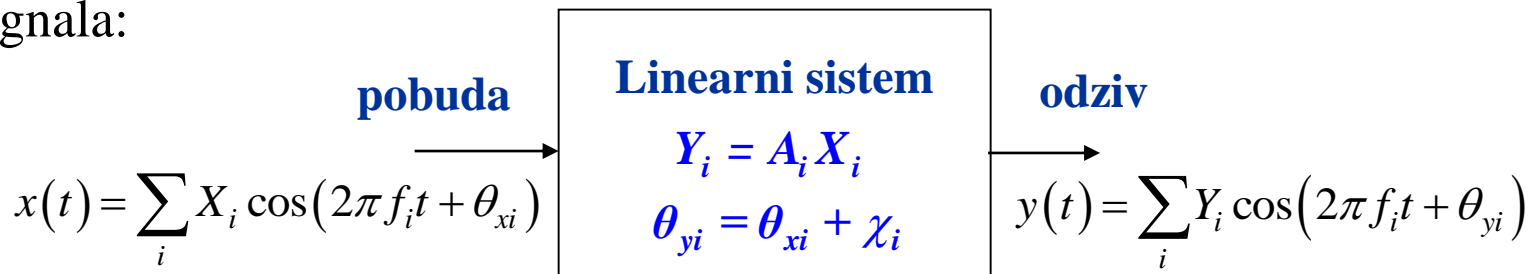
- Ako pobudi $x(t)$ odgovara odziv $y(t)$, tada pojačanoj i zakašnjennoj verziji pobude odgovara odziv pojačan i zakašnjen za istu vrednost kao u slučaju signala pobude

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow Ax(t-t_0) \rightarrow Ay(t-t_0)$$

- **Kod linearnih sistema prenosa pobudi prostoperiodičnim signalom na jednoj učestanosti odgovara takođe prostoperiodični signal na istoj učestanosti (u opštem slučaju, sa promenjenom amplitudom i početnim faznim stavom)**

$$x_i(t) = X_i \cos(2\pi f_i t + \theta_{xi}) \rightarrow y_i(t) = Y_i \cos(2\pi f_i t + \theta_{yi})$$

- Pošto je pobuda složena, odziv se može napisati kao zbir prostoperiodičnih komponenti koje imaju iste učestanosti kao komponente pobudnog signala:



Primer linearnog sistema

* Za linearne vremenski varijantne sisteme važi:

- Ako pobudi $x(t)$ odgovara odziv $y(t)$, tada pojačanoj i zakašnjennoj verziji pobude odgovara odziv pojačan i zakašnjen za istu vrednost kao u slučaju signala pobude

* Primer :

$$x(t) = 0.7 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t) + 0.2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t) + \sin(2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot t)$$

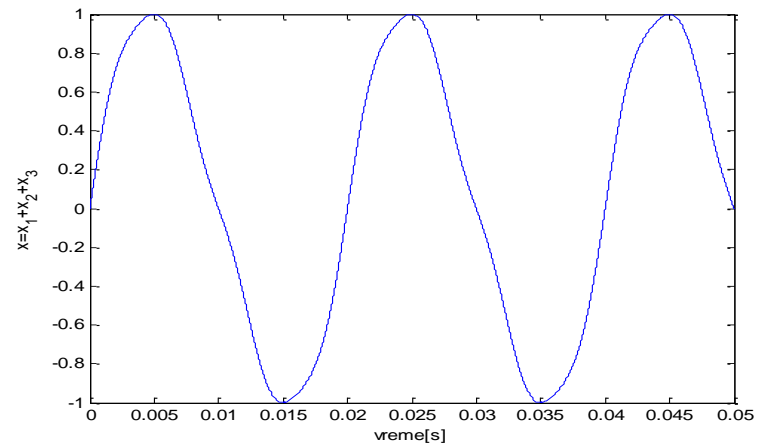
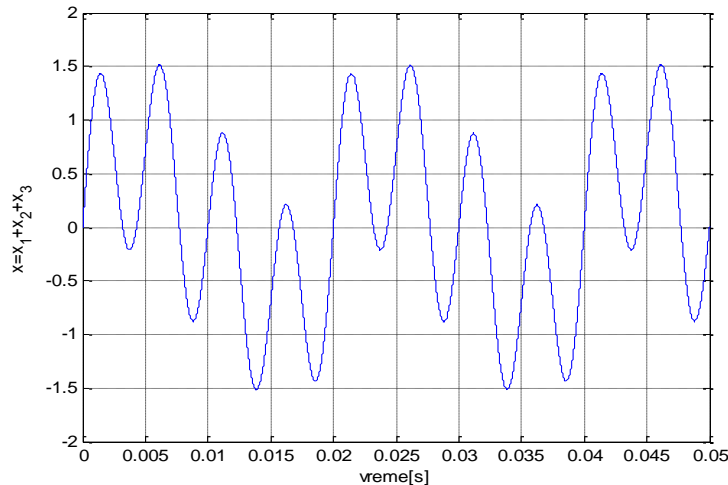
$$y(t) = 1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t) + 0.2 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t) + 0.1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 200 \cdot t)$$

* Pojačanje na pojedinim učestanostima

$A(50\text{Hz}) = 1/0.7 = 1.4286$ – pojačanje komponente na niskim učestanostima

$A(100\text{Hz}) = 0.2/0.2 = 1$ – nema promene amplitude/snage na učestanosti 100Hz

$A(200\text{Hz}) = 0.1/1 = 0.1$ – amplituda komponente oslabljena 10 puta (snaga 100 puta)



Zapis pojačanja/slabljenja u decibelima

- * Ako je pojačanje amplitude A (apsolutna vrednost), tada je pojačanje snage signala $A_p=A^2$, slabljenje je $1/A$ a slabljenje snage $1/A^2$ pa je:

- Pojačanje u decibelima: $a=20\log_{10}(A)$ [dB]= $10\log_{10}(A_p)$ [dB]
- Slabljenje u decibelima: $a_t=1/a = -20\log_{10}(A)$ [dB]= $-10\log_{10}(A_p)$ [dB]

- * Prethodni primer

$$A(50\text{Hz})=1.43, A_p(50\text{Hz})=2.05 \Rightarrow a=3.11\text{dB}>0$$

$$A(100\text{Hz})=1, A_p(100\text{Hz})=1 \Rightarrow a=0$$

$$A(200\text{Hz})=0.1, A_p(200\text{Hz})=0.01 \Rightarrow a=-20\text{dB}<0$$

- * Kada je pojačanje veće od jedan (signal je zaista pojačan), vrednost u decibelima je veća od nule; kada je pojačanje manje od jedan (signal je oslabljen), vrednost u decibelima je manja od nule. Za slabljenje važi obrnuto pravilo.

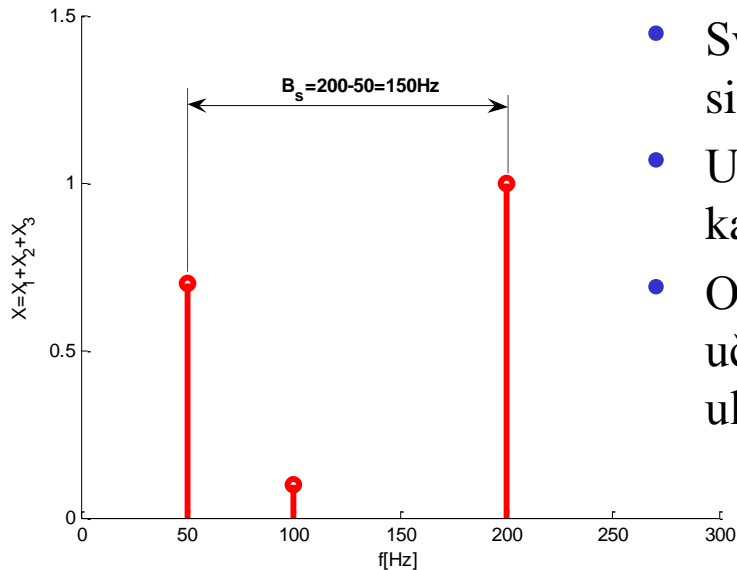
- * Tipične vrednosti:

- $A_p=2 \Rightarrow a=3\text{dB}$; $A_p=4 (A=2) \Rightarrow a=6\text{dB} (a_t=-6\text{dB})$;
- $A_p=0.5 \Rightarrow a=-3\text{dB}$; $A_p=0.25 (A=0.5) \Rightarrow a=-6\text{dB} (a_t=6\text{dB})$;
- $A_p=10 \Rightarrow a=10\text{dB}$; $A_p=100 (A=10) \Rightarrow a=20\text{dB} (a_t=20\text{dB})$;
- $A_p=0.1 \Rightarrow a=-10\text{dB}$; $A_p=0.01 (A=0.1) \Rightarrow a=-20\text{dB} (a_t=20\text{dB})$.

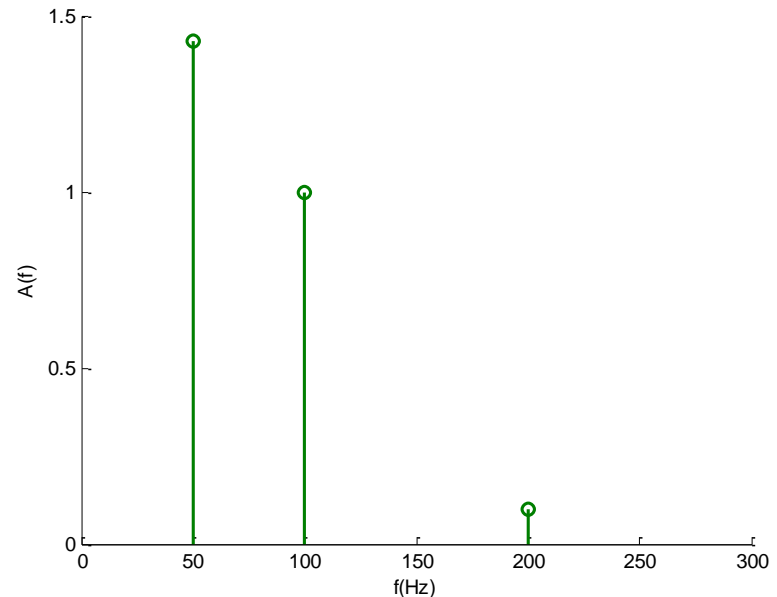
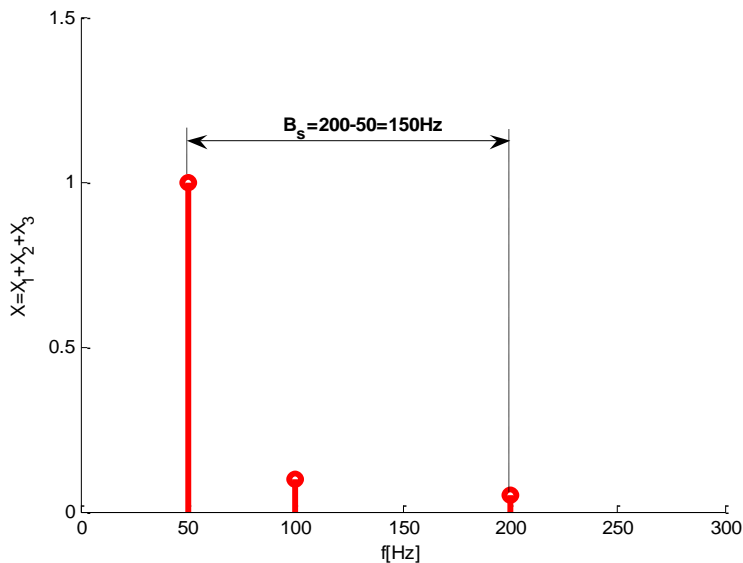
Uvod u linearne sisteme - spektar

- * **Ako spektar signala pobude ima komponente na učestanostima f_1, f_2, \dots, f_N , tada se komponente u spektru signala odziva mogu pojaviti samo na ovim istim učestanostima!**
- * **Za svaku komponentu u spektru (na učestanosti f_i) može se odrediti pojačanje i promena faznog stava koje unosi sistem za prenos, da bi se od pobudnog signala dobio signal koji predstavlja odziv.**
- * **Unapred se ne zna da li će na ulaz sistema biti doveden periodičan signal (diskretan spektar - komponente na samo nekim učestanostima) ili aperiodičan signal (kontinualan spektar - komponente na svim učestanostima)**
- * **Zato treba odrediti pojačanje i promenu faze na bilo kojoj učestanosti f**
 - * Pojačanje linearnog sistema na učestanosti f obeležava se sa $A(f)$ i definiše kao odnos amplituda komponenata odziva i pobude koje se nalaze na toj učestanosti tj. $A(f) = Y(f)/X(f)$.
 - * Fazni pomeraj koji unosi linearni sistem na učestanosti f_i obeležava se sa $\chi(f_i)$ i definiše kao razlika faza odziva i pobude koje se nalaze na toj učestanosti tj. $\chi(f) = \theta_y(f) - \theta_x(f)$.

Amplitudska karakteristika sistema



- Sve ovo se mnogo lakše vidi ako se uporede spektri signala na ulazu i izlazu sistema.
- U ovom slučaju nije bilo promene faznog stave, pa fazna karakteristika nije ni prikazana.
- Ovako se dobija pojačanje sistema na onim učestanostima na kojim postoje komponente signala sa ulaza. Koliko je pojačanje na drugim učestanostima?



Prenosna funkcija linearnog sistema

- * Oblik spektra:



- * Ako se **funkcija prenosa** linearnog sistema označi sa $H(jf)$, tada se može pisati izraz:

$$Y(jf) = H(jf)X(jf)$$

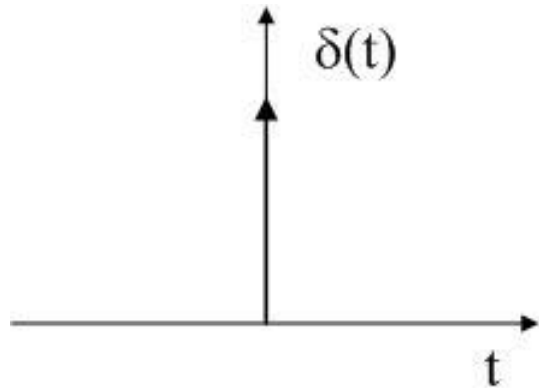
- * Funkcija prenosa sistema može se rastaviti na amplitudsku i faznu karakteristiku.
- * Amplitudska karakteristika $A(f)$ određuje pojačanje, a fazna karakteristika $\chi(f)$ - promenu faze pobudne komponente na proizvoljnoj učestanosti f .

$$H(jf) = A(f)e^{j\chi(f)}$$

- * Funkcija prenosa je isključivo karakteristika sistema za prenos i ni na koji način ne zavisi od pobude ili odziva!
 - Ipak, ona se ne može odrediti ako na ulazu nemamo nikakvu pobudu!
 - Kakva pobuda je optimalna (poželjno da to bude aperiodičan signal)?

Delta impuls

- * Impuls izuzetno kratkog trajanja i teorijski beskonačno velike amplitude, ali tako da njegova površina ima jediničnu vrednost.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- * Furijeova transformacija funkcije $\delta(t)$ jednaka je konstanti, koja pritom ima jediničnu vrednost.
- * Zato je spektar Delta impulsa (aperiodičan signal) kontinualan i definisan na svim učestanostima.
 - Pritom je amplitudski spektar jednak jedinici a na svakoj učestanosti je početni fazni stav jednak nuli.
 - Spektar Delta impulsa je kontinualan, ravan i beskonačno širok!

$$\Delta(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

Impulsni odziv linearnog sistema

- * **Impulsni odziv** predstavlja odziv sistema na pobudu delta impulsom:



- * **Spektar signala na izlazu je tada jednak funkciji prenosa sistema:**

$$Y(jf) = X(jf)H(jf) = \Delta(jf)H(jf) = H(jf)$$

- Ako se na ulaz sistema dovede Delta impuls a na izlaz priključi spektralni analizator, na njemu se može očitati prenosna funkcija sistema.
 - Sličan rezultat se dobija ako se na ulaz dovede pravougaoni impuls kratkog trajanja.
- * **Izraz za impulsni odziv zavisi samo od prenosne funkcije:**
 - Ako se na ulaz sistema dovede Delta impuls, a na izlaz priključi osciloskop (jednostavniji uređaj!), na njemu se može očitati impulsni odziv sistema.
 - Furijeovom transformacijom impulsnog odziva može se dobiti $H(jf)$ i obrnuto:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(jf) e^{j2\pi ft} df$$

Kako opisati signal na izlazu?

* **Spektar signala na izlazu** sistema za prenos jednak je proizvodu spektra ulaznog signala i funkcije prenosa sistema

- Da bi ga odredili potrebno je poznavati spektar signala na ulazu (karakteristika signala koji se prenosi) i funkciju prenosa (karakteristika sistema za prenos).

$$Y(jf) = X(jf)H(jf)$$

* **Signal na izlazu sistema** za prenos jednak je konvoluciji ulaznog signala i impulsnog odziva

- Da bi odredili vremenski oblik izlaznog signala treba poznavati vremenski oblik ulaznog signala koji treba preneti i impulsni odziv sistema (karakteristika sistema za prenos).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Idealan sistem za prenos (vremenski domen)

- * Signal sa ulaza ne sme biti izobličen, tj. u veoma sličnom obliku treba da se pojavi na izlazu:
 - Amplituda mu je promenjena (pojačanje ne mora biti jedinično, dovoljno je da je konstantno tj. isto na svakoj učestanosti)
 - Zakašnjen je u vremenu (kašnjenje ne mora biti nula, tj. odziv se ne mora pojaviti u istom trenutku kada i pobuda)



$$y(t) = Ax(t - t_0)$$

Idealan sistem za prenos (frekvencijski domen)

* Spektar signala na izlazu je tada

$$\begin{aligned} Y(jf) &= \int_{-\infty}^{\infty} Ax(t-t_0)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ax(\tau)e^{-j2\pi f(t_0+\tau)} d\tau \\ &= Ae^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau = Ae^{-j2\pi f t_0} X(jf) \end{aligned}$$

* Prenosna funkcija idealnog sistema:

- Pojaćanje je konstantno na svim učestanostima
- Fazna karakteristika je linearna funkcija učestanosti
- Konstanta t_0 koja određuje nagib krive fazne karakteristike određuje kašnjenje pri prenosu kroz ovaj sistem!

$$H(jf) = \frac{Y(jf)}{X(jf)} = Ae^{-j2\pi f \times t_0}$$

$$\begin{aligned} A(f) &= A = const. \\ \chi(f) &= -2\pi t_0 \times f \pm n\pi \end{aligned}$$

Idealan sistem za prenos - primer

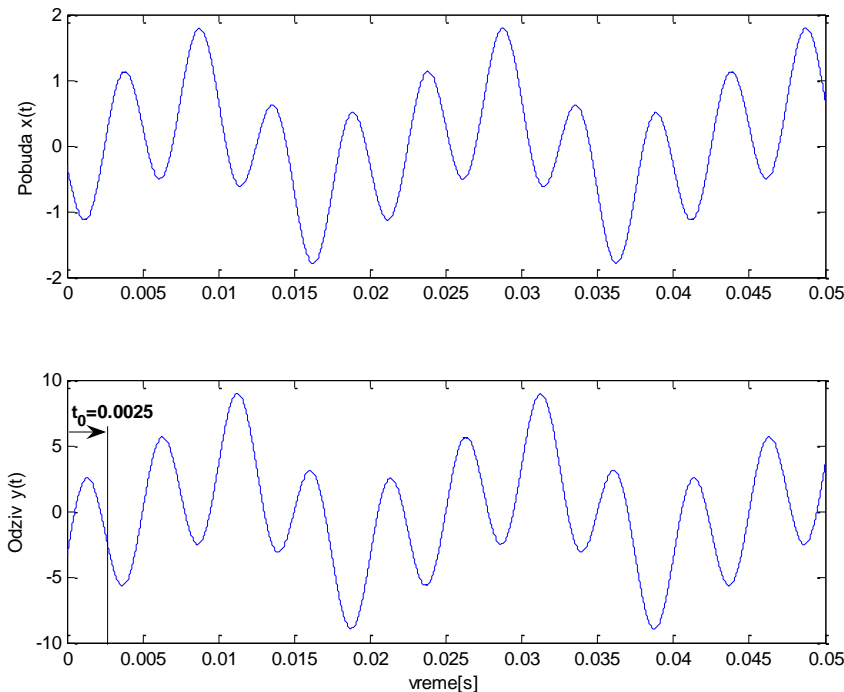
* Primer:

$$x(t)=0.2*\sin(2*\pi*100*t)+\sin(2*\pi*200*t)+0.7*\sin(2*\pi*50*t)$$

$$y(t)=\sin(2*\pi*100*t-\pi/2)+5*\sin(2*\pi*200*t-\pi)+3.5*\sin(2*\pi*50*t-\pi/4)$$

* Pojačanje na pojedinim učestanostima

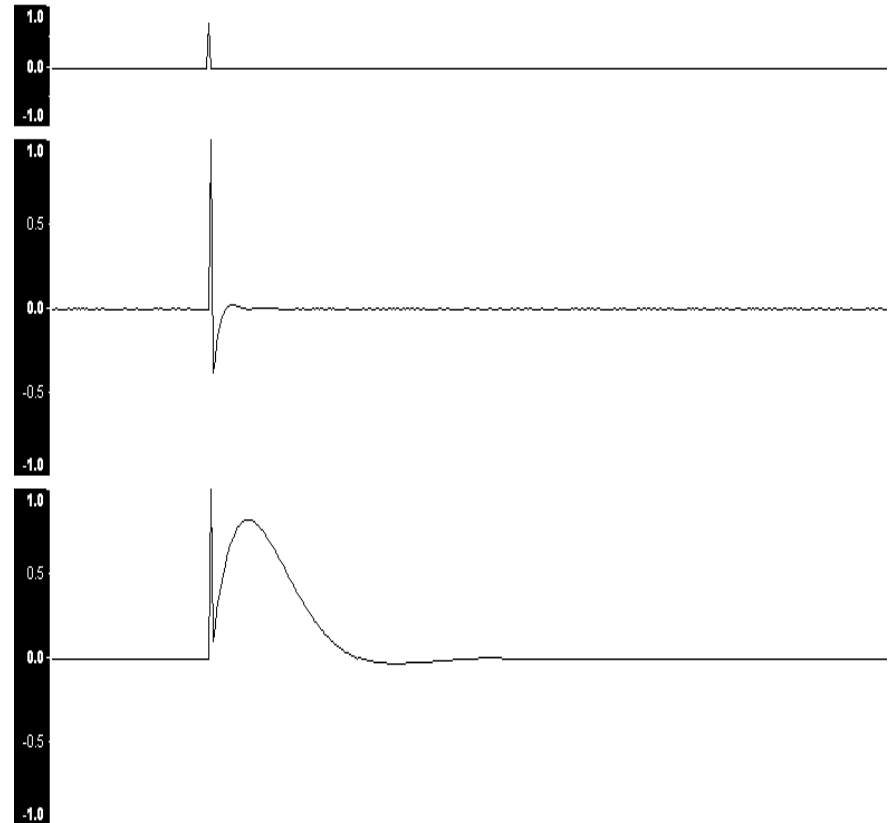
- amplituda svake komponente pojačana 5 puta - $A(50\text{Hz})=A(100\text{Hz})=A(200\text{Hz})=5$
- fazni stav svake komponente smanjuje se za $\pi/4*(f[\text{Hz}]/50)=2\pi*f[\text{Hz}]/400$ pa je grupno kašnjenje u ovom slučaju $t_0=1/400=0.0025\text{s}$.



Realan sistem za prenos - primer

- * Da bi sistem za prenos bio idealan:
 - **Amplitudska karakteristika funkcije prenosa mora biti konstantna na svim učestanostima** (ovo dovodi do iste promene amplitude svih spektralnih komponenti signala koji se prenosi!).
 - **Fazna karakteristika funkcije prenosa mora biti linearna na svim učestanostima** (što dovodi samo do kašnjenja signala na izlazu sistema u poređenju sa onim na ulazu!).
 - **Kada se na ulazu pojavi Delta impuls, na izlazu bi trebalo da se pojavi pojačan/oslabljen i zakašnjen za t_0 (ali ne i razliven) Delta impuls.**

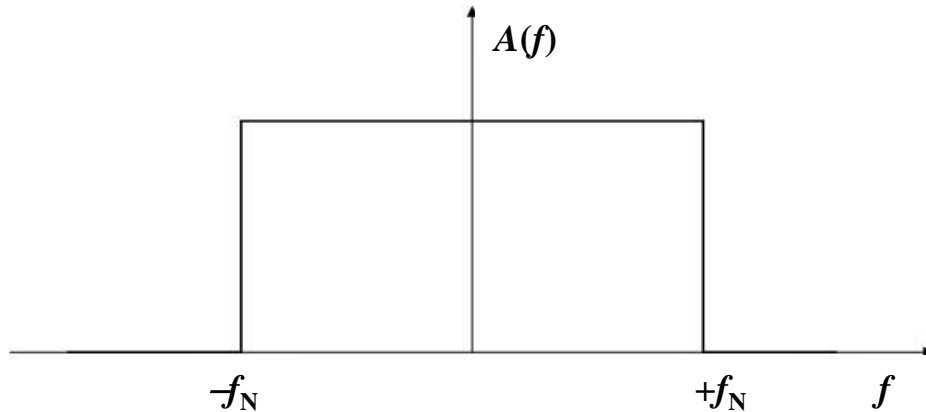
- **Realan sistem (pobuda i impulsni odziv tipičnog audio sistema):**



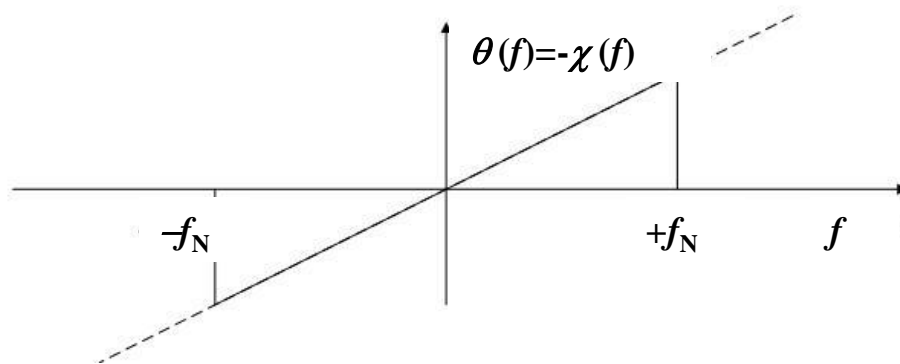
Idealni filter propusnik niskih učestanosti (NF filter)

* **NF filter** propušta samo deo spektra signala sa ulaza koji se nalazi ispod granične učestanosti f_N

- Naziva se i LP filter (*low pass filter*).
- Kada $f_N \rightarrow \infty$, filter postaje idealan sistem prenosa.



$$H(jf) = Ae^{-j2\pi f \cdot t_0}, \quad |f| \leq f_N$$
$$H(jf) = 0, \quad |f| > f_N$$



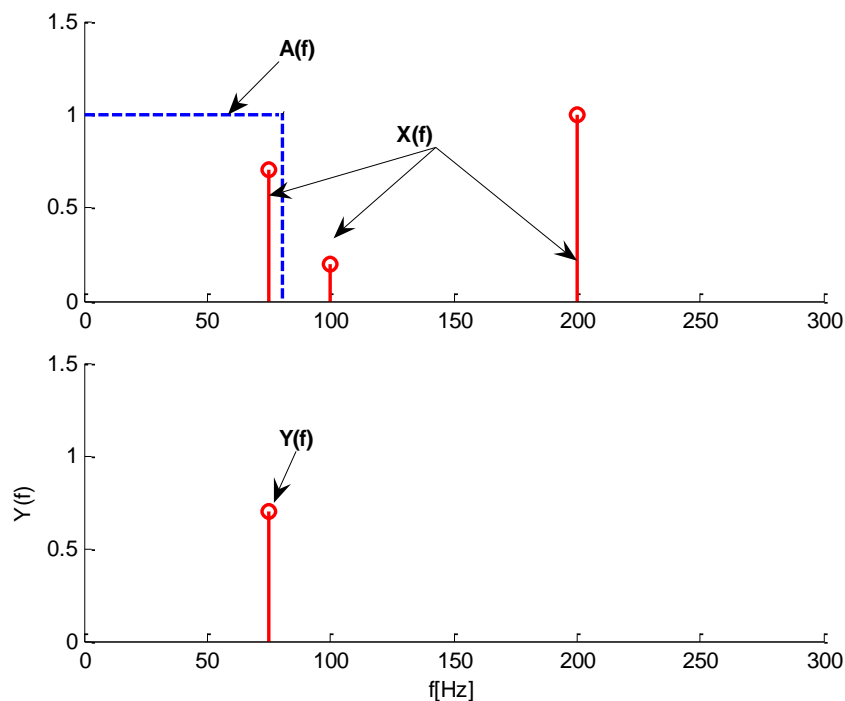
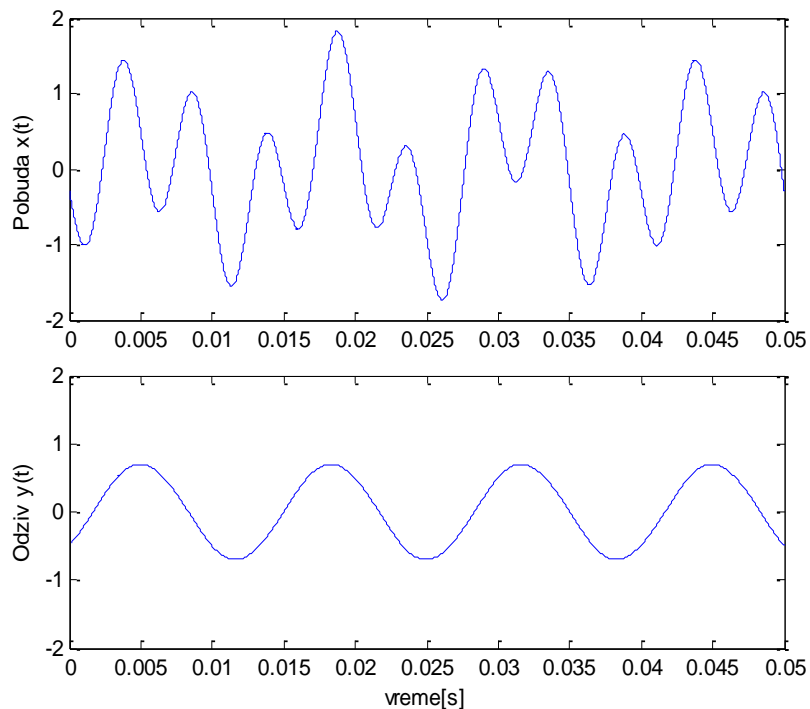
Idealni NF filter – primer 1 (zbir tri prostoperiodična)

* Primer

$$x(t) = 0.2 \cdot \cos(2\pi \cdot 100t) + \cos(2\pi \cdot 200t + \pi/2) + 0.7 \cdot \cos(2\pi \cdot 75t + 5\pi/4)$$

* Signal se filtrira kroz NF filter granične učestanosti jednake 80Hz (pojačanje filtra u propusnom opsegu je $A=1$).

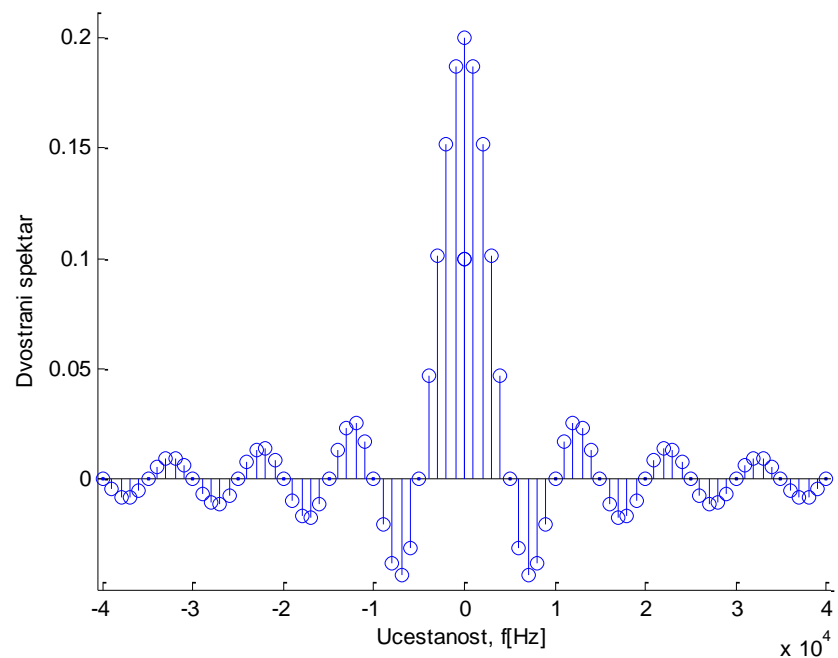
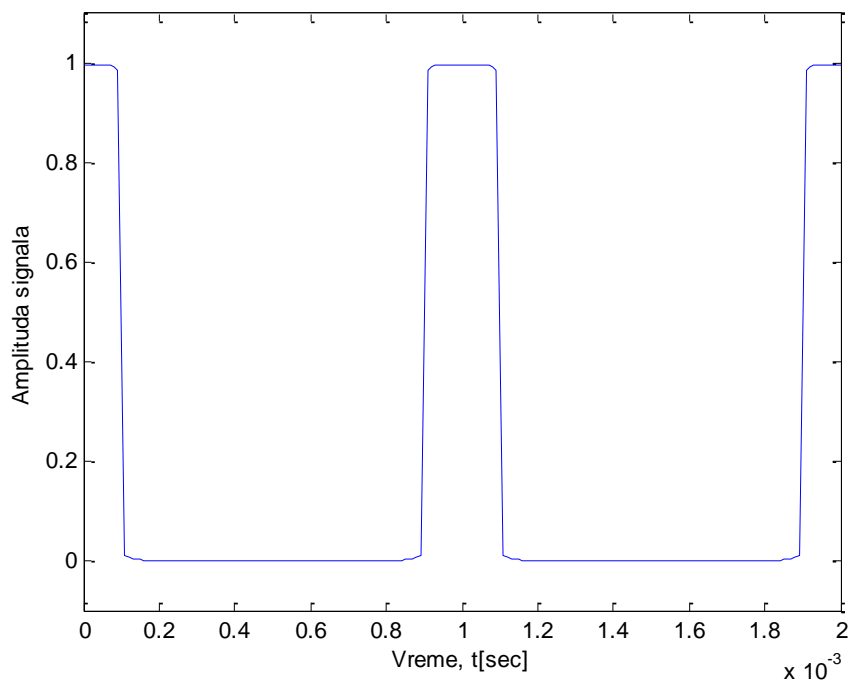
- Na izlazu filtra pojavljuje se samo jedna komponenta amplitude 0.7 na učestanosti 75Hz (preostale dve komponente nisu unutar propusnog opsega filtra).



Idealni NF filter – primer 2 (periodična povorka impulsa)

* Pobudni signal je periodična povorka impulsa:

- Neka su unipolarni impulsi amplitude $U=1\text{V}$, trajanja impulsa $\tau=0.2\text{ms}$ i periode ponavljanja impulsa $T=1\text{ms}$
- Faktor režima je $\tau/T=1/5$, osnovna učestanost $f_0=1/T=1\text{kHz}$, a prva nula u spektru nalazi se na učestanosti $1/\tau=5\text{kHz}$ (poklapa se sa petim harmonikom u spektru!)
- Jednosmerna vrednost signala je $U\tau/T=0.2\text{V}$ (vidi se i iz spektra signala za $f=0!$).

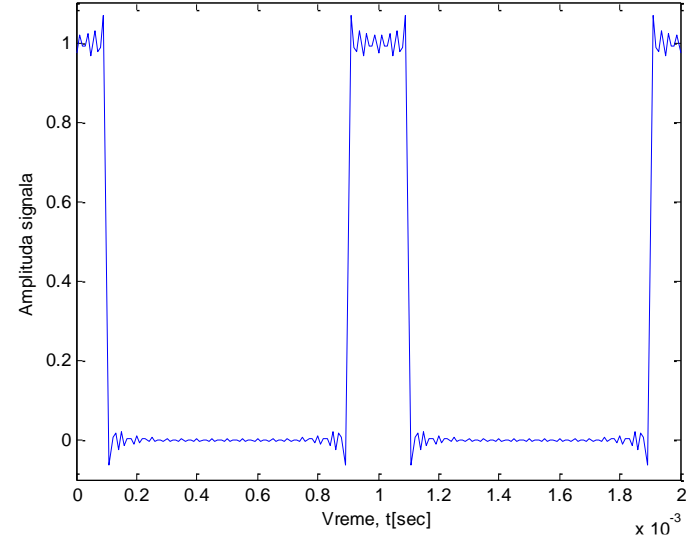
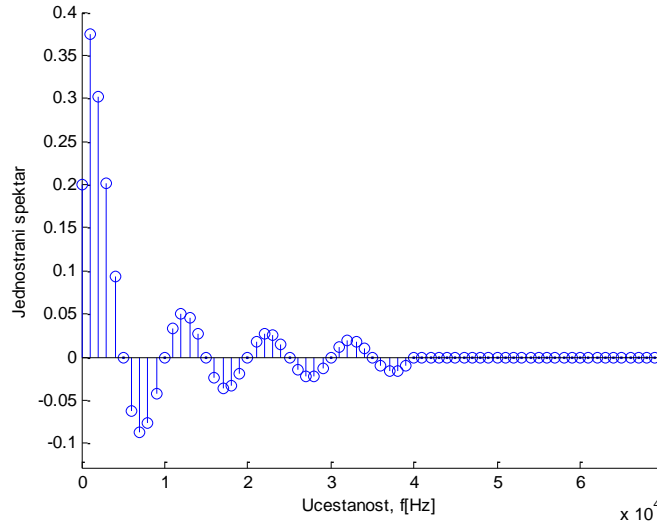


Idealni NF filtar – primer 2 (periodična povorka impulsa)

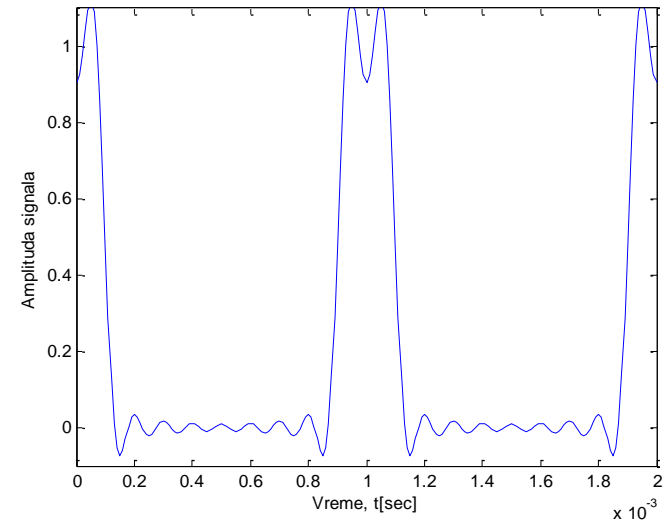
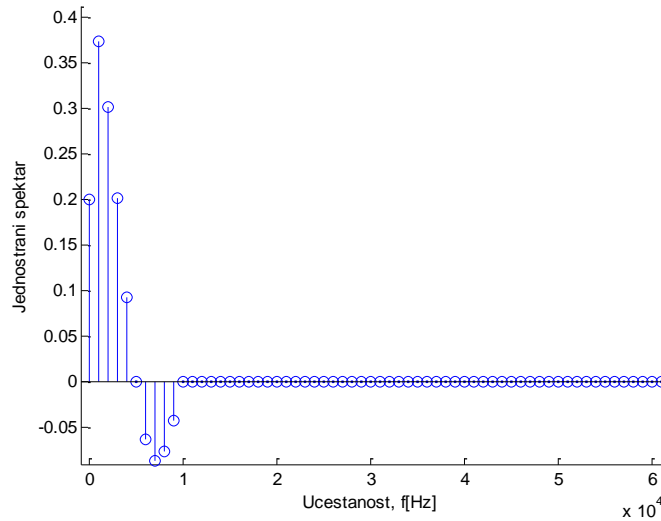
* Jednostrani spektar:

* Vreme:

$f_N = 40\text{kHz}$



$f_N = 10\text{kHz}$

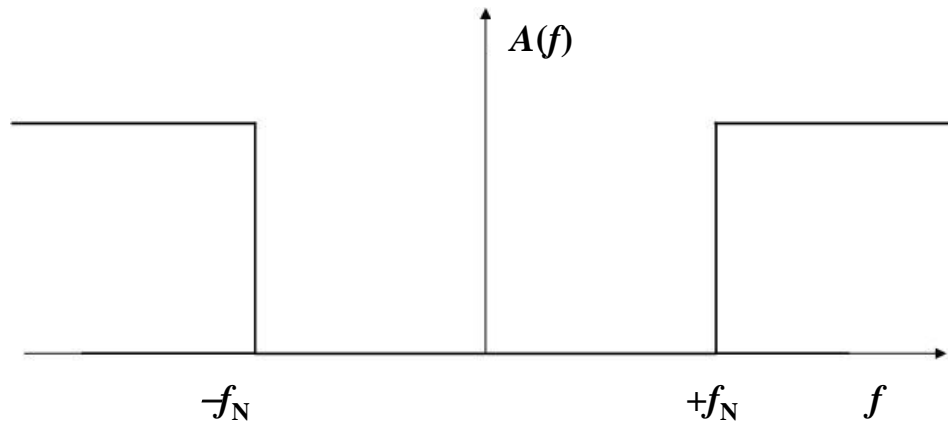


Idealni filter propusnik visokih učestanosti (VF filter)

* **VF filter** propušta samo deo spektra signala sa ulaza koji se nalazi iznad granične učestanosti f_N

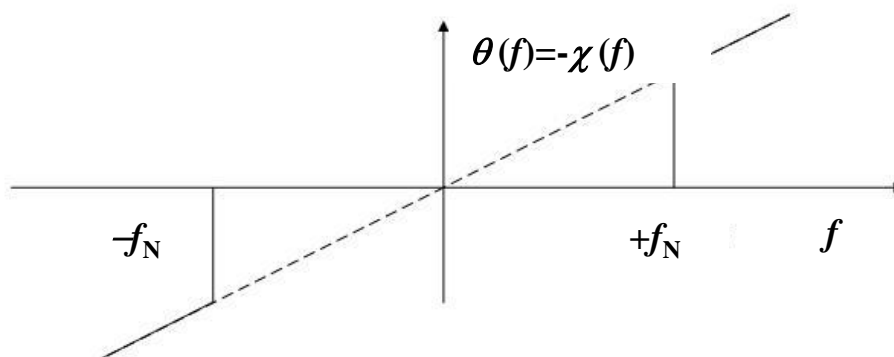
* Naziva se i HP (*high pass filter*).

- Kada je $f_N=0$, filter postaje idealan sistem prenosa.



$$H(jf) = 0, \quad |f| \leq f_N$$

$$H(jf) = Ae^{-j2\pi f \cdot t_0}, \quad |f| > f_N$$



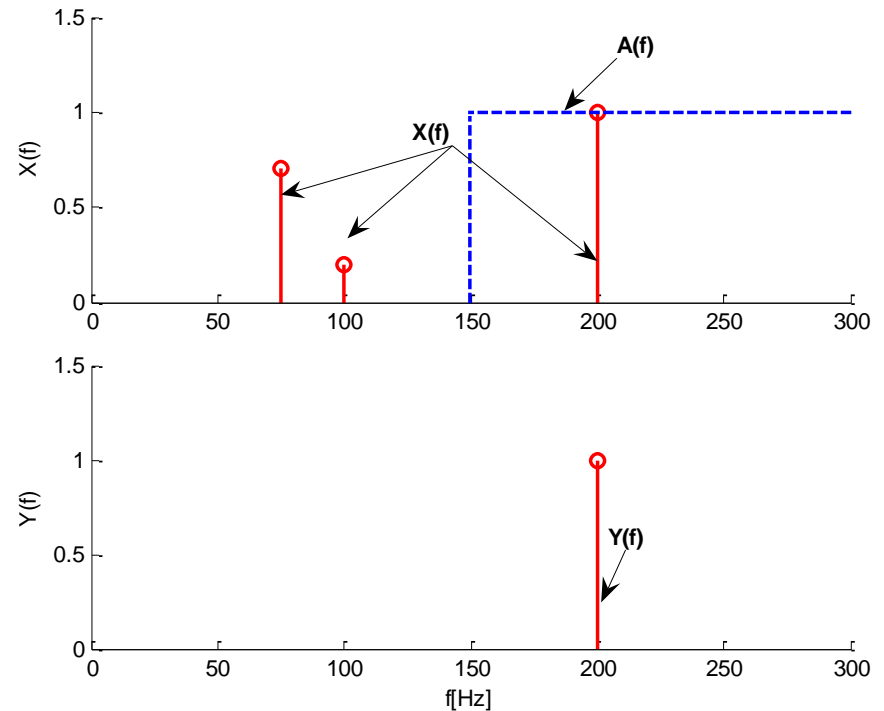
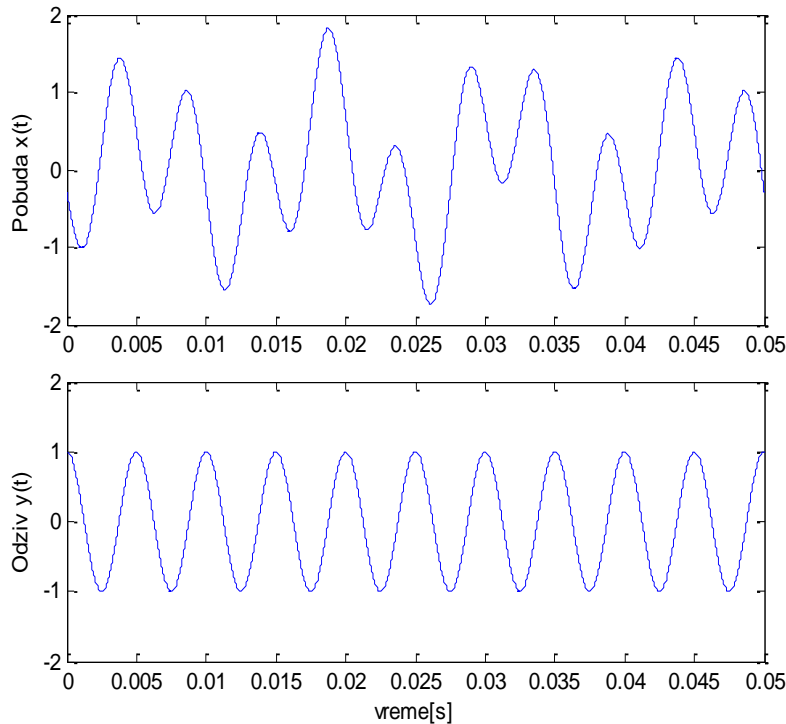
Idealni VF filter – primer 1

* Primer

$$x(t) = 0.2 \cdot \cos(2\pi \cdot 100t) + \cos(2\pi \cdot 200t + \pi/2) + 0.7 \cdot \cos(2\pi \cdot 75t + 5\pi/4)$$

* Signal se filtrira kroz VF filter granične učestanosti 150Hz (pojačanje filtra u propusnom opsegu jednako je $A=1$).

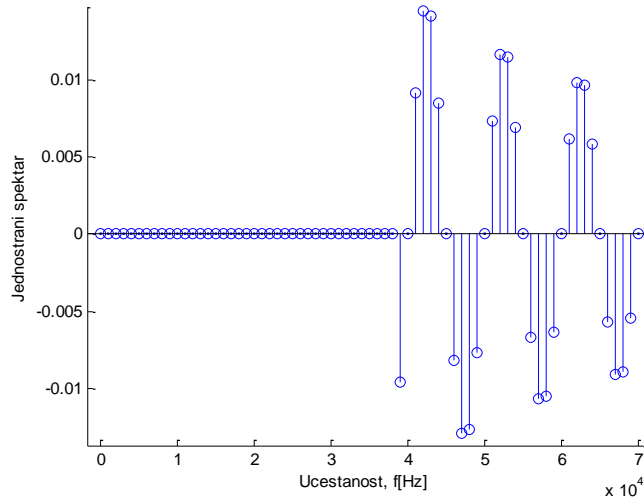
- Na izlazu filtra pojavljuje se samo jedna komponenta amplitude 1 na učestanosti 200Hz (preostale dve nisu unutar propusnog opsega filtra).



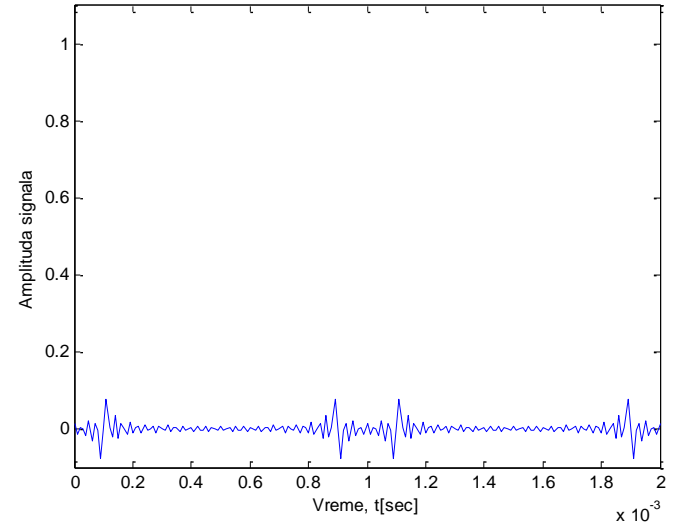
Idealni VF filter – primer 2

- Jednostrani spektar

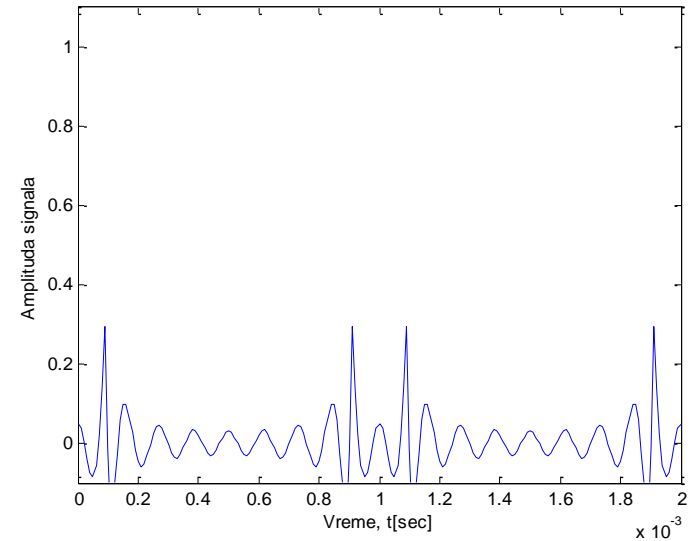
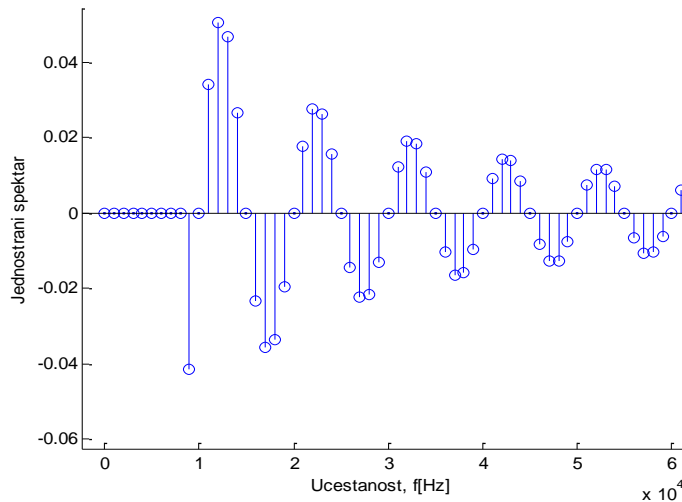
$f_N = 40\text{kHz}$



- Vreme



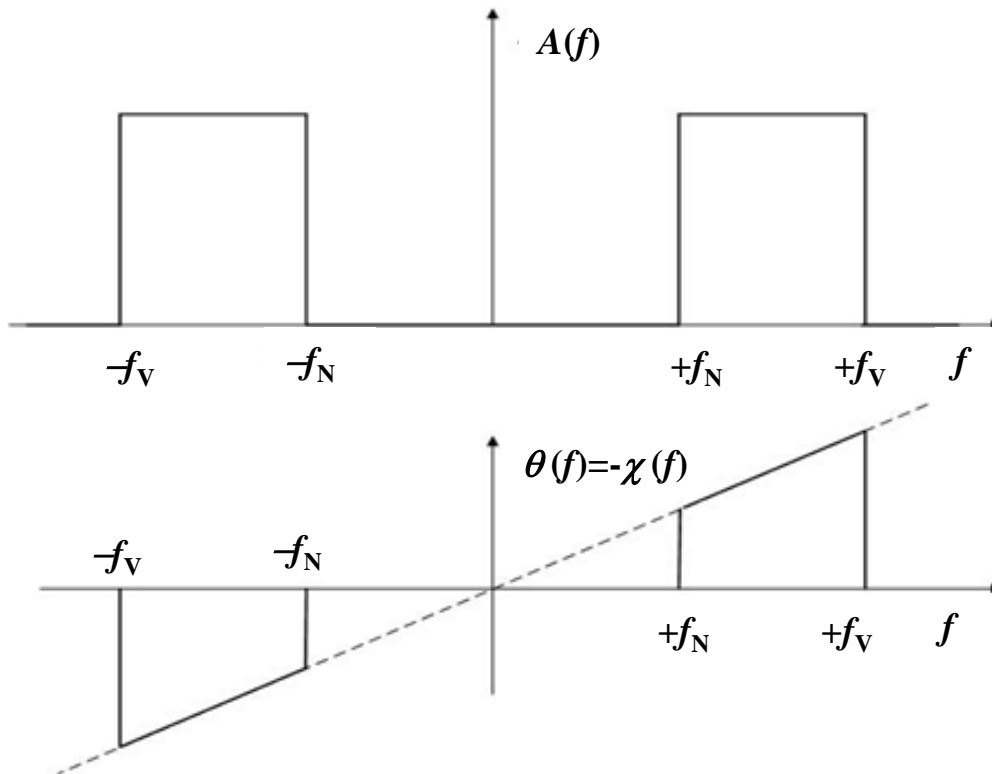
$f_N = 10\text{kHz}$



Filtar propusnik opsega učestanosti

* **Filtar propusnik opsega učestanosti** propušta samo deo spektra ulaznog signala koji se nalazi između graničnih učestanosti f_N i f_V .

- Naziva se i BP (*band pass filter*).
- Kada $f_N=0$ a $f_V \rightarrow \infty$, filter postaje idealan sistem prenosa.



$$H(jf) = 0, \quad |f| \leq f_N$$
$$H(jf) = Ae^{-j2\pi f \times t_0}, \quad f_N < |f| \leq f_V$$
$$H(jf) = 0, \quad |f| > f_V$$

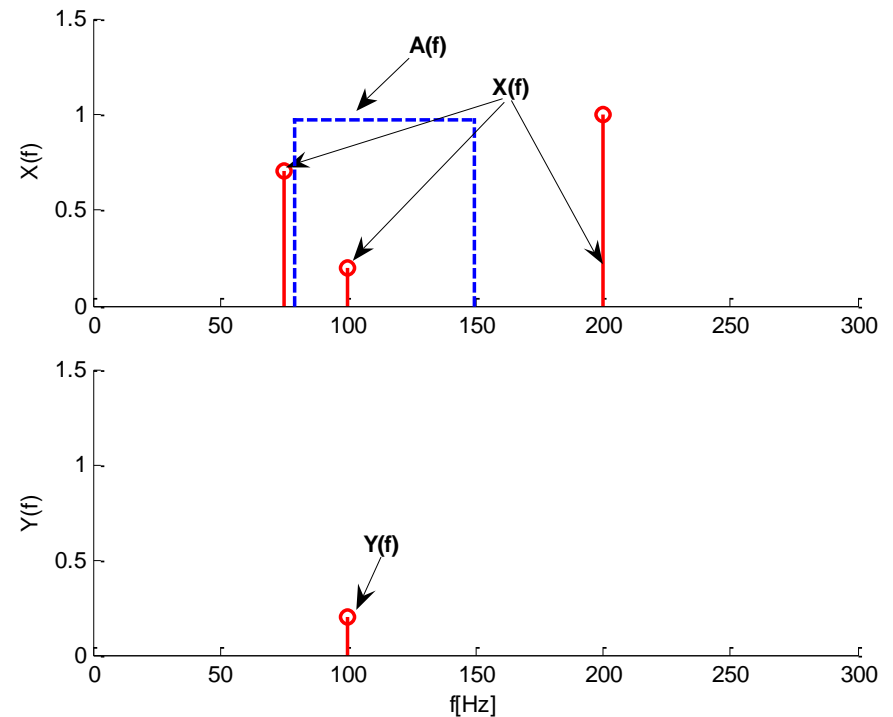
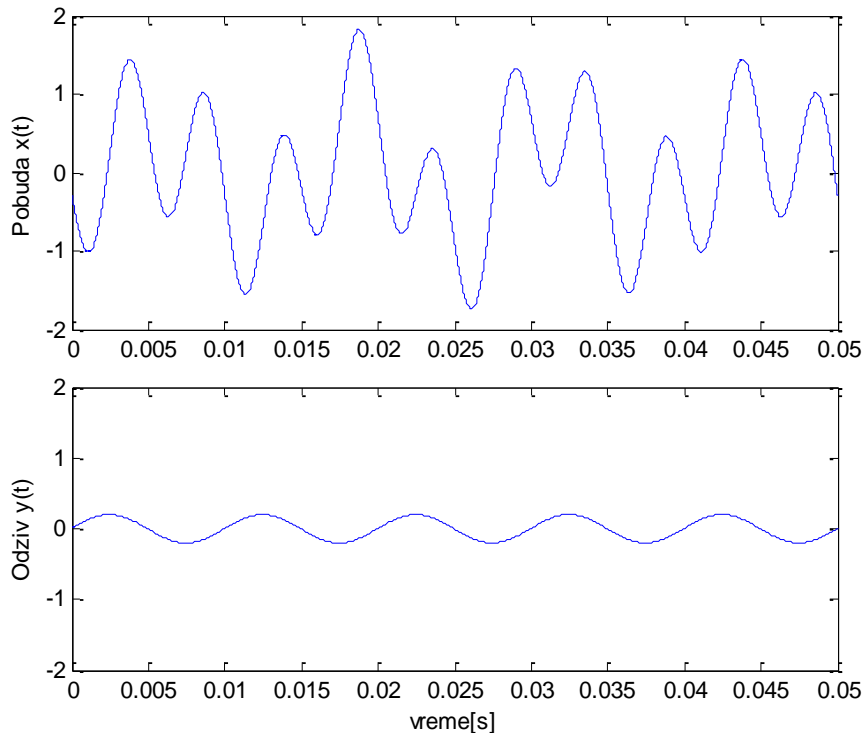
Idealni filter propusnik opsega – primer

* Primer

$$x(t) = 0.2 \cdot \cos(2\pi \cdot 100t) + \cos(2\pi \cdot 200t + \pi/2) + 0.7 \cdot \cos(2\pi \cdot 75t + 5\pi/4)$$

* Signal se filtrira kroz filter propusnik opsega graničnih učestanosti 80Hz i 150Hz (pojačanje filtra u propusnom opsegu je $A=1$).

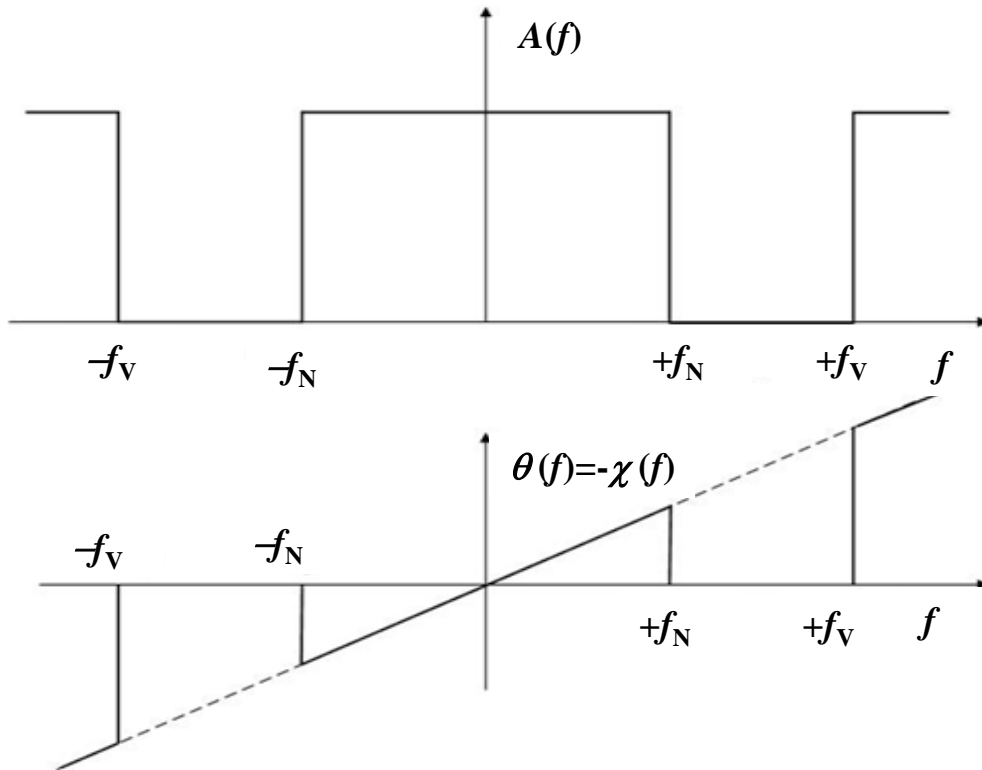
- Na izlazu filtra pojavljuje se komponenta amplitude 0.2 na 100Hz (preostale dve nisu unutar propusnog opsega filtra).



Filtar nepropusnik opsega učestanosti

***Filtar nepropusnik opsega učestanosti** propušta samo deo spektra ulaznog signala koji se nalazi u opsezima $(0, f_N)$ i (f_V, ∞) .

- Naziva se i BS (*band stop filter, notch filter*).
- Kada $f_N = f_V$, filter postaje idealan sistem prenosa.



$$H(jf) = Ae^{-j2\pi f \cdot t_0}, \quad |f| \leq f_N$$
$$H(jf) = 0, \quad f_N < |f| \leq f_V$$
$$H(jf) = Ae^{-j2\pi f \cdot t_0}, \quad |f| > f_V$$

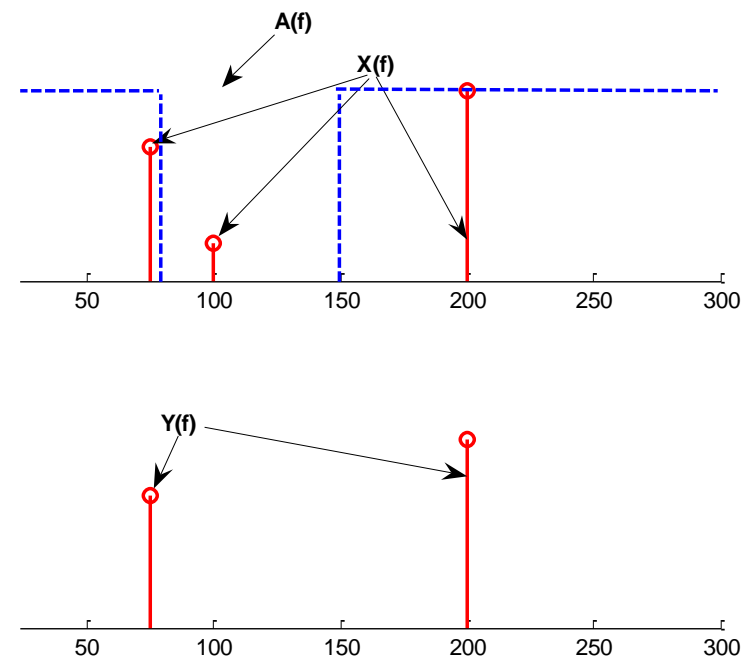
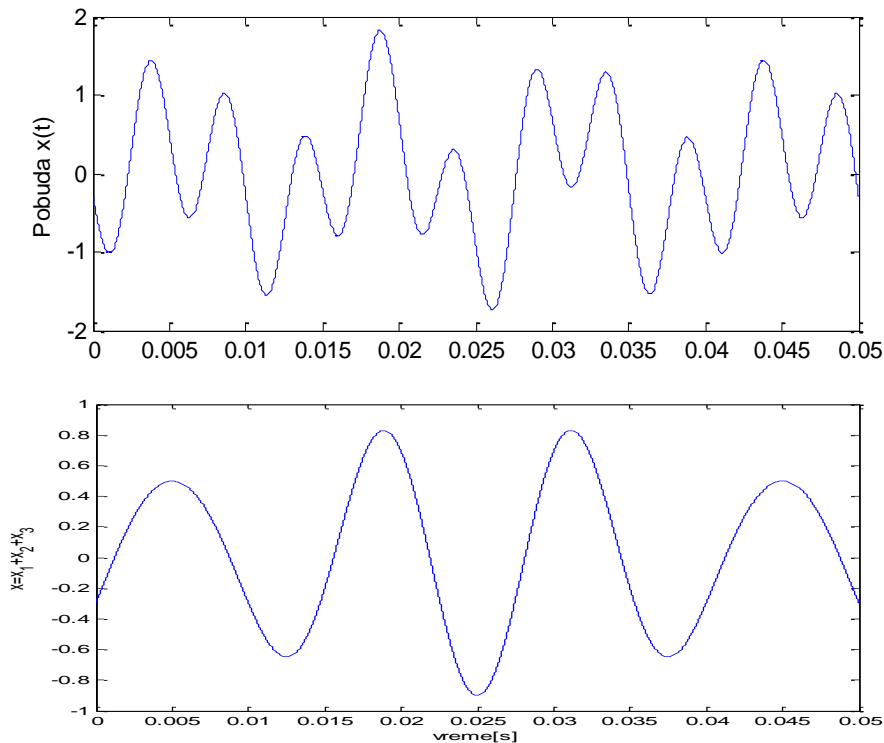
Idealni filter nepropusnik opsega – primer

* Primer

$$x(t) = 0.2 \cdot \cos(2\pi \cdot 100t) + \cos(2\pi \cdot 200t + \pi/2) + 0.7 \cdot \cos(2\pi \cdot 75t + 5\pi/4)$$

* Signal se filtrira kroz filter nepropusnik opsega graničnih učestanosti 80Hz i 150Hz (pojačanje filtra u propusnom opsegu je $A=1$).

- Na izlazu filtra pojavljuju se dve komponente na učestanostima 75Hz i 200Hz (komponenta na učestanosti 100Hz nije unutar propusnog opsega filtra).



Linearni sistemi - pregled

*Najvažnije osobine:

- Odziv bilo kog sistema na Delta impuls je njegov impulsni odziv!
- Furijeova transformacija impulsnog odziva je funkcija prenosa posmatranog sistema.
 - **Spektar signala** na izlazu sistema jednak je proizvodu spektra ulaznog signala i prenosne funkcije sistema.
 - **Signal (njegov vremenski oblik)** na izlazu dobija se kao konvolucija signala na ulazu i impulsnog odziva sistema.
- Filtar propušta samo neke komponente spektra signala na njegovom ulazu (dok ostale “odseca”):
 - **NF filter** – propušta niske učestanosti
 - **VF filter** – propušta visoke učestanosti
 - **Propusnik opsega** – propušta samo jedan (obično relativno uzak) opseg učestanosti
 - **Nepropusnik opsega** – ne propušta samo jedan (obično relativno uzak) opseg učestanosti