



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020.*

Zadatak 1– PCM, kvantizacija (1)

Signal $u(t)$ prenosi se primenom impulsne kodne modulacije, odnosno IKM (engl. *PCM, Pulse Coded Modulation*).

Raspodela amplituda odbiraka signala $u(t)$ je uniformna u intervalu $[-8, +8]$ V. Odbirci signala dovode se na ulaz ravnomernog kvantizera sa $q=8$ nivoa.

- a) Odrediti vrednosti koraka kvantizacije, kvantizacionih nivoa i maksimalnu vrednost greške kvantizacije. Nacrtati karakteristiku kvantizacije.
- b) Za sledeći niz odbiraka ulaznog signala odrediti vrednosti odbiraka na izlazu kvantizatora: $+2.3, -4.2, +0.8, +3.6, -7.3$ [V].
- c) Pod pretpostavkom da se odbirci koduju prostim binarnim kodom, počev od najniže kvantizacione vrednosti (000 za najniži kvantizacioni nivo, 111 za najviši kvantizacioni nivo), odrediti odgovarajuće vrednosti niza bita na izlazu PCM koda, za zadati niz odbiraka na ulazu kvantizera iz tačke b).
- d) Izračunati odnos snage signala i snage šuma kvantizacije. Dobijenu vrednost izraziti u decibelima (dB).

Zadatak 1 – PCM, kvantizacija (2)

Rešenje:

Vrednosti amplituda odbiraka koje dolaze na ulaz u kvantizer nalaze se u opsegu od $U_{\min} = -U/2$ do $U_{\max} = +U/2$, odnosno u intervalu $[-U/2, +U/2] = [-8, +8]$.

Ovaj interval amplituda deli se na $q=8$ kvantizacionih intervala.

Korak kvantizacije je

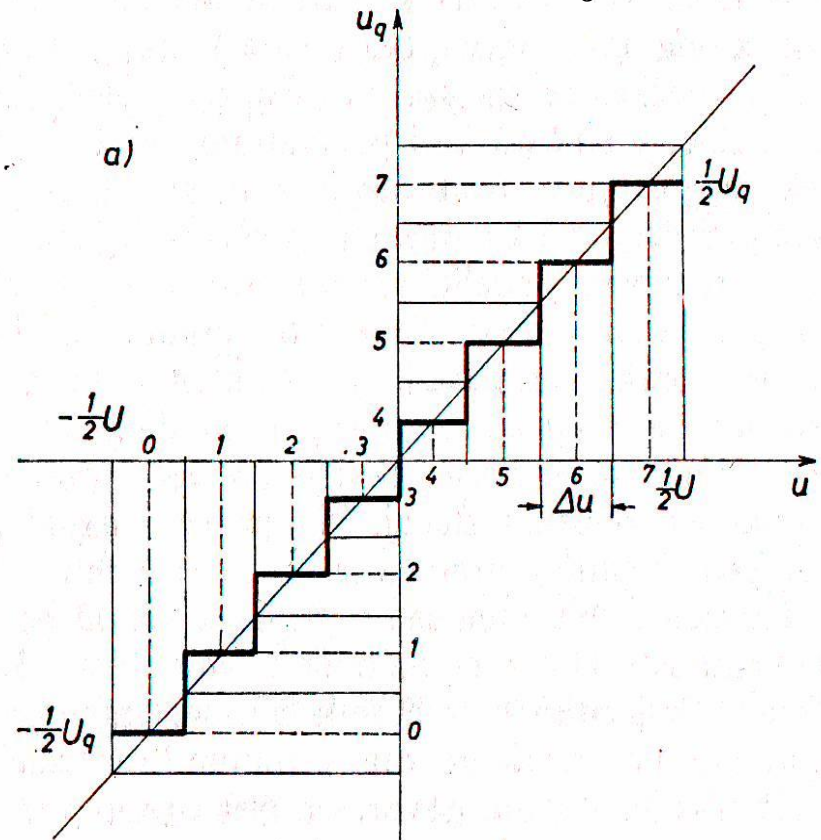
$$\Delta u = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{q} = \frac{U/2 - (-U/2)}{q}$$

$$\Delta u = \frac{U}{q} = \frac{8 - (-8)}{8} = 2$$

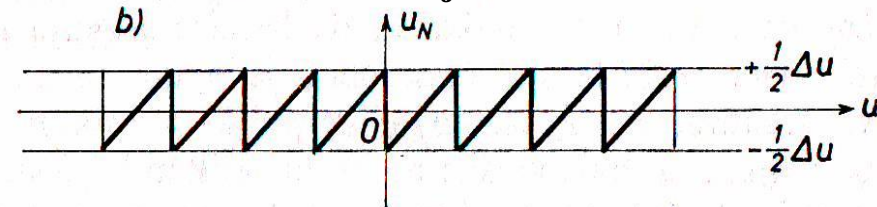
Maksimalna vrednost greške kvantizacije jednaka je

$$\frac{\Delta u}{2} = 1$$

Karakteristika kvantizacije



Greška kvantizacije



Zadatak 1 – PCM, kvantizacija (3)

Odbirci signala koji dolaze na ulaz u kvantizer, a čije se vrednosti amplitude nalaze unutar i -tog kvantizacionog intervala $\{U_{di}, U_{gi}\}$, na izlazu kvantizera imaju vrednost amplitude jednaku i -tom kvantizacionom nivou $U_{qi} = (U_{di} + U_{gi})/2$.

Kvantizacija je ravnomerna i širina svakog intervala kvantizacije jednaka je $\Delta u = 2V$. Razlika susednih kvantizacionih nivoa jednaka je Δu .

$$\{U_{d0}, U_{g0}\} \in \{-8, -6\} \Rightarrow U_{q0} = -U_{\min} + \Delta u / 2 = -8 + 1 = -7$$

$$\{U_{d1}, U_{g1}\} \in \{-6, -4\} \Rightarrow U_{q1} = -U_{\min} + \Delta u + \Delta u / 2 = -8 + 1 + 2 = -5$$

$$\{U_{d2}, U_{g2}\} \in \{-4, -2\} \Rightarrow U_{q2} = -U_{\min} + 2\Delta u + \Delta u / 2 = -8 + 4 + 1 = -3$$

$$\{U_{d3}, U_{g3}\} \in \{-2, 0\} \Rightarrow U_{q3} = -U_{\min} + 3\Delta u + \Delta u / 2 = -8 + 6 + 1 = -1$$

$$\{U_{d4}, U_{g4}\} \in \{0, +2\} \Rightarrow U_{q4} = -U_{\min} + 4\Delta u + \Delta u / 2 = -8 + 8 + 1 = +1$$

$$\{U_{d5}, U_{g5}\} \in \{+2, +4\} \Rightarrow U_{q5} = -U_{\min} + 5\Delta u + \Delta u / 2 = -8 + 10 + 1 = +3$$

$$\{U_{d6}, U_{g6}\} \in \{+4, +6\} \Rightarrow U_{q6} = -U_{\min} + 6\Delta u + \Delta u / 2 = -8 + 12 + 1 = +5$$

$$\{U_{d7}, U_{g7}\} \in \{+6, +8\} \Rightarrow U_{q7} = -U_{\min} + 7\Delta u + \Delta u / 2 = -8 + 14 + 1 = +7$$

Vrednosti kvantizacionih nivoa mogu se napisati i u obliku

$$U_{qi} = \left\{ \pm \frac{\Delta u}{2}, \pm \frac{3\Delta u}{2}, \pm \frac{5\Delta u}{2}, \pm \frac{7\Delta u}{2} \right\} = \{\pm 1V, \pm 3V, \pm 5V, \pm 7V\}$$

Zadatak 1 – PCM, kvantizacija (4)

c)

Opseg vrednosti odbiraka signala na ulazu u kvanizer	Vrednost odbirka signala na izlazu kvanizera	Kodna reč (primenjen prost binarni kod)
$\{-8, -6\}$	$U_{q0}=-7$	000
$\{-6, -4\}$	$U_{q1}=-5$	001
$\{-4, -2\}$	$U_{q2}=-3$	010
$\{-2, 0\}$	$U_{q3}=-1$	011
$\{0, 2\}$	$U_{q4}=1$	100
$\{2, 4\}$	$U_{q5}=3$	101
$\{4, 6\}$	$U_{q6}=5$	110
$\{6, 8\}$	$U_{q7}=7$	111

Zadatak 1 – PCM, kvantizacija (5)

Na osnovu prethodno prikazane tabele dobijaju se sledeće vrednosti:

vrednosti odbirka ulazu kvantizera	+2.3	-4.2	+0.8	+3.6	-7.3
vrednosti odbirka izlazu kvantizera	+3	-5	+1	+3	-7
niz bita na izlazu koderu	101	001	100	101	000

Zadatak 1 – PCM, kvantizacija (6)

d) Srednja snaga signala na ulazu u kvantizer

$$P_s = \frac{U^2}{12} = \frac{16^2}{12} = \frac{64}{3}$$

Srednja snaga šuma kvantizacije

$$P_{qN} = \overline{u_N^2} = \frac{(\Delta u)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Odnos signal/šum kvantizacije

$$\left(\frac{S}{N_q} \right) = \frac{P_s}{P_{qN}} = \frac{U^2}{12} / \frac{(\Delta u)^2}{12} = \left(\frac{U}{\Delta u} \right)^2$$

$$\left(\frac{S}{N_q} \right) = q^2 = 8^2 = 64$$

Vrednost odnosa signal/šum kvantizacije prikazana u decibelima

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10 \log_{10}(q^2) = 20 \log_{10}(q) = 20 \log_{10}(2^n) = 20n \times \log_{10} 2$$

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10 \log_{10} 64 = 18 \text{ dB}$$

Zadatak 2 – binarni protok PCM signala (1)

Signal $u(t)$ prenosi se primenom impulsne kodne modulacije. Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=10\text{kHz}$.

a) Odrediti minimalan protok PCM signala, koji se dobija za minimalnu učestanost odabiranja signala $u(t)$, ako je primenjena ravnomerna kvantizacija sa $q=256$ nivoa.

b) Izračunati vrednost protoka PCM signala, ukoliko je učestanost odabiranja signala $u(t)$ za 20% veća od minimalne vrednosti određene teoremom odabiranja, a koristi se ravnomerna kvantizacija sa $q=512$ nivoa.

c) Odrediti protok PCM signala za slučaj kada je primenjena neravnomerna kvantizacija (sa kompresijom signala) sa $q=512$ nivoa, pri čemu je učestanost odabiranja kao u tački b).

d) Koliki kapacitet je potreban za skladištenje digitalizovanog signala u trajanju 60s (za parametre odabiranja i kvantizacije iz tačke b)?

Rešenje:

Minimalna učestanost odabiranja određena je teoremom odabiranja i dvostruko je veća od maksimalne učestanosti u spektru signala $u(t)$

$$f_s = f_{s,\min} = 2f_m = 2 \cdot 10\text{kHz} = 20\text{kHz}$$

Zadatak 2 – binarni protok PCM signala (2)

Protok PCM signala zavisi od učestanosti odabiranja ulaznog signala i broja kvantizacionih nivoa, odnosno

$$V_{PCM} = n \cdot f_s$$

gde je n broj bita koji se koristi za kodiranje kvantizovanog odbirka.

Kako se kvantizacija odbiraka obavlja korišćenjem $q=256$ nivoa, broj bita koji se koriste za kodiranje jednog odbirka (jedna kodna reč) iznosi

$$n = \log_2 q = \log_2 256 = 8 \text{ bita}$$

Binarni protok PCM signala jednak je

$$V_{PCM} = n \cdot f_s = 8 \cdot 20kHz = 160kb / s$$

b) Kada se kvantizacija odbiraka obavlja korišćenjem $q=512$ nivoa, broj bita potrebnih za kodiranje jednog odbirka je veći i iznosi

$$n = \log_2 q = \log_2 512 = 9 \text{ bita}$$

Zadatak 2 – binarni protok PCM signala (3)

Odabiranje signala vrši se učestanošću koje je 20% veće od minimalne vrednosti određene teoremom odabiranja i $f_{sI}=1.2 \times 2 \times 10\text{kHz}=24\text{kHz}$.

Binarni protok PCM signala u ovom slučaju je

$$V_{PCM} = 9 \cdot 24\text{kHz} = 216\text{kb/s}$$

c) Neravnomerna kvantizacija utiče na grešku kvantizacije u svakom od intervala, kao i na ukupnu snagu šuma kvantizacije. Ukoliko se koristi kvantizacija sa $q=512$ nivoa, za kodiranje svakog odbirka koristi se 9 bita pa je protok PCM signala jednak

$$V_{PCM,2} = 9 \cdot 24\text{kHz} = 216\text{kb/s}$$

d) U intervalu trajanja 60s potrebno je sačuvati odgovarajući informaciju o digitalizovanom signalu $u(t)$. Potrebno je sačuvati informaciju o (24000×60) odbiraka od kojih se svaki predstavlja pomoću kodne reči dužine 9 bita, pa je ukupno potrebno

$$(24000 \times 60) \times 9 = 12.96 \times 10^6 \text{ bita}$$

Zadatak 3 – PCM (1)

Na ulaz A/D konvertora realizovanog u formi PCM, dovodi se audio signal maksimalne učestanosti u spektru signala $f_m=20\text{kHz}$, pri čemu se ravnomerna kvanizacija obavlja sa $q=65536$ kvantizacionih nivoa.

- Odrediti minimalnu vrednost binarnog protoka PCM signala,
- Izračunati odnos signal/šum kvantizacije (vrednost izraziti u dB)

Rešenje:

a) Minimalna učestanost odabiranja određena je teoremom odabiranja

$$f_s = 2f_m = 2 \cdot 20\text{kHz} = 40\text{kHz}$$

Ravnomerna kvanizacija obavlja sa $q=65536$ kvantizacionih nivoa, pa je broj bita potreban za predstavljanje jedne kodne reči

$$n = \log_2 q = \log_2 65536 = 16 \text{ bita}$$

Protok PCM signala je

$$V_{PCM} = n \cdot f_s = 16 \cdot 40\text{kHz} = 640\text{kb/s}$$

Zadatak 3 – PCM (2)

b) Odnos Signal/Šum kvantizacije određen je izrazom

$$\left(\frac{S}{N_q} \right) = q^2$$

Odnos Signal/Šum kvantizacije izražen u decibelima iznosi

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10 \log_{10} \left(\frac{S}{N_q} \right)$$

Primenom izraza za odnos signal/šum kvantizacije dobijamo

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10 \log_{10} (q^2) = 20 \log_{10} (q) = 20 \log_{10} (2^n) = 20n \log_{10} 2$$

Broj bita potreban za kodiranje kvantiziranog odbirka jednak je $n=16$, pa je odnos signal/šum kvantizacije (izražen u decibelima)

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 20 \cdot 16 \cdot \log_{10} 2 = 96.3 \text{ dB}$$

Zadatak 4 – PCM, odnos S/N_q (1)

Signal $u(t)$ prenosi se postupkom impulsne kodne modulacije (PCM). Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=20\text{kHz}$. Učestanost odabiranja signala $u(t)$ jednaka je minimalnoj vrednosti određenoj teoremom odabiranja.

Raspodela amplituda signala $u(t)$ je uniformna, a kvantizacija odbiraka je ravnomerna sa $q=2^n$ nivoa.

Zahteva se da odnos signal/šum kvantizacije $[S/N_q]$ bude veći od 60dB.

- Odrediti učestanost odabiranja signala $u(t)$.
- Odrediti minimalan broj bita u kodnoj reči.
- Odrediti protok V_b binarnog signala na izlazu PCM koderu.
- Odrediti protok V_b binarnog signala na izlazu PCM koderu, ukoliko se signal $u(t)$ odabire učestanošću koja je dvostruko veća od minimalno dozvoljene, a za kodovanje kvantiziranih odbiraka koristi se dva bita više od minimalnog broja određenog u a). Odrediti koliko u tom slučaju iznosi odnos signal/šum kvantizacije.

Zadatak 4 – PCM, odnos S/N_q (2)

Rešenje:

a) Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=20\text{kHz}$. Po teoremi odabiranja minimalna vrednost učestanosti odabiranja je $f_s=2f_m=40\text{kHz}$.

b) Odnos Signal/Šum kvantizacije određen je izrazom

$$\left(\frac{S}{N_q} \right) = q^2$$

Odnos Signal/Šum kvantizacije izražen u decibelima iznosi

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10 \log_{10}(q^2) = 20 \log_{10}(q)$$

b) Odnos signal/šum kvantizacije zavisi od broja kvantizacionih nivoa. Zahteva se da odnos signal/ šum kvantizacije bude veći od granične vrednosti jednake 60dB, pa važi

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10 \log_{10}(q^2) = 20 \log_{10}(q) \geq 60\text{dB}$$

Zadatak 4 – PCM, odnos S/N_q (3)

Znači da je potrebno da broj nivoa koji se primenjuje pri kvantizaciji bude veći od neke granične vrednosti.

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10 \log_{10}(q^2) = 20 \log_{10}(q) \geq 60 \text{ dB} \Rightarrow$$
$$q \geq 10^{\left[\frac{S}{N_q} \right] / 20} = 10^{60/20} = 10^3 = 1000$$

Na osnovu proračuna, minimalan broj kvantizacionih nivoa jednak je 1000. Kako se tekstom zadatka zahteva da se koristi broj nivoa koji je oblika $q=2^n$, prvi broj koji ispunjava uslov $q>1000$ i predstavlja stepen broja 2 je broj $q=1024=2^{10}$.

Znači, da bi bio ispunjen uslov da je odnos signal/šum kvantizacije veći od 60dB, minimalan broj kvantizacionih nivoa bi trebalo da bude jednak $q_{min}=1024$. Za kodiranje $q=2^n=1024$ kvantizacionih nivoa potrebno je $n=\log_2(1024)=10$ bita.

Minimalan broj bita za kodiranje jednog odbirka je $n_{min}=10$.

Zadatak 4 – PCM, odnos S/N_q (4)

c) U tački a) je određena učestanost odabiranja $f_s=2f_m=40\text{kHz}$.

Kako se svaki odbirak kodira sa $n_{\min}=10$ bita, protok binarnog PCM signala je

$$V_b=n_{\min}*f_s=10*40\text{kHz}=400\text{kb/s}.$$

d) Ukoliko se signal odabire dvostruko većom učestanošću od minimalno dozvoljene, učestanost odabiranja iznosi $f_{s1}=2*2f_m=2*40\text{kHz}=80\text{kHz}$.

Po uslovu zadatka, svaki odbirak kodira se sa 2 bita više bita od broja određenog u tački b), pa je ukupan broj u ovom slučaju $n=n_{\min}+2=12\text{bita}$.

Protok binarnog PCM signala sada je $V_{b1}=n*f_{s1}=12*80\text{kHz}=960\text{kb/s}$.

Ukupan broj bita za kodiranje je $n=12$, a ukupan broj kvantizacionih nivoa $q=2^n=2^{12}$. Odnos signal/šum kvantizacije je

$$\left[\frac{S}{N_q} \right] = 10\log_{10}(q^2) = 20\log_{10}(q) = 20\log_{10}(2^n) = 20n\log_{10}2 = 72\text{dB}$$

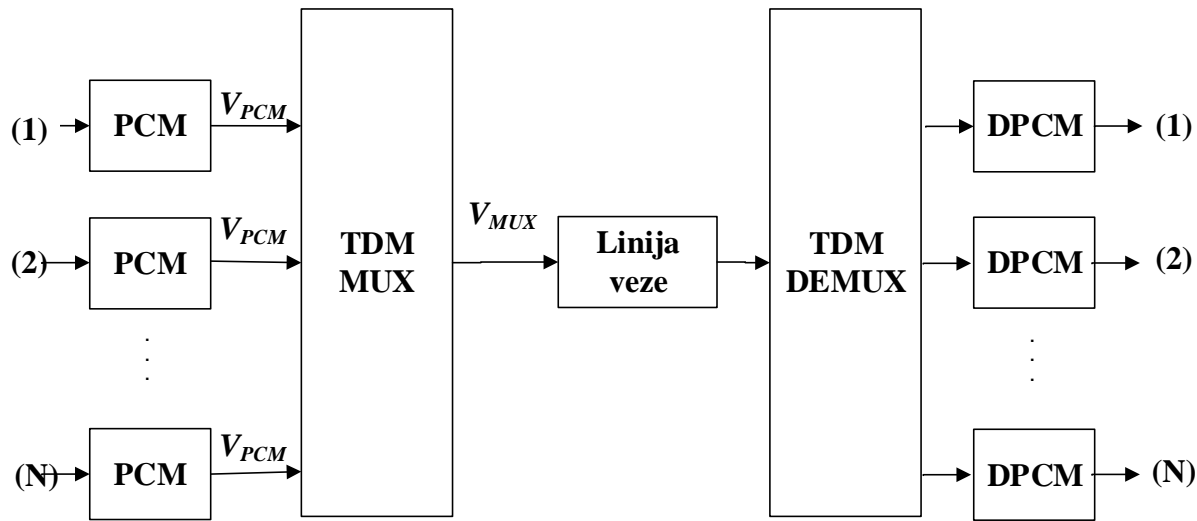
Svaki dodatni bit koji se koristi za kodiranje signala, kroz odgovarajuće povećanje broja kvantizacionih nivoa povećava odnos signal/šum za $20\log_{10}(2)=6\text{dB}$!

Zadatak 5 – PCM+MUX (1)

Ukupan broj od $N=16$ nezavisnih signala prenosi se korišćenjem blok-šeme prikazane na slici. Maksimalna učestanost u spektru svakog signala je $f_m=15\text{kHz}$. Odabiranje ulaznog signala vrši se minimalnom učestanošću određenom teoremom odabiranja, a primenjena je ravnomerna kvantizacija odbiraka ulaznih signala sa $q=512$ nivoa.

U bloku TDM/MUX vrši se vremensko multipleksiranje dolaznog digitalnog signala.

- Odrediti učestanost odabiranja svakog od N signala.
- Odrediti protok V_{PCM} binarnog signala na izlazu iz svakog od PCM blokova.
- Odrediti protok V_{MUX} binarnog multipleksnog signala na liniji veze.



Blok šema, vremensko multipleksiranje N digitalnih signala.

Zadatak 5 – PCM+MUX (2)

a) Maksimalna učestanost u spektru svakog od signala je $f_m=15\text{kHz}$, pa pod pretpostavkom da se odabiranje signala vrši minimalnom učestanošću određenom teoremom odabiranja, učestanost odabiranja iznosi $f_s=2f_m=30\text{kHz}$.

b) Ravnomerna kvantizacija se obavlja sa $q=2^n=512$ nivoa, pa se svaki odbirak signala u koderu predstavlja korišćenjem

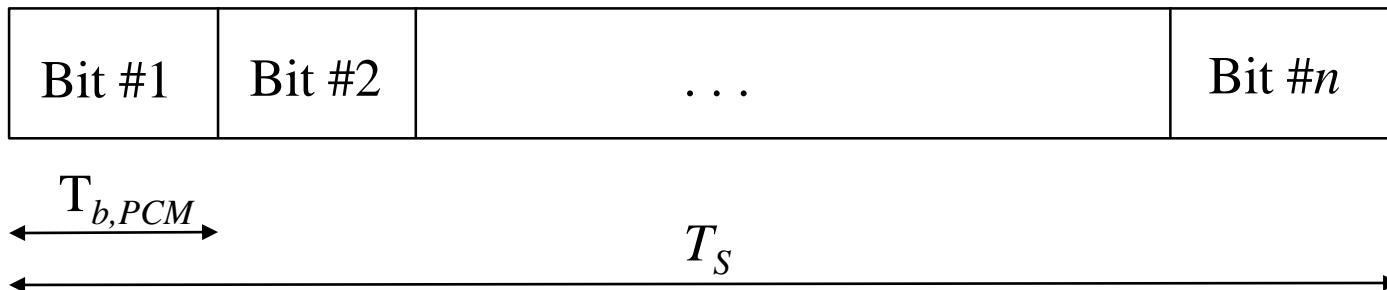
$$n = \log_2 q = \log_2 512 = 9 \text{ bita}$$

Protok binarnog signala na izlazu PCM kodera (za svaki od N kanala) je

$$V_{PCM} = n \cdot f_s = 9 \cdot 30\text{kHz} = 270 \text{ kb/s}$$

Trajanje jednog bita u PCM kodnoj reči $T_{b,PCM}$ (trajanje signalizacionog interval, tj. vreme za prenos jednog bita u PCM kodnoj reči) iznosi

$$T_{b,PCM} = 1/V_{PCM} = T_s/n = 3.7 \mu\text{s}$$



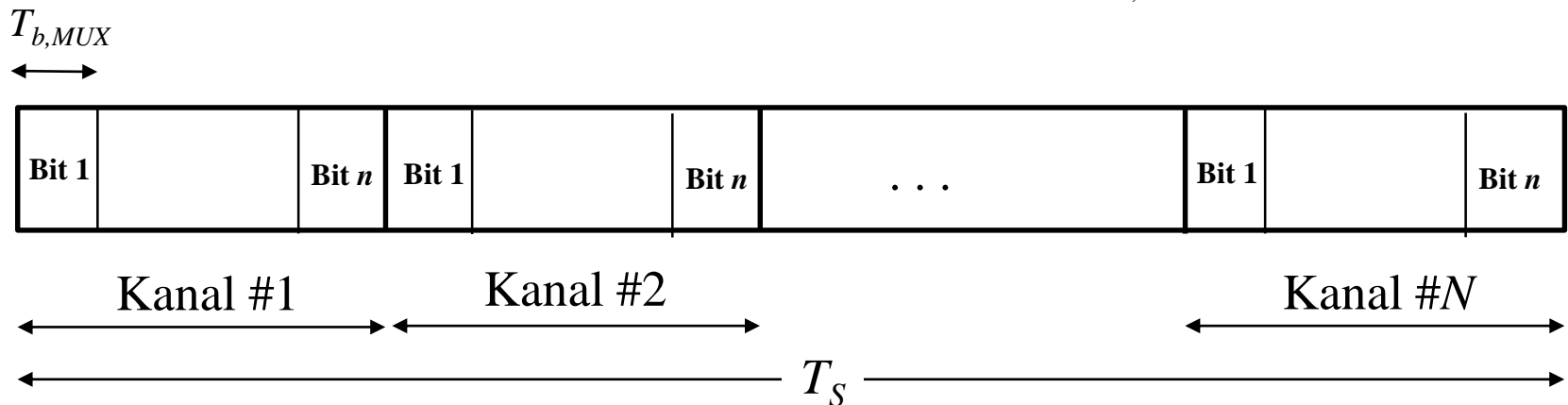
Zadatak 5 – PCM+MUX (3)

c) Pri formiranju digitalnog multipleksnog TDM signala, ukupno vreme između uzimanja dva odbirka istog signala T_s ($T_s = 1/f_s$ je perioda odabiranja svakog od signala u multipleksu) na raspolaganju je za prenos bita koji predstavljaju odbirke svih N signala. U toku periode odabiranja T_s prenosi se po n bita za odbirke svakog od N signala. Dakle, trajanje bita na liniji veze $T_{b,MUX}$ pri prenosu multipleksnog signala je N puta kraće od $T_{b,PCM}$ (odnosno $N \times n$ kraće od periode odabiranja T_s).

$$T_{b,MUX} = \frac{T_s}{nN} \Rightarrow V_{MUX} = \frac{1}{T_{b,MUX}} = \frac{Nn}{T_s} = Nnf_s = 0.23\mu s$$

Binarni protok multipleksnog signala V_{MUX} i signalizacioni interval $T_{b,MUX}$ na liniji veze jednaki su

$$V_{MUX} = N \cdot n \cdot f_s = 16 \cdot 9 \cdot 30kHz = 4320 \text{ kb/s}, \quad T_{b,MUX} = 1/V_{MUX} = 0.23\mu s$$



Zadatak 6 (1)

Signali iz $N=24$ kanala maksimalne učestanosti u spektru jednake 20kHz prenose se u multipleksu sa vremenskom raspodelom, pri čemu je A/D konverzija svakog od N signala u multipleksu prethodno izvršena primenom impulsne kodne modulacije.

Odabiranje signala vrši se minimalnom učestanošću određenom teoremom odabiranja. Raspodela amplituda odbiraka svakog od N signala je uniformna u intervalu $[-10.24V, 10.24V]$. Kvantizacija odbiraka obavlja se korišćenjem uniformnog kvanizatora, pri čemu se zahteva da maksimalna greška kvantizacije ne bude veća od 0.01V.

- Odrediti učestanost odabiranja signala.
- Odrediti minimalan broj kvantizacionih nivoa, kao i vrednosti tri najniža i tri najviša kvantizaciona nivoa.
- Odrediti protok signala na liniji veze.
- Koliko iznosi odnos snage signala i snage šuma kvantizacije $[S/N]_q$?
Dobijenu vrednost izraziti u decibelima.

Zadatak 6 (2)

Rešenje:

a) Maksimalna učestanost u spektru signala u svakom od kanala je 20kHz. Kako se signal odabire minimalnom učestanošću određenom teoremom odabiranja ona iznosi $f_s = 2f_m = 40\text{kHz}$

b) Maksimalna greška kvantizacije iznosi $\frac{\Delta u}{2}$

Po uslovu zadatka maksimalna greška kvantizacije je $\Delta u_{max}/2 = 0.01\text{V}$, pa je maksimalna dozvoljena vrednost koraka kvantizacije $\Delta u_{max} = 0.02\text{V}$.

Kako je raspodela odbiraka ulaznih signala uniformna u opsegu

$[U_{min}, U_{max}] = [-U/2, +U/2] = [-10.24\text{V}, +10.24\text{V}]$, minimalan broj kvantizacionih nivoa je $q_{min} = U/\Delta u_{max}$ nivoa, odnosno

$$q_{min} = \frac{U}{\Delta u_{max}} = \frac{2 \cdot 10.24}{0.02} = 1024 \text{ nivoa}$$

Zadatak 6 (3)

Ukoliko je ukupan broj kvantizacionih nivoa $q_{min}=1024$, znači da se svaki odbirak IKM signala predstavlja sa $n=\log_2 1024=10$ bita

Vrednosti tri najniža kvantizaciona nivoa su

$$U_{q,0}=U_{min}+\Delta u/2=-10.24+0.01=-10.23V$$

$$U_{q,1}=U_{min}+3\Delta u/2=-10.24+3*0.01=-10.21V$$

$$U_{q,2}=U_{min}+5\Delta u/2=-10.24+5*0.01=-10.19V$$

Vrednosti tri najviša kvantizaciona nivoa su

$$U_{q,1023}=U_{max}-\Delta u/2=+10.24-0.01=+10.23V$$

$$U_{q,1022}=U_{max}-3\Delta u/2=+10.24-3*0.01=+10.21V$$

$$U_{q,1021}=U_{max}-5\Delta u/2=+10.24-5*0.01=+10.19V$$

c) Protok signala na liniji veze je

$$V_{MUX} = N \cdot n \cdot f_s = 24 \cdot 10 \cdot 40kHz = 9600 \text{ kb/s}$$

Odnos signal/šum kvantizacije $[S/N]_q$

$$[S/N_q] = 10\log_{10}(q^2) = 20\log_{10}(q) = 20\log_{10}(2^n) = 20n\log_{10} 2 = 60.2dB$$