



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020.*



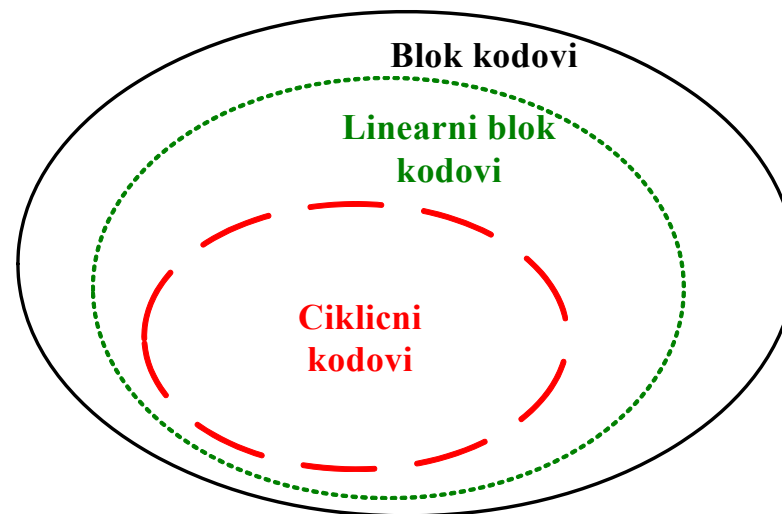
Vežbe III

Linearni blok kodovi, ciklični kodovi i ciklična provera redundanse (CRC)

Blok kodovi

* Klasifikacija blok kodova

- Blok kod čine kodne reči dužine n bita, pri čemu je jedna kodna reč pridružena svakoj mogućoj kombinaciji od k informacionih bita. Opisuje se tabelom preslikavanja!
- Linearni blok kod je vektorski podprostor vektorskog prostora nad poljem $GF(q)$ – za binarne kodove $q=2$. Opisuje se generišućom matricom!
- Ciklični kod je ciklični vektorski podprostor vektorskog prostora nad poljem $GF(q)$. Opisuje se jednim polinomom!



Zadatak 1

- Odrediti generišuću matricu Hemingovog koda (7,4).*
- Napisati sve kodne reči ovog koda.*
- Kakva je razlika između Hemingovog rastojanja i Hemingove težine?*
- Odrediti spektar kodnih rastojanja i broj grešaka koji ovaj kod može da koriguje/detektuje!*

Rešenje:

$$\mathbf{x} = \mathbf{i} \otimes \mathbf{G}$$

$$\mathbf{i} = [i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4]$$

$$\mathbf{x} = [z_1 \ z_2 \ i_1 \ z_3 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ z_4]$$

$$z_1 = c_3 \oplus c_5 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4$$

$$z_2 = c_3 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4$$

$$z_3 = c_5 \oplus c_6 \oplus c_7 = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4$$

LBK - generišuća matrica

- * Jedan linearni kod može biti opisan bazom – skupom linearno nezavisnih kodnih vektora koji “generišu” ceo kodni podprostor.
- * Ovi vektori se mogu složiti u obliku generišuće matrice (*generator matrix*) dimenzija $k \times n$, sa linearno nezavisnim vrstama.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kn} \end{bmatrix}.$$

- * Svaka od kodnih reči se može dobiti sabiranjem jedne, dve,..., ili svih k vrsta ove matrice, pa je ukupan broj kodnih reči

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k} = 2^k.$$

Zadatak 1 – rešenje (1)

* Generišuća matrica

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Ovaj kod ima $2^4=16$ kodnih reči, one su:

$x_1=0000000$

$x_2=1101001$

$x_3=0101010$

$x_4=1000011$

$x_5=1001100$

$x_6=0100101$

$x_7=1100110$

$x_8=0001111$

$x_9=1110000$

$x_{10}=0011001$

$x_{11}=1011010$

$x_{12}=0110011$

$x_{13}=0111100$

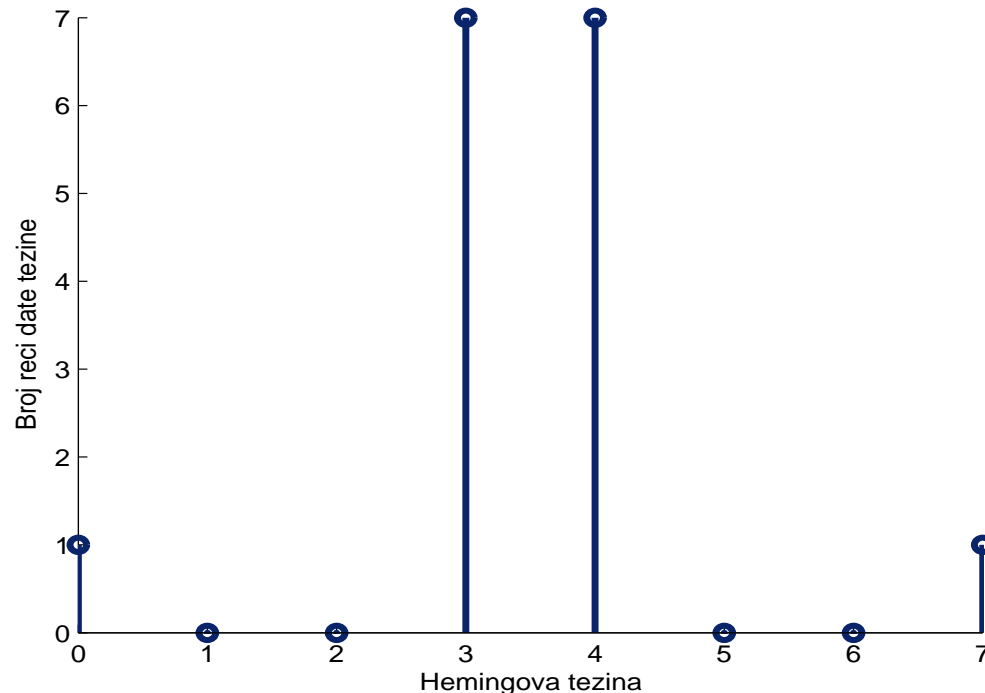
$x_{14}=1010101$

$x_{15}=0010110$

$x_{16}=1111111$

Zadatak 1 – rešenje (2)

- * Pošto je svaka kodna reč zbir dve druge kodne reči, rastojanja između pojedinih kodnih reči mogu se odrediti i preko Hemingovih težina.
- * Broj kodnih reči sa određenim Hemingovim rastojanjima (težinama) predstavlja spektar kodnih rastojanja datog koda



$$d=3,$$

$$d \geq 2e_c + 1$$

$$e_c=1,$$

$$d \geq e_c + e_d + 1$$

$$e_d=1.$$

Zadatak 2

- Odrediti jednu kodnu reč koda opisanog polinomom $g(x)=1+x^2+x^3+x^4$.*
- Odrediti generišuću matricu ovog koda.*
- Napisati sve kodne reči ovog koda.*

Rešenje:

Kod C je cikličan ako je ispunjeno:

- C je linearan blok kod;*
- Svaki ciklični pomeraj (ciklična permutacija) bilo koje kodne reči takođe je kodna reč, tj. ako je $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in C$, tada je i $(a_{n-1}, a_0, \dots, a_{n-2}) \in C$.*

$$g(x)=1+x^2+x^3+x^4 \quad \rightarrow \quad g=[1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Vektor g je jedna kodna reč, a cikličnim pomeranjem ovog vektora se mogu dobiti ostale kodne reči!

Zadatak 2 - rešenje

- * LBK je opisan generišućom matricom

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- * Kodne reči koje čine bazu koda i sve njihove kombinacije

$$c_1 = 1011100$$

$$c_2 = 0101110$$

$$c_3 = 0010111$$

$$c_1 + c_2 = 1110010$$

$$c_1 + c_3 = 1001011$$

$$c_2 + c_3 = 0111001$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 1100101$$

- * Kod je cikličan jer se cikličnom permutacijom prve kodne reči udesno redom dobija svih $2^3=8$ kodnih reči dužine $n=7$, tj.

$$c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow c_1 + c_3 \rightarrow c_1 + c_2 + c_3 \rightarrow c_1 + c_2 \rightarrow c_2 + c_3 \rightarrow c_1$$

Zadatak 3

- a) *Odrediti kodnu reč koja se pojavljuje na izlazu kodera, ako je na njegovom ulazu sekvenca (1101), a kod je opisan polinomom $g(x)=1+x^2+x^3$.*
- b) *Ako na ulaz dekodera stigne primljena reč (0001000), izvršiti dekodovanje ako je kod je opisan polinomom $g(x)=1+x^2+x^3$.*

Rešenje:

- * Poruka (1101) se prvo prebaci u informacioni polinom, pa se obavi množenje generišućim polinomom

$$(i_0 i_1 i_2 i_3) = (1101) \rightarrow i(x) = x^3 + x + 1$$

$$(g_0 g_1 g_2 g_3) = (1011) \rightarrow g(x) = x^3 + x^2 + 1$$

$$\begin{aligned} c(x) &= i(x)g(x) = x^3(x^3 + x^2 + 1) + x(x^3 + x^2 + 1) + x^3 + x^2 + 1 \\ &= x^6 + x^5 + \cancel{x^3} + x^4 + \cancel{x^3} + x + x^3 + x^2 + 1 \\ &= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (1111111) \end{aligned}$$

Zadatak 3 - rešenje

- * Poruka $r=(0001000)$ se prvo prebaci u primljeni polinom, pa se obavi deljenje generišućim polinomom i odredi ostatak

$$r = (0001000) \rightarrow r(x) = x^3$$

$$g(x) = x^3 + x^2 + 1$$

$$s(x) = \text{rem}(r(x) / g(x)) = 1 + x^2 = (101)$$

- * Dobijeni ostatak ima jednu od osam vrednosti i predstavlja sindrom
- * Sindrom $s=(000)$ ukazuje da nije bilo greške pri prenosu, dok preostalih sedam kombinacija jednoznačno ukazuje na poziciju greške.

Množenje i deljenje na nivou koeficijenata

- * Množenje sa $g(x)=x^4+x^3+1$
(bez pisanja polinoma po x)

$$\begin{array}{r}
 10001100101 \\
 \times \quad 11001 \\
 \hline
 10001100101 \\
 00000000000 \\
 00000000000 \\
 10001100101 \\
 10001100101 \\
 \hline
 110000100011101
 \end{array}$$

- * Deljenje – kodna reč bez greške, tj. sa greškom pri prenosu

$$110000100011101 : 11001 = 10001100101$$

$$\begin{array}{r}
 11001 \\
 \hline
 10100 \\
 11001 \\
 \hline
 11010 \\
 11001 \\
 \hline
 11111 \\
 11001 \\
 \hline
 11001 \\
 11001 \\
 \hline
 00000
 \end{array}$$

$$110000100111101 : 11001 = 10001100110$$

$$\begin{array}{r}
 11001 \\
 \hline
 10100 \\
 11001 \\
 \hline
 11011 \\
 11001 \\
 \hline
 10111 \\
 11001 \\
 \hline
 11100 \\
 11001 \\
 \hline
 01011
 \end{array}$$

Zadatak 4

- a) *Objasniti postupak dobijanja sistematskog cikličnog koda za slučaj kada je $g(x)=1+x+x^3$*
- b) *Formirati kodnu reč kada je $i=(1010)$.*
- c) *Ispisati sve kodne reči ovog koda.*
- d) *Objasniti cikličnu proveru redundanse (CRC) na primeru kada je $i=(01100111)$ a generišući polinom je $g(x)=x^4+x^3+1$.*
- e) *Objasniti princip rada CRC koda i CRC dekodera, koristeći blok šemu.*

Postupak za dobijanje sistematskog cikličnog koda

- * Treba najpre informacioni polinom pomnožiti sa x^{n-k} , tako da se dobija nov informacioni polinom

$$i^*(x) = x^{n-k}i(x) = i_{k-1}x^{n-1} + \dots + i_1x^{n-k-1} + i_0x^{n-k}.$$

- * Sada ovaj rezultat treba podeliti generišućim polinomom $g(x)$ koji je stepena $n-k$. Očigledno da će ostatak biti stepena $n-k-1$ (tj. da će imati ukupno $n-k$ koeficijenata)

$$r(x) = r_{n-k-1}x^{n-k-1} + \dots + r_1x + r_0.$$

- * Kodna reč se sada dobija oduzimanjem ostatka $r(x)$ od polinoma $i^*(x)$,

$$c(x) = x^{n-k}i(x) + r(x).$$

- * Ovome polinomu odgovara kodni vektor

$$(i_{k-1}, \dots, i_1, i_0, r_{n-k-1}, \dots, r_1, r_0)$$

gde su informacioni biti neizmenjeni, a preostali biti su ustvari provere na parnost, čime je dobijen sistematski kod.

Zadatak 4 – rešenje (1)

Poruke	Kodni vektori	Kodni polinomi
(0 0 0 0)	0 0 0 0 0 0 0	$0 = 0 \cdot g(x)$
(1 0 0 0)	1 1 0 1 0 0 0	$1+x+x^3 = 1 \cdot g(x)$
(0 1 0 0)	0 1 1 0 1 0 0	$x+x^2+x^4 = x \cdot g(x)$
(1 1 0 0)	1 0 1 1 1 0 0	$1+x^2+x^3+x^4 = (1+x) \cdot g(x)$
(0 0 1 0)	1 1 1 0 0 1 0	$1+x+x^2+x^5 = (1+x^2) \cdot g(x)$
<u>(1 0 1 0)</u>	0 0 1 1 0 1 0	<u>$x^2 + x^3 + x^5 = x^2 \cdot g(x)$</u>
(0 1 1 0)	1 0 0 0 1 1 0	$1+x^4+x^5 = (1+x+x^2) \cdot g(x)$
(1 1 1 0)	0 1 0 1 1 1 0	$x+x^3+x^4+x^5 = (x+x^2) \cdot g(x)$
(0 0 0 1)	1 0 1 0 0 0 1	$1+x^2+x^6 = (1+x+x^3) \cdot g(x)$
(1 0 0 1)	0 1 1 1 0 0 1	$x+x^2+x^3+x^6 = (x+x^3) \cdot g(x)$
(0 1 0 1)	1 1 0 0 1 0 1	$1+x+x^4+x^6 = (1+x^3) \cdot g(x)$
(1 1 0 1)	0 0 0 1 1 0 1	$x^3+x^4+x^6 = x^3 \cdot g(x)$
(0 0 1 1)	0 1 0 0 0 1 1	$x+x^5+x^6 = (x+x^2+x^3) \cdot g(x)$
(1 0 1 1)	1 0 0 1 0 1 1	$1+x^3+x^5+x^6 = (1+x+x^2+x^3) \cdot g(x)$
(0 1 1 1)	0 0 1 0 1 1 1	$x^2 + x^4 + x^5 + x^6 = (x^2 + x^3) \cdot g(x)$
(1 1 1 1)	1 1 1 1 1 1 1	$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6 = (1+x^2+x^5) \cdot g(x)$

$$X^3(x^2+1)$$

$$X^3+x+1$$

$$= X^2$$

Zadatak 4 – rešenje (2)

- * Binarnu poruku $i=(01100111)$ treba kodovati CRC kodom kod koga je generišući polinom dat izrazom $g(x)=x^4+x^3+1$.

- * Vektor koji odgovara generišućem polinomu dobija se iz

$$g(x) = x^4 + x^3 + 1 = g_0x^0 + g_1x^1 + g_2x^2 + g_3x^3 + g_4x^4 \rightarrow g = (10011)$$

- * Polinom koji odgovara poruci koja se prenosi

$$i=(01100111) \rightarrow i(x)=x^7+x^6+x^5+x^2+x$$

- * Kodna reč na osnovu postupka

$$c(x) = i(x)x^{n-k} + \text{rem} \left\{ \frac{i(x)x^{n-k}}{g(x)} \right\} = i(x)x^4 + r(x)$$

a ovde je

$$i(x)x^4 = x^{11} + x^{10} + x^9 + x^6 + x^5 \rightarrow i^* = (000001100111)$$

$$r(x) = \text{rem} \left\{ \frac{i(x)x^4}{g(x)} \right\} = x^2 + x \rightarrow (0110)$$

$$c(x) = i(x)x^4 + r(x) = x^{11} + x^{10} + x^9 + x^6 + x^5 + x^2 + x \rightarrow c = (011001100111)$$

Zadatak 4 – rešenje (3)

- * Ako je greška prikupljena na liniji oblika $e=00000000101$, za poslatu poruku c primljena poruka će biti :

$$c = (011001100111)$$

$$e = (100100000000)$$

$$y = (111101100111)$$

- * Ako ostatak pri deljenju sa $g(x)$ bude ravan nuli smatra se da je kodna reč ispravno preneti (poslata kodna reč je uvek deljiva generišućim polinomom!). U svakom drugom slučaju smatra se da je došlo do greške pri prenosu.

- * U posmatranom slučaju dele se polinomi koji odgovaraju sekvencama (111101100111) i (11001) :

$$\text{rem} \left\{ \frac{y(x)}{g(x)} \right\} = x^3 + 1 \Rightarrow r = [1001] \neq [0000]$$

pa je detektovana greška pri prenosu, ali ne i na kojoj poziciji se nalazi greška i da li je pri prenosu postojala jedna ili više grešaka.

Zadatak 4 – rešenje (4)

- * Sabiranjem sekvence grešaka sa poslatom kodnom reči na prijemu može se desiti sa se opet primi jedna od kodnih reči.
- * U tom slučaju dekodler će smatrati da nije bilo grešaka pri prenosu. Koliko je ovo verovatno?
 - Kodna reč je dužine n bita pa u dekodler može doći ukupno 2^n svih mogućih kombinacija kodnih reči.
 - Kodler može da emituje samo 2^k kombinacija kodnih reči dužine n . Informacione reči na ulazu kodera su dužine k pa je za svaku kombinaciju od k bita na ulazu preostalih $n-k$ bita u kodnoj reči jednoznačno određeno.
 - Od 2^n mogućih reči na ulazu dekodera samo 2^k su kodne reči. Stoga je verovatnoća da greška ne bude detektovana utoliko manja što je $n-k$ veće (verovatnoća ovakvog događaja je 2^{k-n} ali treba uzeti u obzir i činjenicu da nisu sve sekvence grešaka jednako verovatne!) ali je tada umanjen i kodni količnik.

Zadatak 4 – rešenje (6)

- * Kada je prekidač u položaju (1) prvih k bita stiže u kolo za deljenje i pomerački registar. Na prijemu se računa ostatak. Ako je ostatak različit od nule $OE=0$ i ne dozvoljava se čitanje donjeg registra.
- * Ako je ostatak je ravan nuli $r(x)=0$ tada nema greške pa je $OE=1$ i dekodovana informacija može da se prosledi korisniku.

