



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2019/2020.*

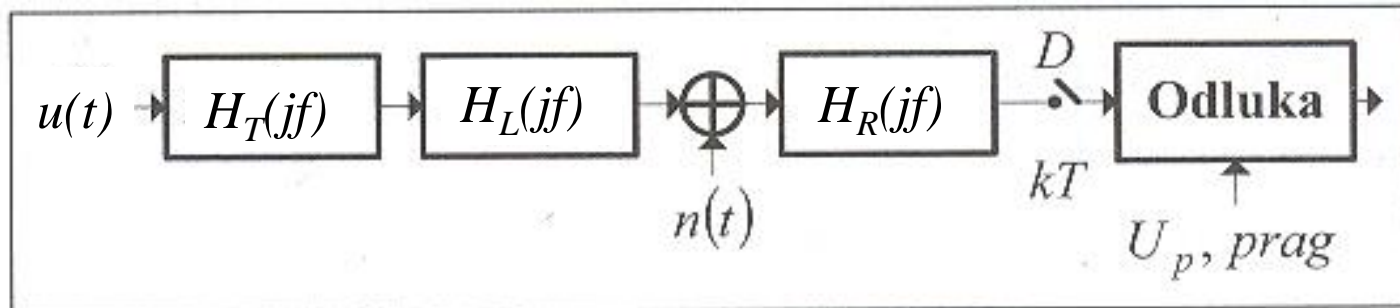


Prenos digitalnih signala u osnovnom opsegu učestanosti (OOU) – II deo

Prenos digitalnog signala u OOU

* Sistem za prenos

- Pre kanala za prenos predajni filtar, nakon njega prijemni filtar
- Ova tri bloka (zajedno sa dejstvom aditivnog šuma) čine ekvivalentan model kanala
- Ovakav ekvivalentan kanal zadovoljava I *Nyquist*-ov kriterijum

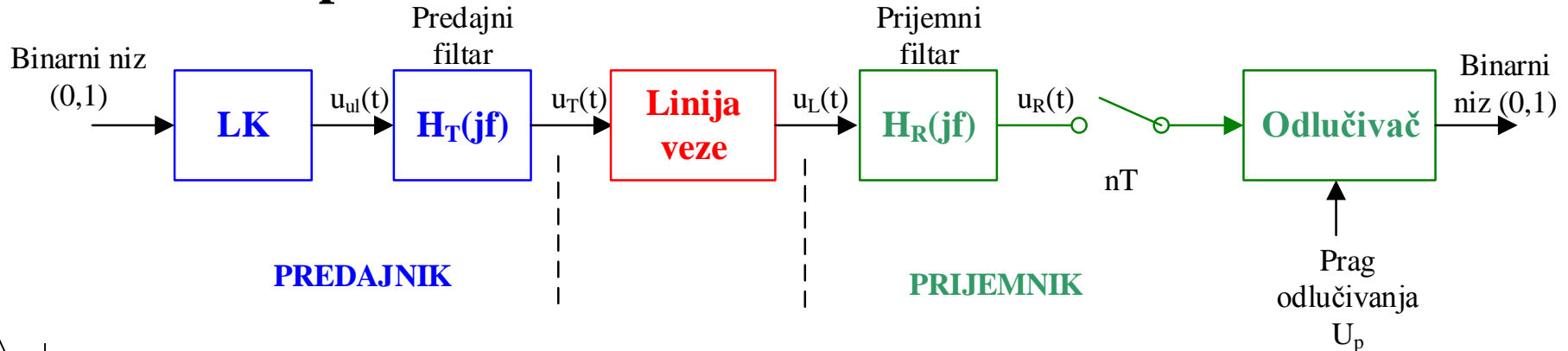


* Tri dominantna efekta

- Kanal unosi *slabljenje*,
- Kanal ima *ograničen propusni opseg* i unosi izobličenja (ISI),
- U kanalu postoji *šum* koji izaziva greške pri prenosu.

Blok šema sistema za prenos digitalnih signala

* Sistem za prenos

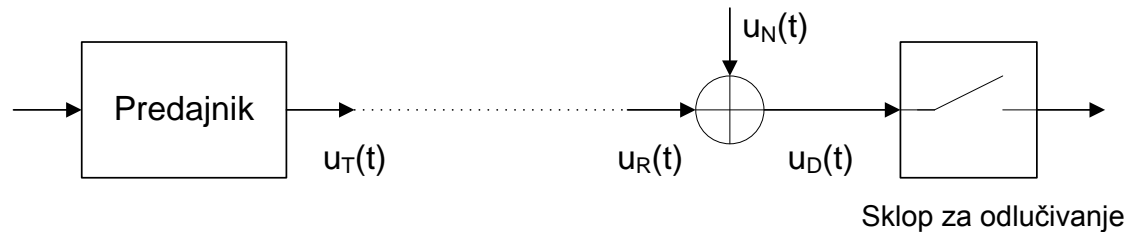


Opšta blok šema sistema za prenos binarnog signala u OOU, kada se koristi opšti izraz za oblik digitalnog signala. U slučaju M -arnog prenosa menja se samo proces odlučivanja → postoji više pragova odlučivanja.

U bloku LK se najpre obavlja prelaz sa logičkih simbola na unipolarne, polarne ili M -arne simbole, a nakon toga linijsko kodovanje sa željenim oblikom simbola $x(t)$ trajanja T_s .

$H_T(jf)$ i $H_R(jf)$ su funkcije predajnog i prijemnog filtra. Predajni filtar ograničava spektar signala, odnosno vrši uobličavanje spektra tako da on bude prilagođen karakteristikama linije veze. Odabir funkcije prenosa prijemnog i predajnog filtra se vrši tako da se (zajedno sa uticajem linije veze) eliminiše uticaj ISI i maksimizira odnos snage signala i šuma u trenucima odabiranja u prijemniku.

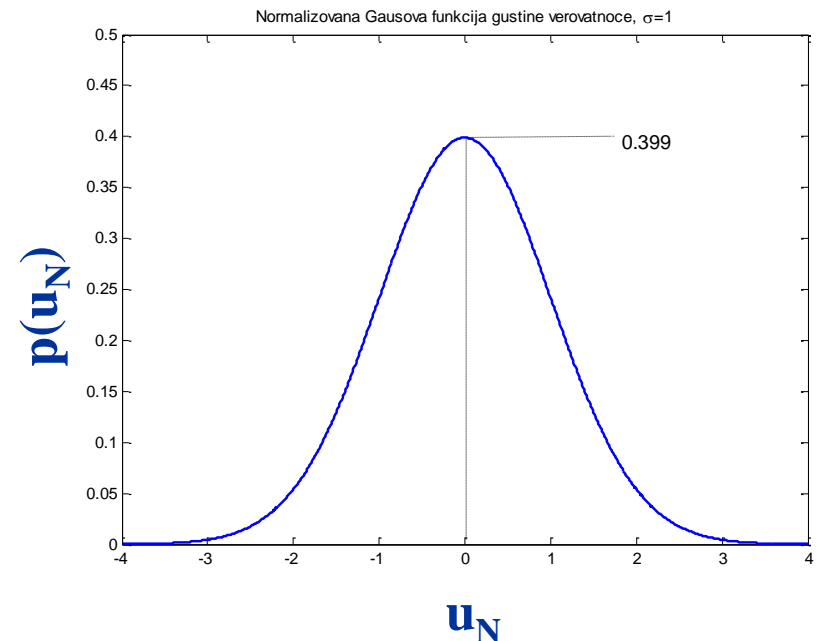
Uticaj slučajnog šuma na prenos signala u OOU



- Na ulazu u prijemnik prisutan je slučajan šum $u_N(t)$
- Aditivna priroda šuma – superponira se na postojeći signal
- Slučajan proces čija je raspodela amplituda opisana Gausovom funkcijom gustine verovatnoće

$$p(u_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u_N^2}{2\sigma^2}}$$

- Srednja vrednost jednaka je nuli $\overline{u_N} = 0$
- Srednja snaga šuma $\overline{u_N^2} = \sigma^2$
- Za konstantnu snagu signala na prijemu, kvalitet prenosa signala opada sa povećanjem snage šuma σ^2



Raspodela odbiraka slučajnog šuma

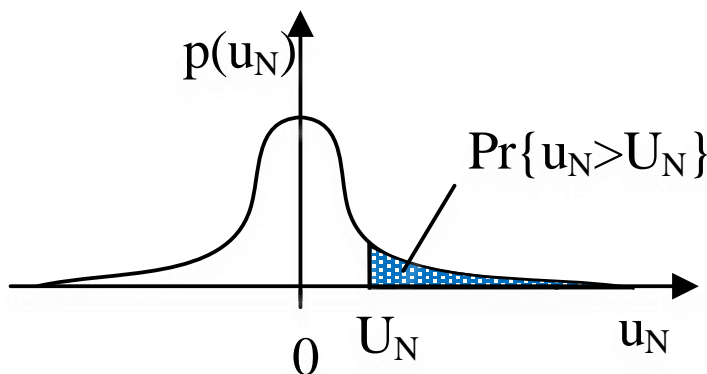
Raspodela amplituda odbiraka slučajnog šuma, opisana je sledećom funkcijom gustine verovatnoće (*probability density function*, PDF)

$$p(u_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u_N^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(u_N) du_N = 1$$

Verovatnoća da je odbirak šuma veći od neke (pozitivne) vrednosti U_N može se odrediti na sledeći način

$$\Pr\{u_N > U_N\} = \int_{U_N}^{+\infty} p(u_N) du_N = \int_{U_N}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u_N^2}{2\sigma^2}} du_N = ?$$



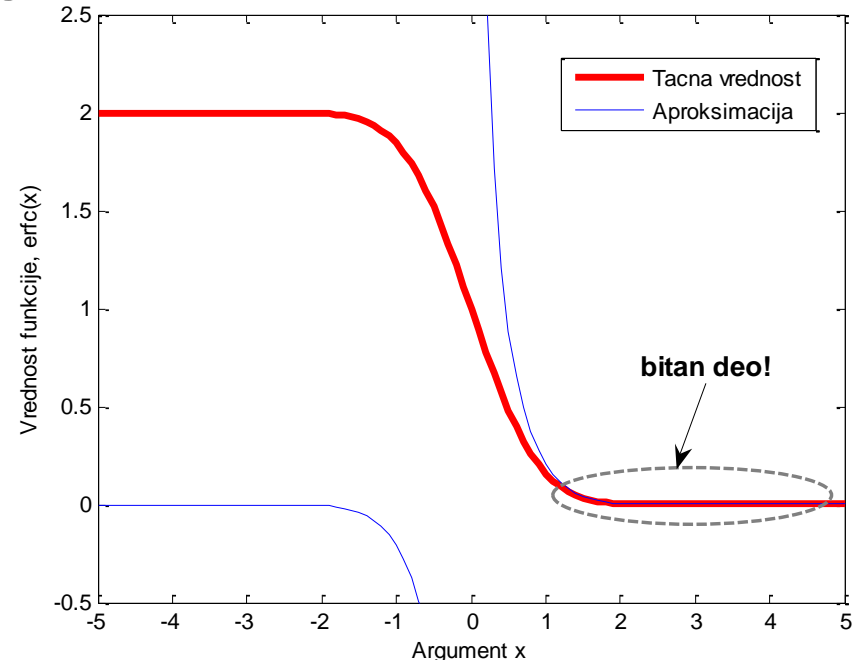
Kako izračunati verovatnoću $\Pr\{u_N > U_N\}$, odnosno vrednost ovog integrala?

Komplementarna funkcija greške

Za rešavanje integrala ovog oblika pogodno je koristiti specijalnu funkciju koja se naziva komplementarna funkcija greške (*Complementary Error Function*) i koja je definisana sa

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz$$

Ova specijalna funkcija je pogodna jer je ugrađena u velikom broju softverskih paketa koji se koriste za proračune u telekomunikacijama i obradi signala (*Matlab, Mathematica, ...*)



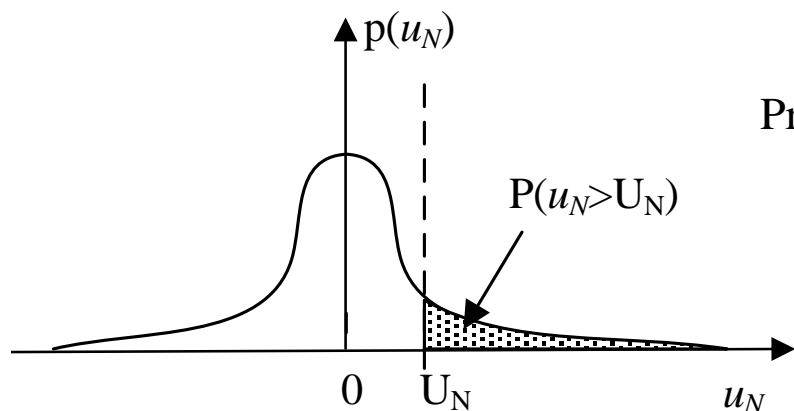
Vrednost funkcije $\operatorname{erfc}(x)$ opada sa porastom argumenta x .

Za dovoljno veliku vrednost argumenta x može se koristiti i sledeća aproksimacija

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}}$$

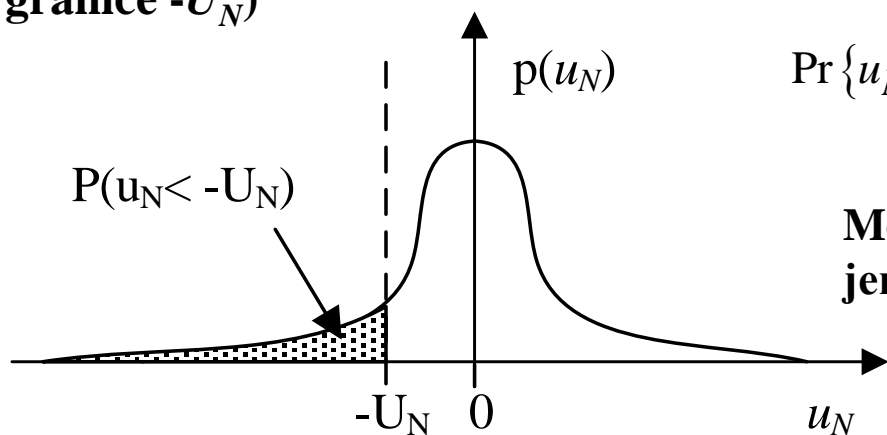
Uticaj slučajnog šuma

Korišćenjem $erfc(\cdot)$ funkcije može se izračunati verovatnoća da je odbirak šuma veći od neke pozitivne vrednosti U_N . Ova verovatnoća se smanjuje sa porastom vrednosti U_N .



$$\Pr \{u_N > U_N\} = \int_{U_N}^{+\infty} p(u_N) du_N = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U_N}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Takođe, primenom $erfc(\cdot)$ funkcije može se izračunati verovatnoća da je odbirak šuma manji od neke negativne vrednosti $-U_N$ (ova verovatnoća se smanjuje sa smanjenjem granice $-U_N$)

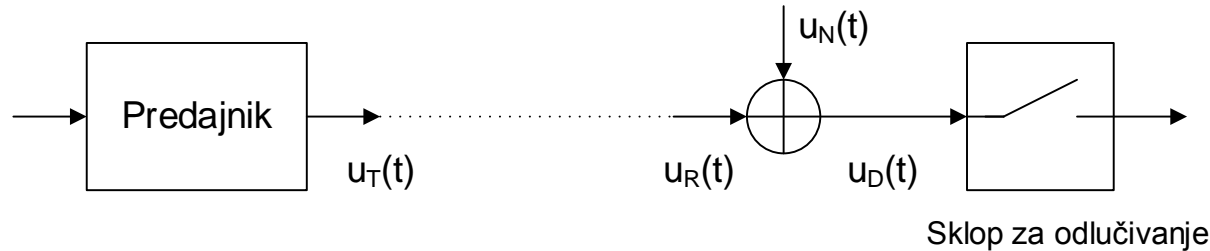


$$\Pr \{u_N < -U_N\} = \int_{-\infty}^{-U_N} p(u_N) du_N = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U_N}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

Može se uočiti da su ove dve verovatnoće jednake jer je Gausova kriva simetrična u odnosu na y-osu

$$\Pr \{u_N > U_N\} = \Pr \{u_N < -|U_N|\}$$

Uticaj slučajnog šuma na prenos signala u OOU



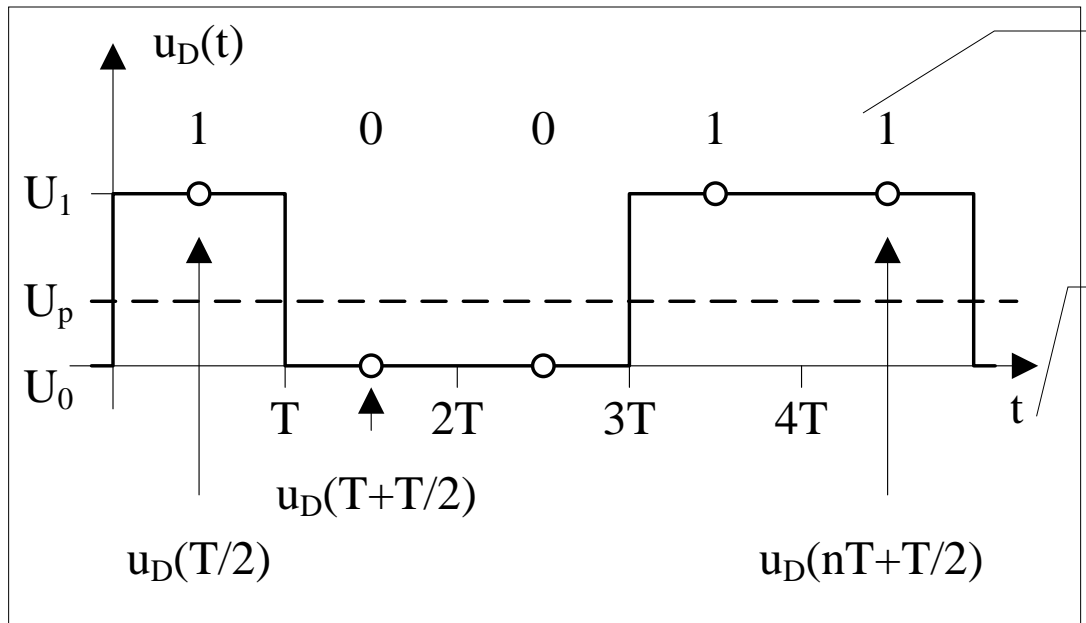
* Postupak

- Slučajan šum $u_N(t)$ se superponira signalu (aditivan šum).
- Signal na osnovu kojeg se donosi odluka u sklopu za odlučivanje

$$u_D(t) = u_R(t) + u_N(t)$$

- Odbirci signala $u_D(t)$ uzimaju se u svakom signalizacionom intervalu i porede se sa referentnom vrednošću, na osnovu čega se donosi odluka o vrednosti amplitude u trenutku odabiranja (značajni parametar).
- Pri tome, komponenta $u_R(t)$ predstavlja koristan signal dok $u_N(t)$ predstavlja komponentu slučajnog šuma.
- Ispituje se *samo uticaj šuma* (slabljenje i ograničen propusni opseg kanala se ne razmatra) pa smatramo da je $u_R(t) = u_T(t)$!

Prenos u OOU – Prijem bez šuma



Izgled signala, i odbiraka u prijemniku kada nema šuma (signal $u_D(t)=u_R(t)$).

Zavisno od toga da li se prenosi logička "0" ili "1" odbirci su u opštem slučaju vrednosti U_0 ili U_1 , (polaran signal $U_1=U$, $U_0=-U$, unipolaran $U_1=U$, $U_0=0$)

- Prijemnik "prepoznaje" simbole, odnosi donosi odluke o tome koji simbol je poslat u posmatranom signalizacionom intervalu, tako što u odlučivaču poredi svaki odbirak sa naponom praga U_P (fiksni referentni napon).
- U slučaju kada je odbirak signala veći od napona praga, donosi se *odluka* da je u posmatranom signalizacionom intervalu primljen simbol "1", a kada je odbirak manji od napona praga donosi se *odluka* da je primljen simbol "0".

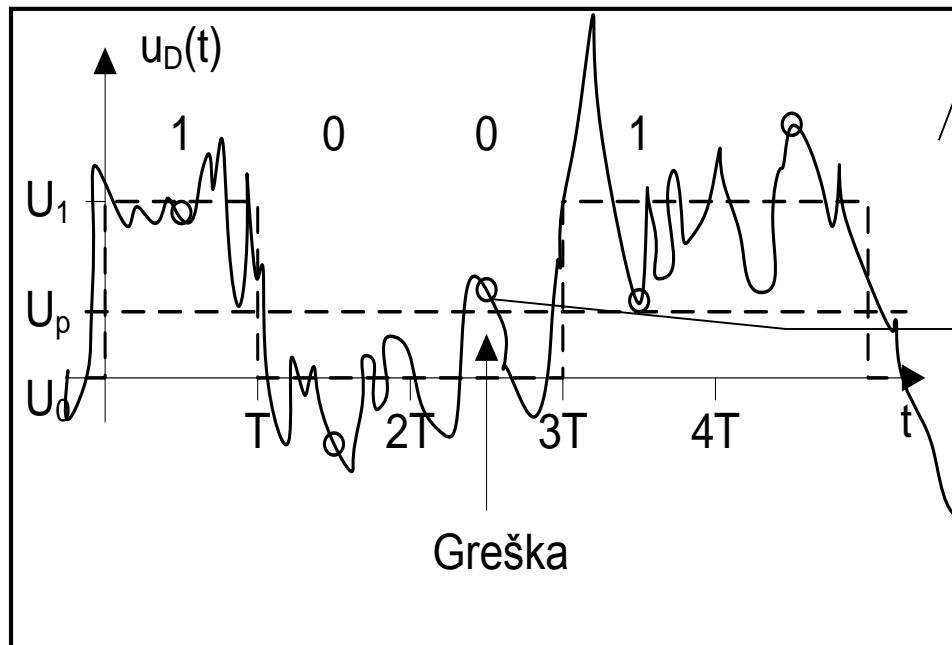
Prenos u OOU – Prijem sa šumom

$$u_D \left(nT + \frac{T}{2} \right) \geq U_P \rightarrow \text{binarni simbol 1}$$

$$u_D \left(nT + \frac{T}{2} \right) < U_P \rightarrow \text{binarni simbol 0}$$

Proces odlučivanja u prijemniku.

U slučaju kada nema šuma i ISI, prijemnik radi *bez greške u odlučivanju*.



Izgled istog signala kao i u prethodnom izlaganju, ali kada je na signal superponiran i signal šuma.

Zavisno od amplitude šuma u trenutku odabiranja može doći do greške pri odlučivanju.

Prenos u OOU – Prijem

- * Odbirci signala $u_D(t)$ u trenucima odabiranja $t=nT+T/2$ kada na ulazu postoje i signal i šum definisani su izrazom:

$$u_D\left(nT + \frac{T}{2}\right) = u_R\left(nT + \frac{T}{2}\right) + u_N\left(nT + \frac{T}{2}\right)$$

- * **Priroda odbiraka:**

- Odbirci šuma, $u_N(nT+T/2)$ predstavljaju slučajnu promenljivu, raspodeljenu po *Gauss*-ovom zakonu, srednje vrednosti jednake nuli.
- Deo odbirka signala $u_D(nT+T/2)$ na osnovu kojeg se vrši odlučivanje, **koji potiče od korisnog signala je signal $u_R(nT+T/2)$ i ima vrednost U_0 ili U_1 , koja je nama nepoznata** (ne znamo koja od dve vrednosti je poslata u posmatranom intervalu)
- Sledi da odbirak (koristan signal+šum) na osnovu kojeg se donosi odluka $u_D(nT+T/2)$ takođe predstavlja slučajnu promenljivu raspodeljenu po *Gauss*-ovom zakonu, čija je srednja vrednost U_0 ili U_1 . Na osnovu odbiraka signala $u_D(nT+T/2)$ odlučivač donosi odluku o primljenom simbolu u n -tom periodu signalizacije a_n .
- Usled uticaja šuma, postoji verovatnoća de se dogodi da odbirak signala $u_R(nT+T/2)$ bude *iznad* praga odlučivanja iako se prenosi logička “0”. Na ovaj način dolazi do *greške u odlučivanju*. Takođe je moguć i obrnut slučaj.

Prenos u OOU – Prijem

- * Obično se pretpostavlja se da je verovatnoća pojave oba naponska nivoa (logičke jedinice i logičke nule) na ulazu jednaka

$$P(0) + P(1) = 1$$

$$P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$$

- * Vrš se poređenje odbirka signala u_D sa naponom praga U_p . Ukoliko je:
 - Odbirak čija je amplituda $u_D > U_p$, donosi se odluka da je poslat simbol logička 1
 - Odbirak čija je amplituda $u_D < U_p$, donosi se odluka da je poslat simbol logička 0

$$p_0(u_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D - U_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Verovatnoća da je došlo do greške pri prenosu binarne 1, $P(0/1)$

Raspodela odbiraka kada je poslat simbol binarna 0 (tj. naponski nivo U_0)

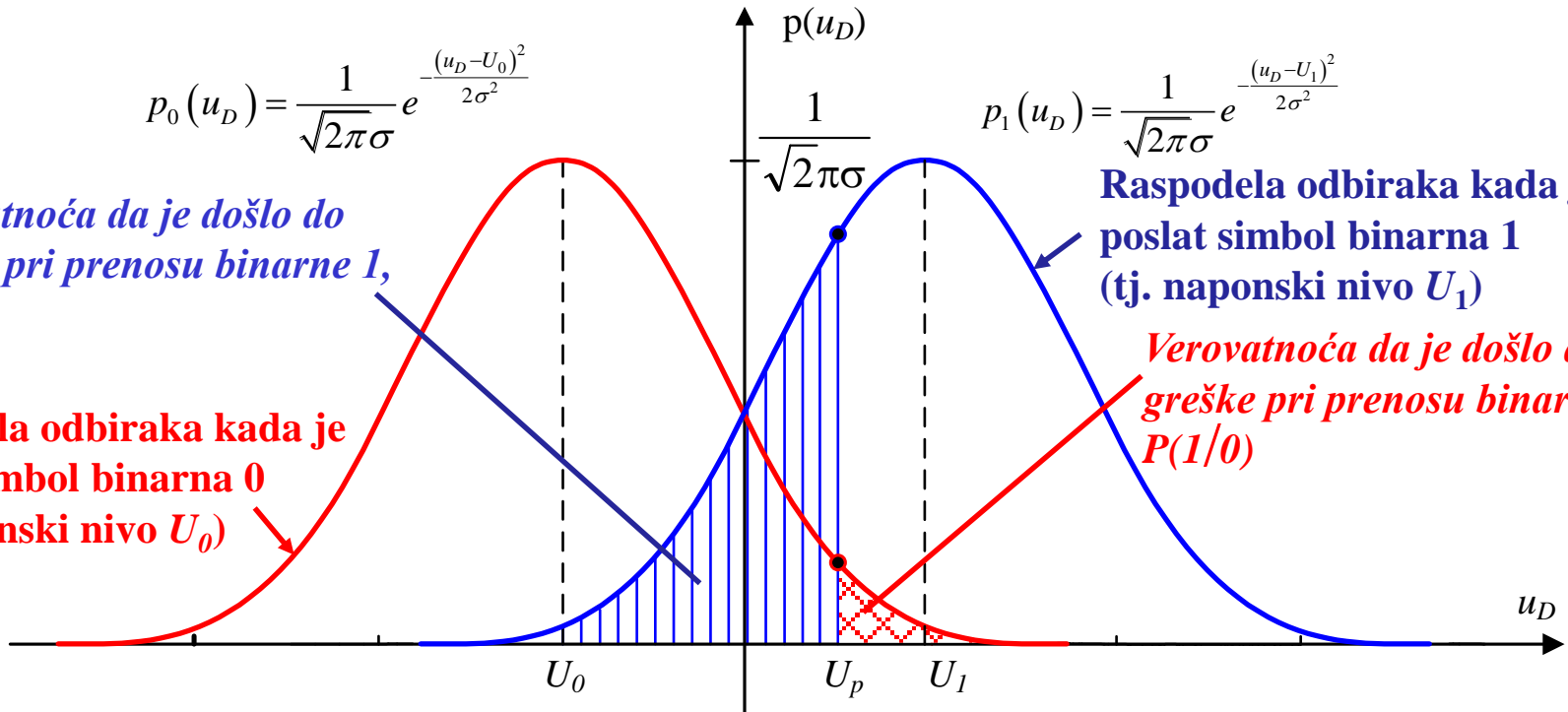
$p(u_D)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$p_1(u_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u_D - U_1)^2}{2\sigma^2}}$$

Raspodela odbiraka kada je poslat simbol binarna 1 (tj. naponski nivo U_1)

Verovatnoća da je došlo do greške pri prenosu binarne 0, $P(1/0)$



Odlučivanje u prisustvu šuma (polarni signal)

- * **Pri prenosu simbola logička 1** (poslat signal amplitude $+U_1$) do greške dolazi kada je amplituda odbirka manja od praga $u_D < U_P$, odnosno $u_D = +U_1 + u_N < U_P$, tj. odbirak šuma je (negativan) i manji od $u_N < -U_1 + U_P = -|U_1 - U_P|$

$$P(0|1) = P(u_D < U_P | U_1) = \int_{-\infty}^{U_P} p_1(u_D) du_D = \int_{-\infty}^{-U_1 + U_P} p(u_N) du_N = \int_{U_1 - U_P}^{+\infty} p(u_N) du_N$$

$$P(0|1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U_1 - U_P}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Verovatnoća greške pri prenosu logičke 1 se smanjuje sa povećanjem rastojanja nivoa U_1 i napona praga U_P (videti sliku na slajdu 13 i formulu na slajdu 8)

- * **Pri prenosu simbola logička 0** (poslat signal amplitude $+U_0$) do greške dolazi kada je amplituda odbirka veća od praga $u_D > U_P$, odnosno $u_D = U_0 + u_N > U_P$, tj. odbirak šuma je pozitivan i veći od $u_N > U_P - U_0 > 0$

$$P(1|0) = P(u_D > U_P | U_0) = \int_{U_P}^{+\infty} p_0(u_D) du_D = \int_{U_P - U_0}^{+\infty} p(u_N) du_N$$

$$P(1|0) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U_P - U_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Verovatnoća greške pri prenosu logičke 0 se smanjuje sa povećanjem rastojanja nivoa U_0 i napona praga U_P (videti sliku na slajdu 13 i formulu na slajdu 8)

Prenos u OOU – Prijem

- * Ako su apriorne verovatnoće da se šalju logička “0” i “1”, definisane kao $P(0)$ i $P(1)$, tada srednju verovatnoću greške računamo na osnovu izraza totalne verovatnoće, odnosno važi izraz:

$$P_e = P(1)P(0|1) + P(0)P(1|0)$$

$$P_e = P(1) \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U_1 - U_P}{\sqrt{2}\sigma}\right) + P(0) \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{U_P - U_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

- * Ovde izveden izraz je opšteg značenja, odnosno jedina pretpostavka je da nema ISI. Čak ni oblik impulsa nije bitan, ovde je uveden zbog grafičkih prikaza. Bitno je da su U_0 i U_1 amplitude na odabiraču pri prenosu 0 i 1.
 - P_e – srednja verovatnoća greške na izlazu prijemnika
 - $P(1)$ - verovatnoća da se pošalje 1
 - $P(0|1)$ - verovatnoća da se primi 0 iako je poslata 1
 - $P(0)$ - verovatnoća da se pošalje 0
 - $P(1|0)$ - verovatnoća da se primi 1 iako je poslata 0

Prenos u OOU – Optimalni prag prijema

- Verovatnoća greške u odlučivanju zavisi od verovatnoća sa kojom predajnik šalje jedinice i nule, $P(1)$ i $P(0)$, od snage šuma na ulazu u prijemnik σ^2 , od napona kojima su predstavljene jedinice i nule U_1 i U_0 , i od napona praga odlučivanja U_p .
- *Napon praga odlučivanja može se slobodno birati u prijemniku, a izbor se obavlja tako da se postigne minimalna verovatnoća greške.*
- Minimum verovatnoće greške se dobija kada je napon praga optimalan, tj. jednak

$$U_{po} = \frac{U_1 + U_0}{2} + \frac{\sigma^2}{U_1 - U_0} \ln(P_0/P_1)$$

- U realnim sistemima prenosa, u binarnom signalu koje predajnik šalje skoro uvek se jedinice i nule javljaju sa jednakom verovatnoćom. Ako to nije ispunjeno, često se obavlja obrada da se to podesi.
- Uz pretpostavku da su jedinice i nule jednakoverovatne, $P(1)=P(0)=1/2$, dobijamo da je optimalni napon praga postavljen na sredini između amplituda odbiraka na odabiraču u prijemniku za slučaj prenosa jedinice i nule, tj.:

$$U_{po} = \frac{U_1 + U_0}{2}$$

Verovatnoća greške - binarni polarni NRZ signal

- U slučaju prenosa binarnog polarnog NRZ signala važi $U_1=+U$ i $U_0=-U$
- Za $P(1)=P(0)=1/2$, optimalni napon praga postavljen je na sredini između naponskih nivoa koji odgovaraju simbolima 1 i 0, odnosno $U_{po}=0$.
U tom slučaju, izraz za verovatnoću greške svodi se na

$$P_e = P(1) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U_1 - U_P}{\sqrt{2}\sigma} \right) + P(0) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U_P - U_0}{\sqrt{2}\sigma} \right) =$$

$$P_{e \min, \text{pol}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U - 0}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{0 - (-U)}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

- Srednja snaga signala jednaka

$$P_{sr, \text{pol}} = P(1) \cdot (+U)^2 + P(0) \cdot (-U)^2 = \frac{1}{2} \cdot U^2 + \frac{1}{2} \cdot U^2 = U^2$$

- Verovatnoća greške je

$$P_{e \min, \text{pol}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{P_{pol}}{2\sigma^2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A_N}{2}} \right)$$

gde A_N označava odnos signal/šum na ulazu odlučivača (apsolutna vrednost)

Verovatnoća greške - binarni unipolarni NRZ signal

- U slučaju prenosa binarnog unipolarnog NRZ signala važi $U_1=+U$ i $U_0=0$
- Za $P(1)=P(0)=1/2$, optimalni napon praga postavljen je na sredini između naponskih nivoa koji odgovaraju simbolima 1 i 0, odnosno $U_{po}=U/2$. U tom slučaju, izraz za verovatnoću greške svodi se na

$$P_e = P(1) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U_1 - U_P}{\sqrt{2}\sigma} \right) + P(0) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U_P - U_0}{\sqrt{2}\sigma} \right)$$

$$P_{e \min, \text{unipol}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U - U/2}{\sqrt{2}\sigma} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U/2 - 0}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U}{2\sqrt{2}\sigma} \right)$$

- Srednja snaga signala jednaka

$$P_{sr, \text{unipol}} = P(1) \cdot (+U)^2 + P(0) \cdot 0^2 = \frac{U^2}{2}$$

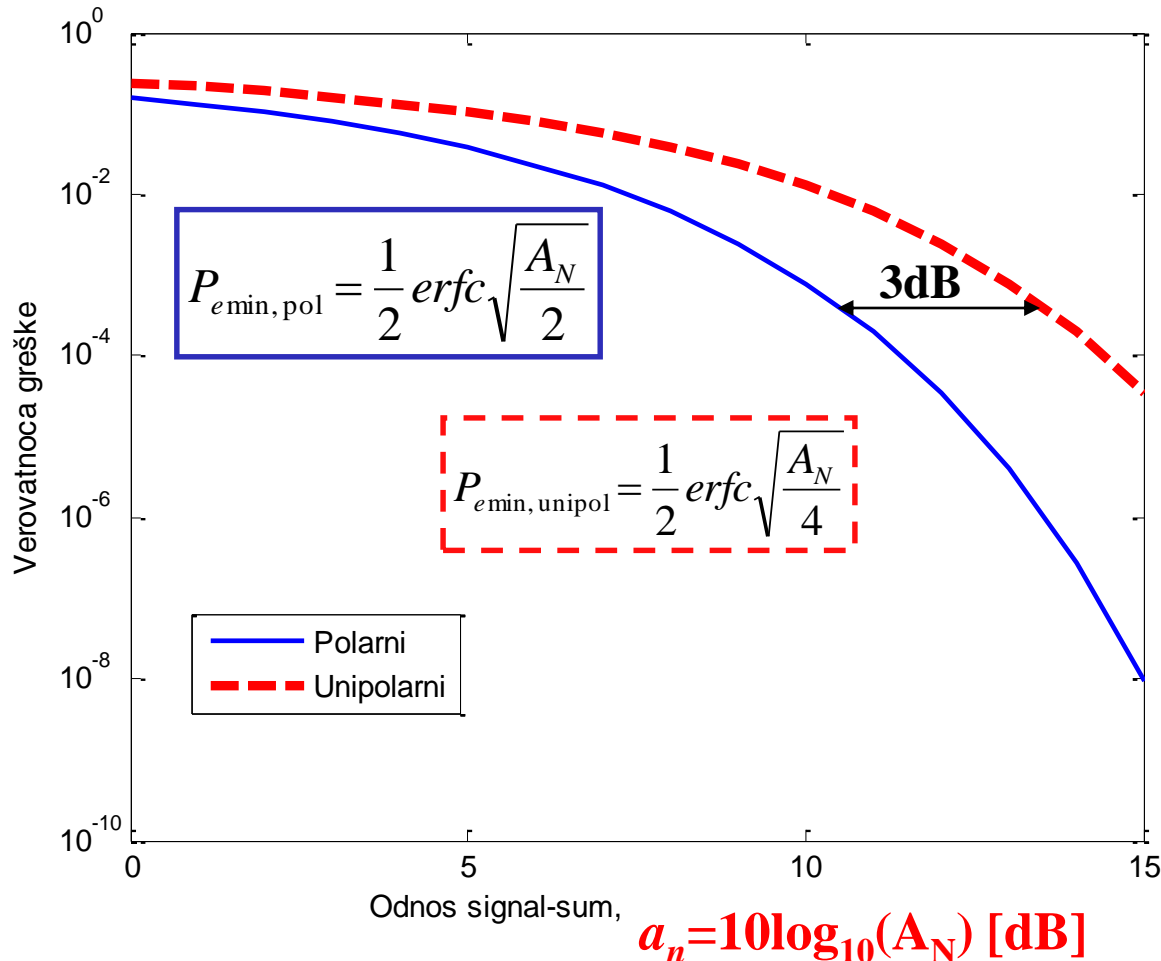
- Verovatnoća greške je

$$P_{e \min, \text{uni}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U}{2\sqrt{2}\sigma} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{P_{sr, \text{unipol}}}{4\sigma^2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{A_N}{4}} \right)$$

gde A_N označava odnos signal/šum na ulazu odlučivača (apsolutna vrednost)

Poređenje prenosa – polarni i unipolarni NRZ

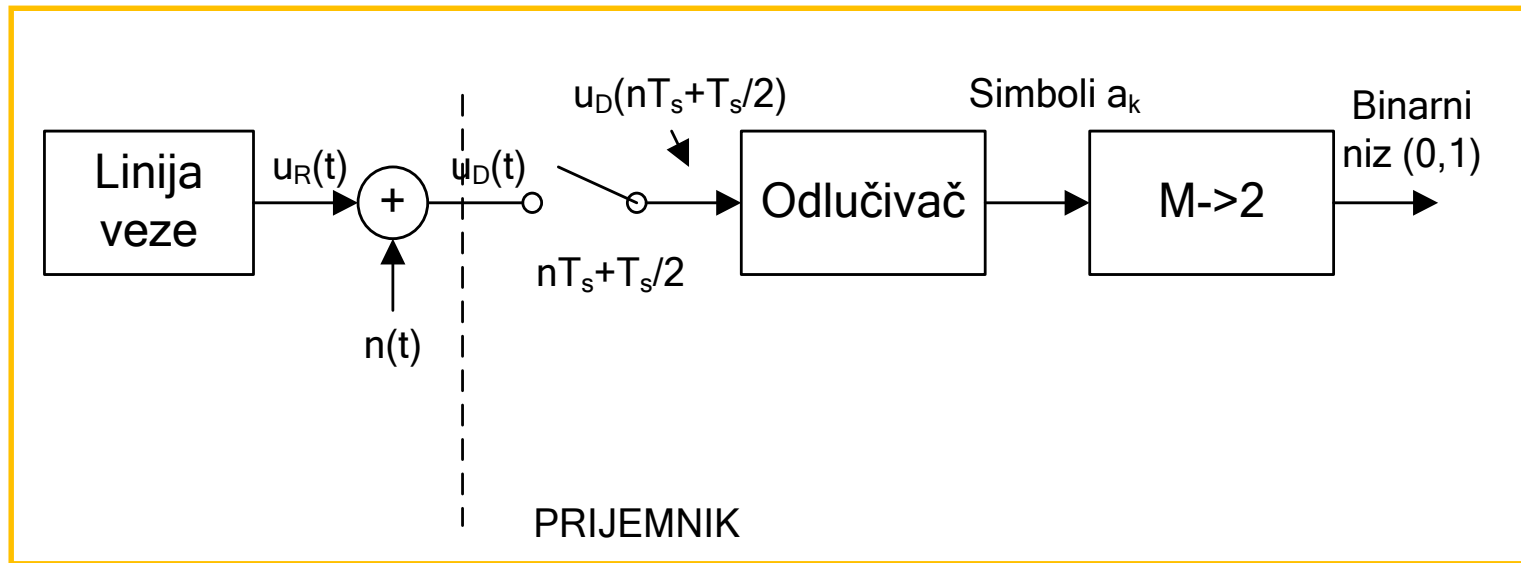
Zavisnost ukupne verovatnoće greške od odnosa signal/šum (izraženog u decibelima → $a_n = 10 \log_{10}(A_N)$ [dB]), na ulazu u prijemnik.



Za istu srednju snagu signala na prijemu, verovatnoća greške je manja u slučaju polarnog signaliziranja (argument $\operatorname{erfc}(\cdot)$ funkcije je dvostruko veći)

A_N označava odnos signal šum na ulazu odlučivača, izražen kao apsolutna vrednost
 $a_n = 10 \log_{10}(A_N)$ - odnos signal šum izražen u decibelima

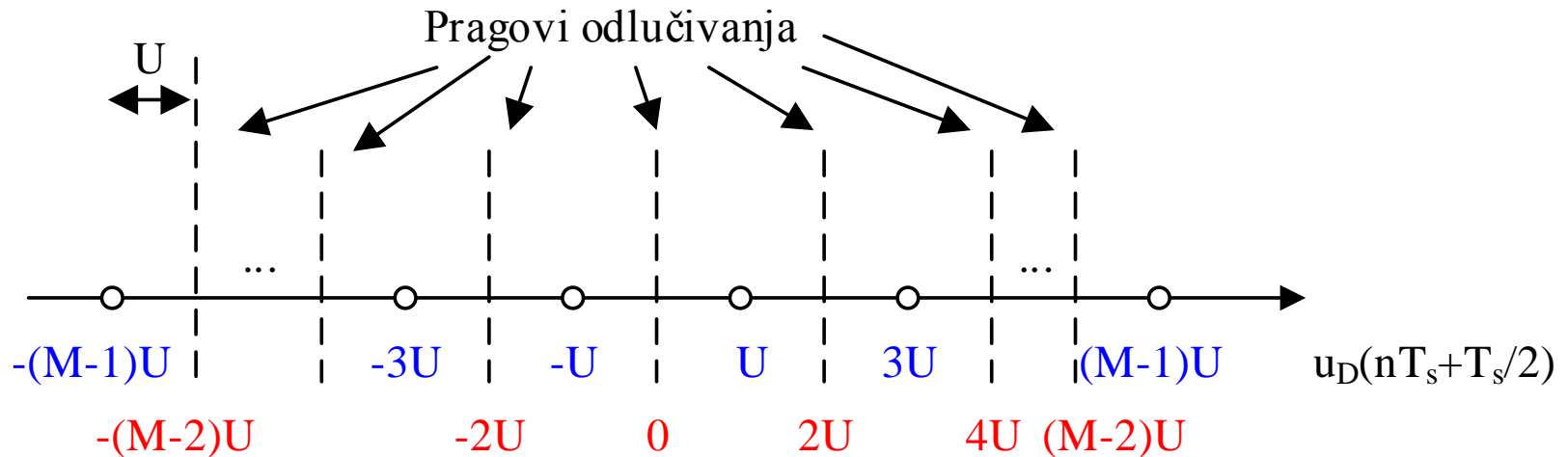
Prenos u OOU – M-arni prenos



Kao i u slučaju binarnog prenosa, u trenutku odabiranja odbirak signala $u_R(nT_s + T_s/2)$ predstavlja zbir odbirka korisnog signala i šuma:

$$u_D\left(nT_s + \frac{T_s}{2}\right) = u_R\left(nT_s + \frac{T_s}{2}\right) + u_N\left(nT_s + \frac{T_s}{2}\right)$$

Prenos u OOU – M-arni prenos



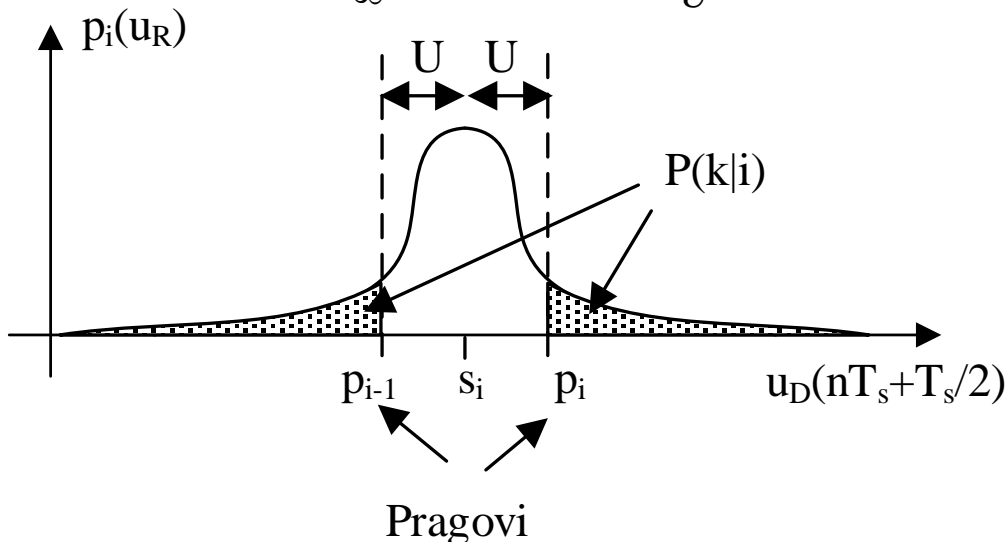
- Do greške pri prenosu M -arnih simbola dolazi u slučaju kada se pošalje i -ti simbol, a primi k -ti, pri čemu je $k \neq i$.
- Pretpostavlja se da su apriorne verovatnoće pojavljivanja svih simbola jednake $P_i = 1/M$, $i=1, \dots, M$.
- Ukupna verovatnoća greške po simbolu u slučaju M -arnog prenosa u OOU, $P_{e,M}$ predstavlja zbir pojedinačnih verovatnoća greške za 1, 2, ... M -ti simbol:

$$P_{e,M} = \sum_{i=1}^M P(i, k \neq i) = \sum_{i=1}^M P_i P(k \neq i | i), \quad P_i = \frac{1}{M}$$

Prenos u OOU – M-arni prenos

- Uslovne verovatnoće $P(k \neq i | i)$, mogu se podeliti na dve vrste, zavisno od položaja i -tog simbola. Ukupno $M-2$ simbola, svih osim krajnjih sa leve i desne strane (najmanjeg i najvećeg), na odlučivaču su sa obe strane ograničeni pragovima odlučivanja.
- Do greške pri prenosu ovih simbola s_i ($i=2, 3, \dots, M-1$) dolazi kada je odbirak šuma koji se dodaje na taj simbol manji od $-U$ ili je veći od $+U$ (rastojanje od simbola s_i do susednih pragova p_{i-1} i p_i jednako je U). Kao se može uočiti sa slike, sa povećanjem vrednosti U opada verovatnoća greške.

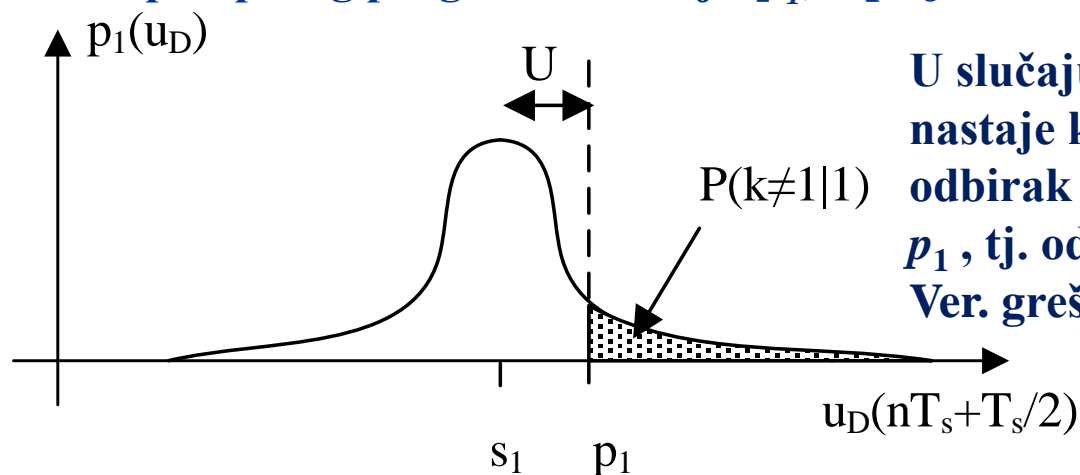
$$P(k \neq i | i) = \int_{-\infty}^{-U} p(u_N) du_N + \int_U^{\infty} p(u_N) du_N = 2 \times \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U}{\sqrt{2}\sigma} \right) = \operatorname{erfc} \frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$



**Ilustracija uslovne
gustine raspodele za
simbole s_2, s_3, \dots, s_{M-1}
odnosno simbole koji se
nalaze između dva praga
odlučivanja u prijemniku
M-arnog signala**

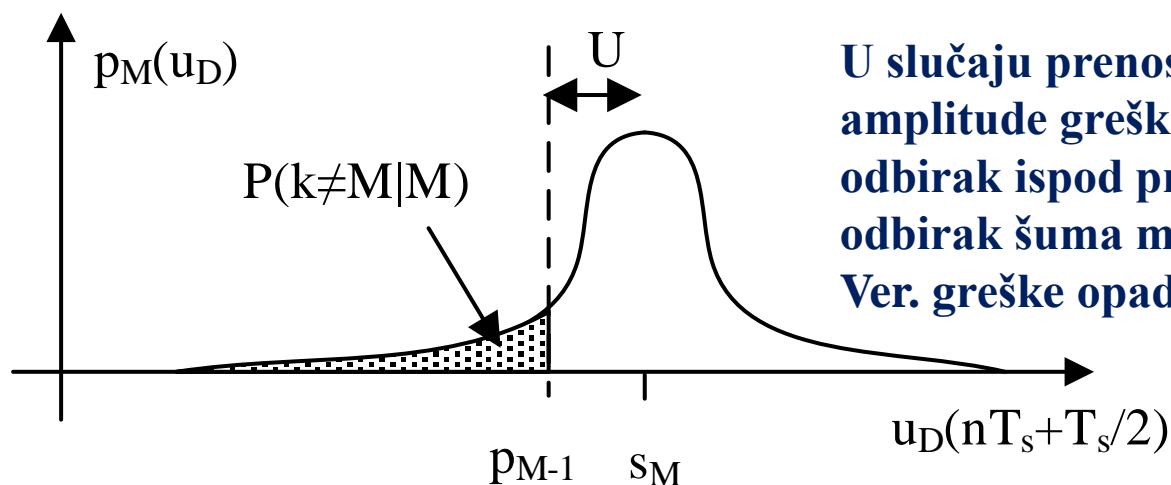
Verovatnoća greške– M-arni prenos

Ilustracija raspodele odbiraka za **prvi simbol s_1** (najmanje amplitude) koji se nalazi ispod prvog praga odlučivanja, p_1 , u prijemniku.



U slučaju prenosa simbola s_1 greška nastaje kada je odbirak šuma takav da se odbirak (signal + šum) nadje iznad praga p_1 , tj. odbirak šuma je veći od napona U . Ver. greške opada sa povećanjem napona U

Ilustracija raspodele odbiraka za **M-ti simbol s_M** (najveće amplitude) koji se nalazi iznad $(M-1)$ -og praga odlučivanja, p_{M-1} , u prijemniku.



U slučaju prenosa simbola s_M najveće amplitude greška nastaje kada je ukupan odbirak ispod praga odlučivanja p_{M-1} , tj. odbirak šuma manji od negativnog napona $-U$. Ver. greške opada sa povećanjem napona U .

Verovatnoća greške– M-arni prenos

- Za simbole s_I i s_M , dobija se ista vrednost verovatnoće greške, pošto je raspodela amplitude ABGŠ simetrična oko srednje (nulte) vrednosti, a rastojanja simbola od odgovarajućeg praga su jednaka.

$$P(k \neq 1 | 1) = \int_U^{\infty} p(u_N) du_N = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

$$P(k \neq M | M) = \int_{-\infty}^{-U} p(u_N) du_N = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

- Pretpostavlja se da su apriorne verovatnoće pojavljivanja svih simbola jednake $P_i = 1/M$, $i=1, \dots, M$.
- Srednja **verovatnoća greške po simbolu** pri M -arnom prenosu u OOU je

$$P_{e,M} = \sum_{i=1}^M P(i) P(k \neq i | i) = \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{U}{\sqrt{2}\sigma} + (M-2) \times \operatorname{erfc} \frac{U}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{U}{\sqrt{2}\sigma} \right]$$

$$P_{e,M} = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \frac{U}{\sqrt{2}\sigma}$$

Verovatnoća greške– M-arni prenos

- * Posmatra se prenos signala sa jediničnom snagom standardnog signala $x(t)$, $P_x = 1$, gde je $x(t)$ usamljeni pravougaoni impuls trajanja T_s jedinične amplitude tada važi sledeća veza amplitude U i srednje snage signala P_s

$$U^2 = P_s \frac{3}{M^2 - 1}$$

- * Izraz za **verovatnoću greške po simbolu (Symbol Error Rate, SER)** može se napisati u sledećem obliku:

$$P_{e,M} = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{3}{M^2-1} \frac{P_s}{2\sigma^2}} = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{3}{M^2-1} \frac{A_N}{2}}$$

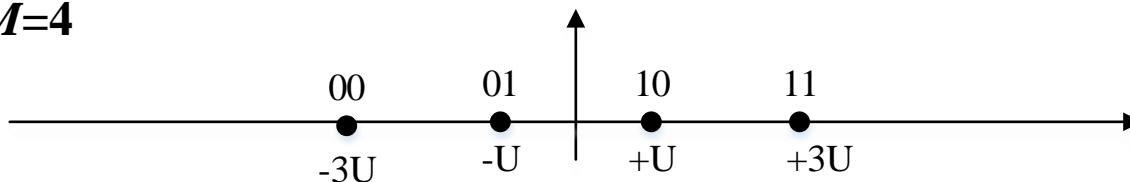
gde je P_s srednja snaga M -arnog signala na ulazu u prijemnik, σ^2 je srednja snaga ABGŠ na ulazu u prijemnik, M je broj M -arnih simbola, a A_N je odnos signal/šum na ulazu u prijemnik, $A_N = P_s / \sigma^2$.

- * **Verovatnoća greške po bitu (Bit Error Rate, BER)**, nakon prelaza sa simbola na bite u prijemniku, zavisi od toga na koji smo način u predajniku izvršili kodiranje (preslikavanje) grupa od $n = \log_2 M$ bita u simbole.

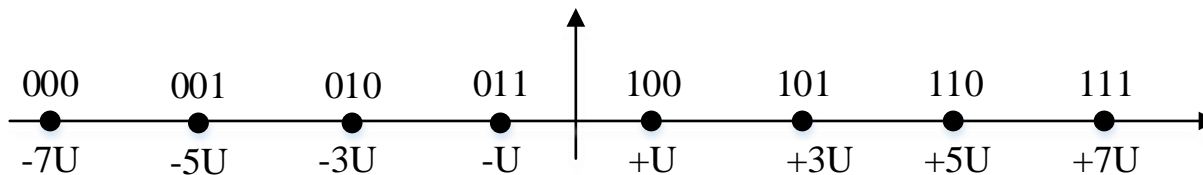
Prenos u OOU – M -arni prenos (binarni kod)

- * Pri prelazu sa binarnih na M -arne simbole, može se koristiti direktan način kodovanja (decimalni redni broj simbola koduje se binarnom kodnom reči).
- * Na osnovu izvođenja verovatnoće greške po simbolu, može se uočiti da se u najvećem broju slučajeva greške javljaju tako da se umesto i -tog simbola detektuju susedni, dakle $i+1$ ili $i-1$.
- * Nedostatak direktnog načina kodovanja, može se ilustrovati na primeru $M=8$
 - Pogrešno primljen $-5U$ (001) umesto $-7U$ (000) → jedan bit pogrešno prenet
 - Pogrešno primljen $-5U$ (001) umesto $-3U$ (010) → dva bita pogrešno prenet
 - Primljen $+U$ (100) umesto $-U$ (011) → sva tri bita u kodnoj reči su pogrešna.

$M=4$



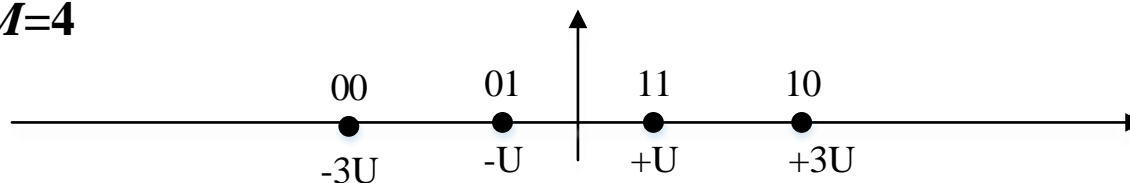
$M=8$



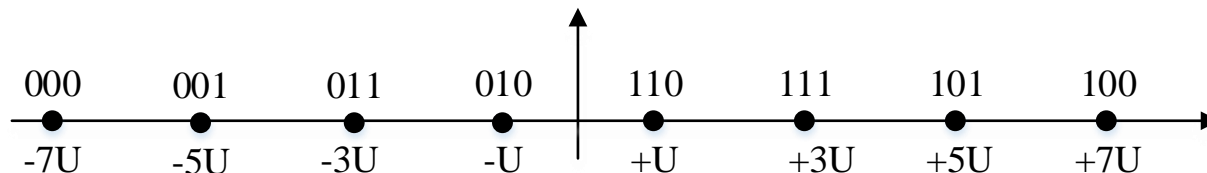
Prenos u OOU – M-arni prenos (*Grejev kod*)

- * Kod *Grejevog* (*Gray*) koda preslikavanje je izvršeno na takav način da se *susedni simboli razlikuju samo za jedan bit*.
- * Kada su simboli kodovani na ovde prikazan način, ukoliko dođe do greške i umesto bilo kog simbola se donese pogrešna odluka da je poslat neki od susednih simbola (upravo takve greške se najčešće javljaju!), kao posledica ove odluke doći će do greške na samo jednom prenetom bitu

$M=4$



$M=8$



Prenos u OOU – M-arni prenos (*Grejev kod*)

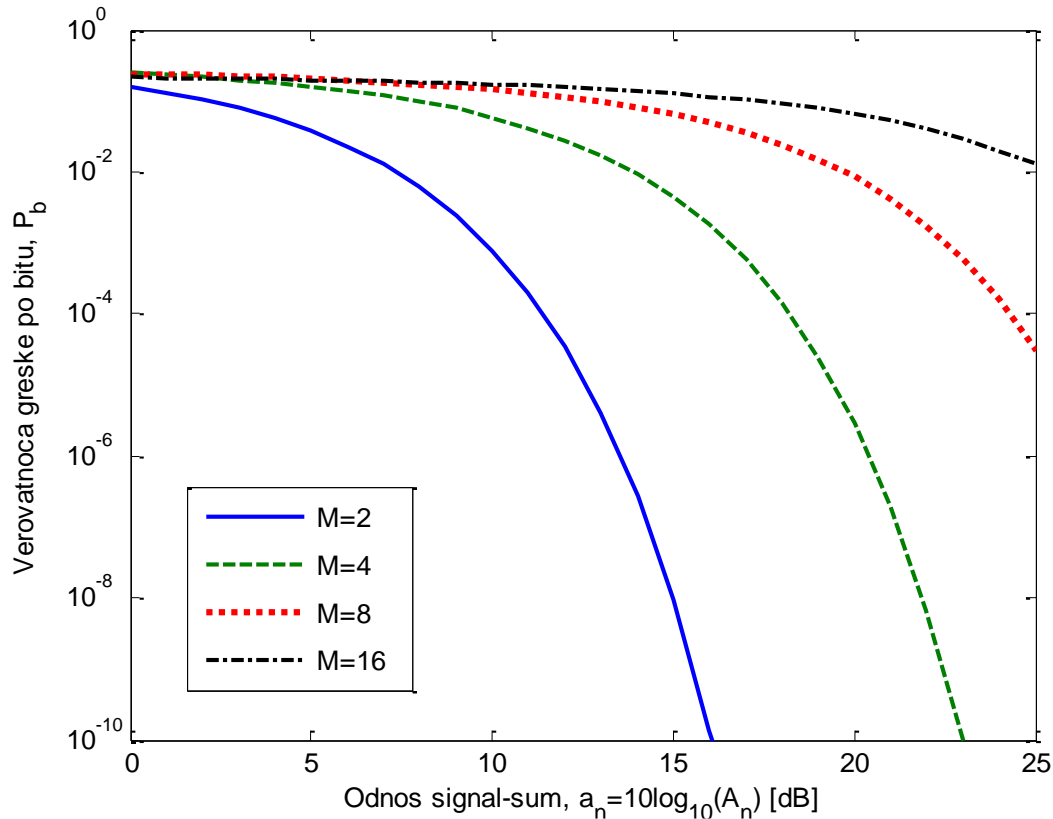
- * U slučaju primene Grejevog koda, ukoliko dođe do greške pri prenosu simbola, u proseku je samo jedan od $\log_2 M$ bita pogrešno prenet pa je verovatnoća greške po bitu približno $\log_2 M$ puta manja od verovatnoće greške po simbolu, odnosno jednaka je

$$P_{e,b} \approx \frac{1}{\log_2 M} P_{e,M}$$

- * Na osnovu prethodno izvedenih izraza za verovatnoću greške po simbolu, verovatnoća greške po bitu se tada može napisati u sledećem obliku

$$P_{e,b} = \frac{1}{\log_2 M} P_{e,M} = \frac{M-1}{M \log_2 M} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{3}{M^2-1} \frac{A_N}{2}}$$

Prenos u OOU – M-arni prenos



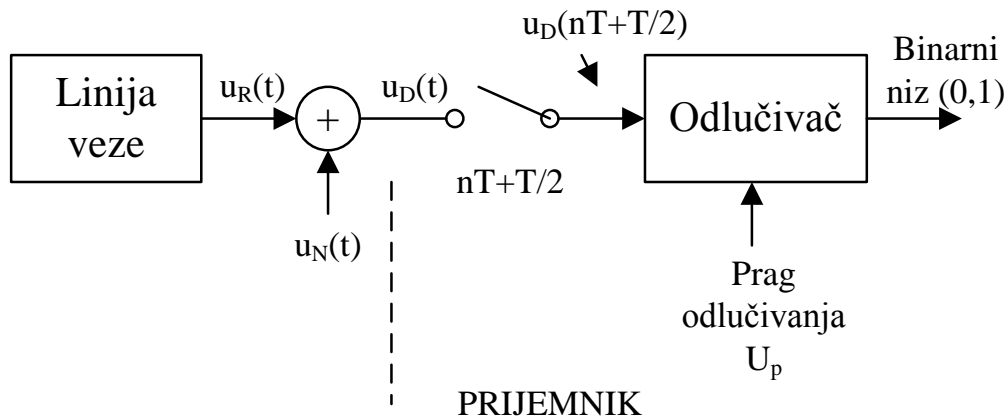
Na slici su, prikazane verovatnoće greške po bitu za binarni signal ($M=2$), kao i za višenivovske signale ($M=4, 8, 16$). Za isti odnos signal/šum A_N na ulazu u prijemnik, za veće M dobija se značajno veća vrednost verovatnoće greške.

Sa povećanjem broja nivoa M smanjuje se opseg učestanosti potreban za prenos (za isti binarni protok) ili se za isti opseg učestanosti f_c i neizmenjenu brzinu signaliziranja $V_S = 2f_c$ postiže veći ekvivalentni binarni protok $V_b = V_S \times \log_2(M) = 2f_c \times \log_2(M)$.

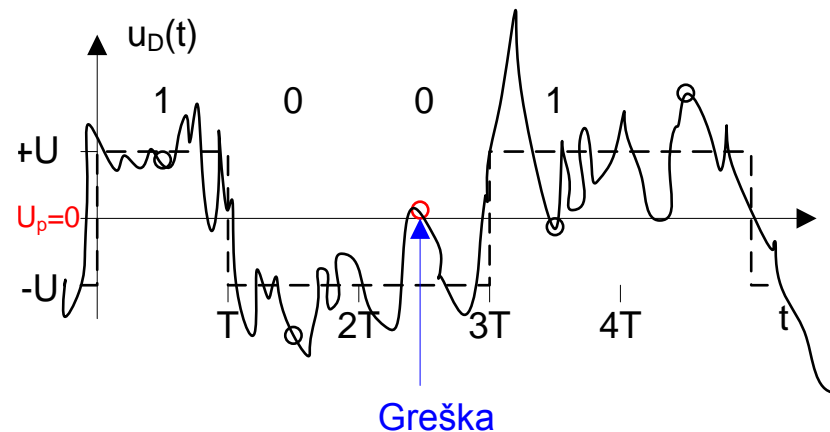
U praksi se obično bira najveći mogući broj nivoa M za koji se postiže verovatnoća greške ispod nekog unapred zadanog nivoa, za posmatrani odnos signal/šum.

Odlučivanje na osnovu jednog odbirka

- Zbog uticaja šuma, odlučivač u prijemniku nekad pogreši u prepoznavanju bita koje je poslao predajnik.
- Uticaj grešaka se izražava kroz verovatnoću greške u odlučivanju, P_e .
- Neka je prijemnik realizovan kroz proces odabiranja i odlučivanja, pri čemu je pretpostavljeno da je ISI eliminisan.



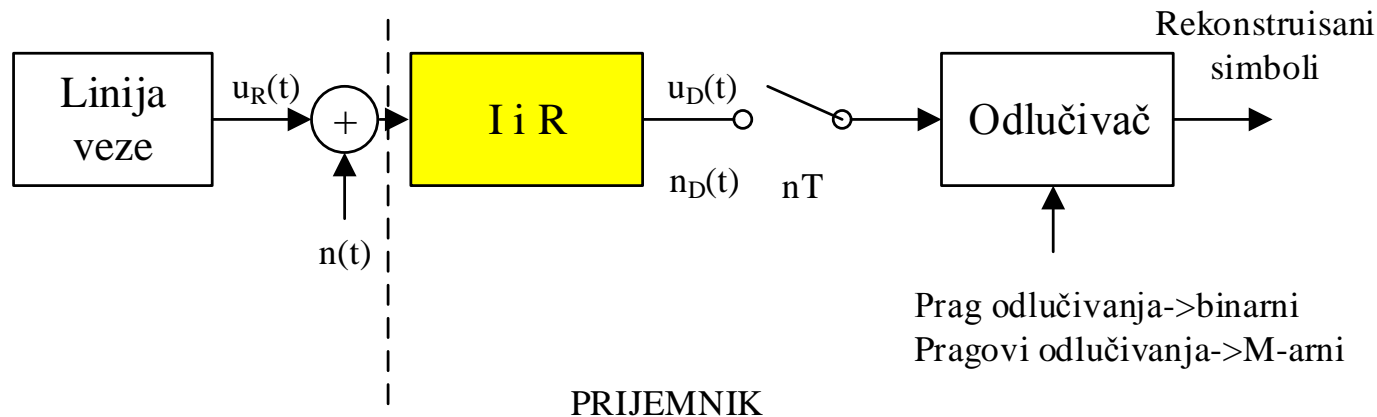
Usled dejstva šuma dolazi do grešaka pri prenosu signala



Optimalno odlučivanje

- * **Kako odabrati trenutak u kome se uzima odbirak za odlučivanje?**
 - To je obično polovina signalizacionog intervala, tj. trenutak $t=T/2+nT$
 - U tom trenutku se odziv na pobudni impuls uspostavio a još nije počeo da opada,
 - Za neku drugu vrstu aditivne smetnje (smetnja može biti i nešto drugo, a ne samo šum), neki drugi trenutak može biti povoljniji za odlučivanje
 - Opisani postupak nije optimalan, čak i kada je trenutak uzimanja odbirka optimalno određen!
- * **Bolji rezultati bi se dobili kada bi odbirak na osnovu kojeg se donosi odluka zavisio od celokupnog vremenskog oblika primljenog signala tokom jednog signalizacionog intervala → cilj je da se *prijemni signal obradi tako da odnos korisnog signala i šuma na ulazu u odabirač bude što je moguće veće vrednosti***
 - Za signaliziranje pravougaonim impulsima, optimalno je integraliti primljeni signal tokom svakog signalizacionog intervala.
 - U slučaju jednakoverovatnih binarnih simbola, rezultat integraljenja se poredi sa nulom za slučaj polarnog signaliziranja (u opštem slučaju sa nekim pragom).

Integrator sa rasterećenjem



- Integrator sa rasterećenjem (I i R) - prijemni filter pre odabirača
- I i R određuje integral ukupnog signala (koristan signal + ABGŠ) na ulazu u prijemnik u trajanju signalizacionog intervala T .
- Na ovaj način **sakuplja se energija korisnog signala, usrednjava šum!**
- Vrednost signala na izlazu I i R na kraju signalizacionog intervala trajanja T , utiče na **celokupan vremenski oblik primljenog signala tokom intervala trajanja T**
- Rezultat integracije se na početku signalizacionog intervala postavlja na nultu vrednost (integrator *sa rasterećenjem*). Postupak se može primeniti i za binarni i za M -arni prenos. Kada se signaliziranje vrši pravougaonim impulsima $x(t)$ trajanja T , ovakav prijemnik je *optimalan*, tj. daje minimalnu vrednost verovatnoće greške

Integrator sa rasterećenjem

- * Izrazi za verovatnoću greške za slučaj polarnog signaliziranja

$$P_{e,polarni} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{P_N}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{U^2 T}{P_N}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{U^2}{P_N V}}\right)$$

- * Verovatnoća greške može da se napiše u funkciji sledećih veličina

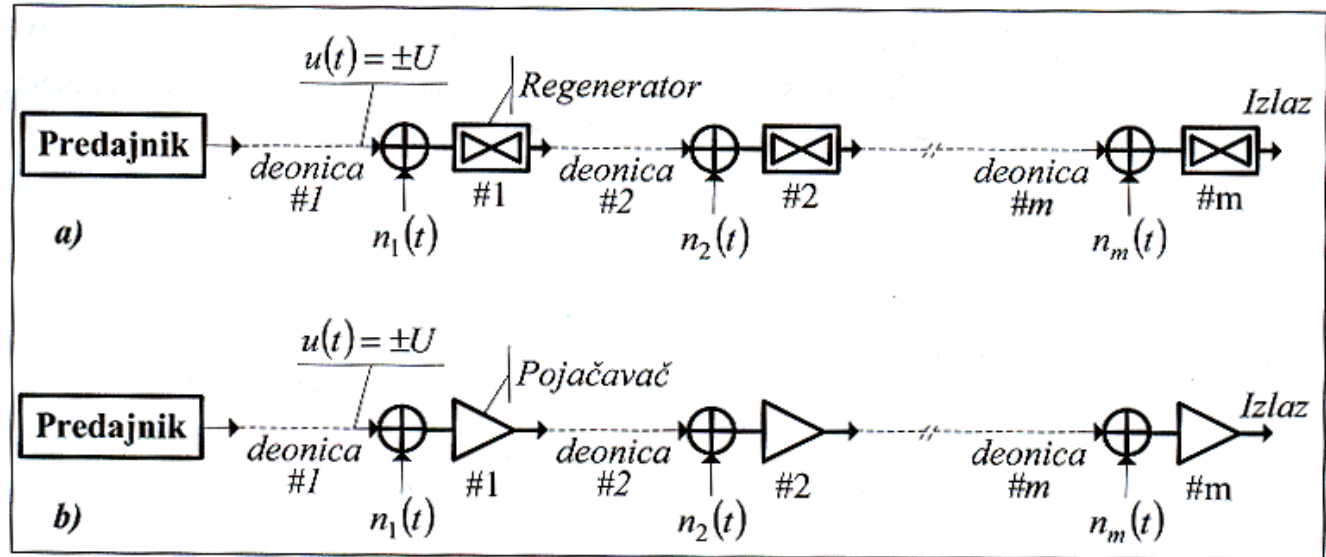
- Energije po bitu E_b (uvek važi $E_b = PT = P/V$, gde je P snaga, T signalizacioni interval, V brzina signaliziranja; snaga polarnog signala $P = U^2$)
- Spektralne gustine srednje snage šuma na ulazu u prijemnik p_N ($p_N = \text{const.}$)

- * Za fiksnu snagu signala na ulazu u prijemnik P , verovatnoća greške se smanjuje sa porastom trajanja signalizacionog intervala T

- Verovatnoća greške se smanjuje sa smanjenjem brzine signaliziranja $V = 1/T$.

Regeneratori i pojačavači

- * Značajan efekat na prenos signala osim dejstva šuma i intersimbolske interferencije ima i **slabljenje signala**.
- * Kao posledica slabljenja, prenos digitalnih signala sa prihvatljivom vrednošću verovatnoće greške (dovoljno malom) je realno moguć samo do određenog rastojanja
- * Iz tog razloga, ukupna dužina linije veze deli se na više *deonica* (tako da ukupna verovatnoća greške pri prenosu ima željenu vrednost)
- * Može se koristiti pristup sa korišćenjem:
 - **Regeneratora**
 - **Pojačavača**



Regeneratorske stanice

- * Primena regeneratorskih stanica moguća samo za prenos digitalnih signala
- * Posle svake deonice koristi se regenerator koji rekonstruiše signal i emituje ga na sledeću deonicu. Ovim postupkom uklanja se uticaj šuma, ali se pri svakoj rekonstrukciji signala može napraviti greška
- * Verovatnoća greške na svakom od m regeneratora je $P_{e,1}$
- * Kako se signal prenosi pod sredstvom više regeneratorskih stanica, može doći do pojave više grešaka. Ukoliko je *ukupan* broj grešaka:
 - **Paran** → na kraju veze bit koji se prenosi će biti tačan (ovaj zaključak važi samo za binarne signale)!
 - **Neparan** → bit koji se prenosi neće biti ispravno prenet
- * Ukupna verovatnoća greške u sistemu sa regeneratorima jednaka je verovatnoći da tokom prenosa signala dođe do neparnog broja grešaka

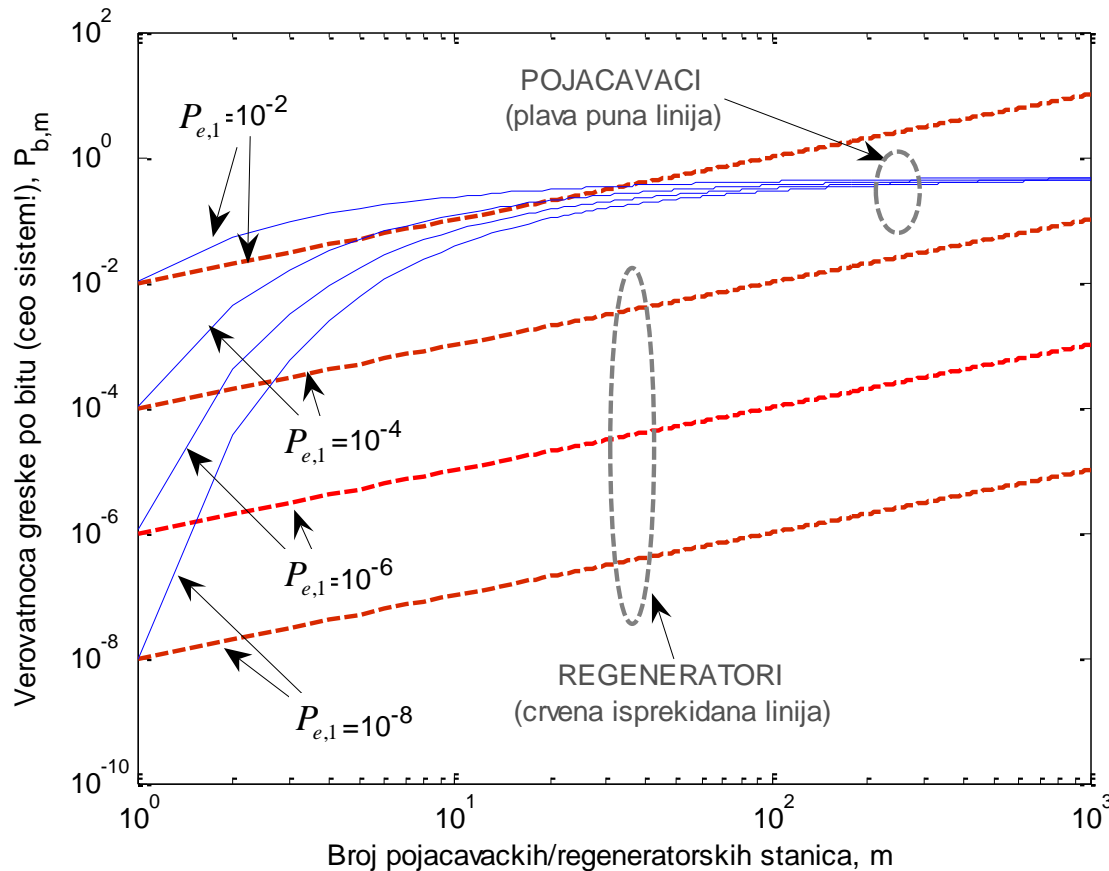
$$P_e = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{neparno } k}}^m \binom{m}{k} \cdot P_{e,1}^k (1 - P_{e,1})^{m-k} = \binom{m}{1} \cdot P_{e,1}^1 (1 - P_{e,1})^{m-1} + \binom{m}{3} \cdot P_{e,1}^3 (1 - P_{e,1})^{m-3} + \dots$$

- * Ukoliko je vrednost verovatnoće greške na jednoj deonici dovoljno mala i važi $P_{e,1} \ll 1$, može se koristiti aproksimacija

$$P_{e,m} \approx mP_{e,1}$$

Regeneratori i pojačavači

- Regeneratorski pristup ne dovodi do akumulacije šuma → jedna od najvažnijih prednosti korišćenja digitalnih signala!
- Pojačava se signal ali i šum (na ulazu u n -ti pojačavač, snaga šuma je n puta veća u odnosu na prvi pojačavač → kumulativni uticaj šuma)



Primena regeneratora

$$P_{e,b} \approx m \cdot P_{e,1}$$

Primena pojačavača

$$P_{e,b} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{A_N}{2m}}$$