1. Kretanje materijalne tačke (MT) u xy ravni zadato je pomoću radijus vektora: $\vec{r} = (At - B)\vec{e}_x + (C - Dt^2)\vec{e}_y$. Odrediti brzinu i ubrzanje MT. Odrediti trajektoriju MT. Odrediti trenutak kada MT seče x osu. Odrediti tangencijalno i normalno ubrzanje, kao i poluprečnik krivine trajektorije u tom trenutku.

$$x(t) = At - B \qquad v_x = \frac{dx}{dt} = A$$

$$y(t) = C - Dt^2 \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = -2Dt$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2D$$

$$\vec{v} = A\vec{e_x} - 2Dt\,\vec{e_y}$$

$$\vec{a} = -2D\,\vec{e_y}$$

---

$$t = \frac{x+B}{A}$$

$$y(x) = C - \frac{D}{A^2}\left(x^2 + 2Bx + B^2\right) =$$

$$= -\frac{D}{A^2}x^2 - \frac{2BD}{A^2}x + C - \frac{DB^2}{A^2}$$ parabola

$$y(T) = 0 \qquad T_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{C}{D}} = \sqrt{\frac{C}{D}}$$

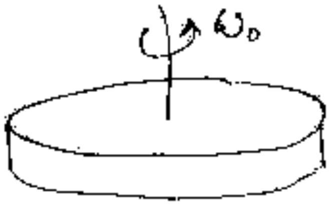
$$a_\tau = \frac{\vec{a}\,\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{4D^2 t}{\sqrt{A^2 + 4D^2t^2}} \qquad a_\tau(T) = \frac{4D^{\frac{3}{2}}\sqrt{C}}{\sqrt{A^2 + 4DC}}$$

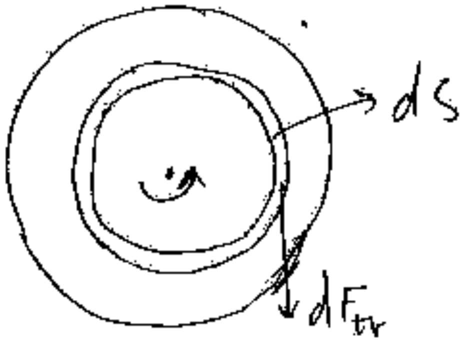
$$a_N = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4D^2 - \frac{16D^3C}{A^2+4DC}} = \sqrt{\frac{4A^2D^2}{A^2+4DC}}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \qquad R = \frac{v^2}{a_N}$$

$$R = \sqrt{\frac{(A^2 + 4DC)^3}{4A^2D^2}}$$

75. зб. пр. Хомогени диск масе $m$ полупречника $R$ се окреће угаоном брзином $\omega_0$ и поставља се на хоризонталну подлогу. Ако је коефицијент трења $\mu$ одредити време заустављања диска.




$$dF_{tr} = \mu g \, dm$$

$$dm = \frac{m}{R^2\pi} 2r\pi \, dr$$

$$dM = r \, dF_{tr} = 2\mu g \frac{m}{R^2} r^2 dr \quad \Big/ \int$$

$$M = \frac{2\mu g m}{R^2} \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3}\mu g m R = -I\alpha$$

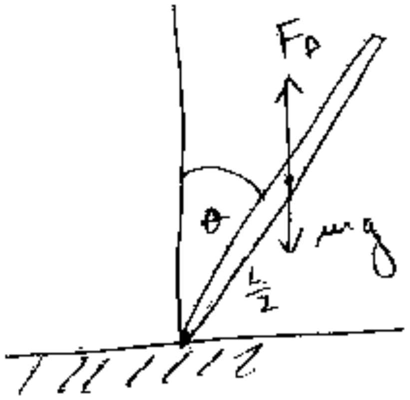
$$\frac{2}{3}\mu g m R = -\frac{mR^2}{2}\alpha$$

$$\alpha = -\frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = 0 \Rightarrow T = -\frac{\omega_0}{\alpha}$$

$$T = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}$$

3. Tanak, homogen, drveni štap, dužine $L$, gustine $\rho_D$, potpuno je potopljen u vodu i kraj štapa je pokretnim zglobom pričvršćen za dno bazena. Ako se viskoznost vode i trenje u zglobu mogu zanemariti odrediti period malih oscilacija štapa.




$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = \frac{L}{2} \sin\theta \left( F_p - mg \right)$$

$$\frac{L}{2} \sin\theta \left( V\rho_V g - V\rho_D g \right) = -I\alpha = -I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I = \frac{mL^2}{3} = \frac{1}{3} V\rho_D L^2$$

$$\sin\theta \approx \theta \quad (\theta \to 0)$$

$$\frac{\cancel{L}}{2} \theta \cancel{V} (\rho_V - \rho_D) g = -\frac{1}{3} \cancel{V} \rho_D L^{\cancel{2}} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{3}{2} \frac{\rho_V - \rho_D}{\rho_D} \frac{g}{L}}_{\omega^2} \theta = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho_V - \rho_D}{\rho_D} \frac{g}{L}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3} \frac{L}{g} \frac{\rho_D}{\rho_D - \rho_D}}$$

4. Žica mase $m$, dužine $L$ zategnuta je između dve tačke. Žica osciluje na frekvenciji osnovnog harmonika. Mikrofon koji se odaljava od žice brzinom $v$ detektuje frekvenciju $f$. Ako je brzina zvuka u vazduhu $c$ odrediti silu kojom je zategnuta žica.

$$\frac{\lambda}{2} = L \qquad \lambda = 2L$$

$$\lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{1}{f_0}\sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{1}{f_0}\sqrt{\frac{FL}{m}}$$

$$\frac{1}{f_0}\sqrt{\frac{FL}{m}} = 2L \quad /^2$$

$$\frac{1}{f_0^2}\frac{F\cancel{L}}{m} = 4L^{\cancel{2}}$$

$$F = 4mLf_0^2$$

$$f = \frac{c-v}{c} f_0$$

$$f_0 = \frac{c}{c-v} f$$

$$F = 4mL\left(\frac{c}{c-v}\right)^2 f^2$$

5. Na integrisano kolo postavljen je hladnjak, a između kola i hladnjaka silikonska pasta za termičku spregu. Neka se termička otpornost između hladnjaka i ambijenta menja po zakonu $\theta_{HA}(v) = \dfrac{\theta_{HA0}}{1+kv}$, gde je $\theta_{HA0} = 82\mathrm{K/W}$, $k = 10\mathrm{s/m}$ i $v$ je brzina strujanja fluida. Ostale termičke otpornosti su konstantne. Temperatura ambijenta je $t_A = 20^\circ\mathrm{C}$. Temperatura spoja u slučaju prirodne konvekcije ($v = 0$) i disipirane snage $P_1 = 1\mathrm{W}$ je $t_J = 180^\circ\mathrm{C}$. Ako se snaga disipacije poveća na $P_2 = 2\mathrm{W}$ i zadrži temperatura spoja istom, kolika treba da je brzina strujanja fluida pored hladnjaka?

Rešenje:

$P_1 = \dfrac{T_J - T_A}{\theta_{JC} + \theta_{CH} + \theta_{HA0}}$, $P_2 = \dfrac{T_J - T_A}{\theta_{JC} + \theta_{CH} + \theta_{HA0}/(1+kv_2)}$. Iz prethodnih jednačina sledi

$$v_2 = \frac{1}{k}\left[\frac{\theta_{HA0}}{\theta_{HA0} - (t_J - t_A)(1/P_1 - 1/P_2)} - 1\right] = 4\mathrm{m/s}.$$

6. Konkavno sferno ogledalo poluprečnika krivine $R$, postavljeno je horizontalno. Na rastojanju $p=2R$ od temena ogledala nalazi se mali svetao predmet. Kada se ogledalo napuni vodom indeksa prelamanja $n_V = 4/3$ položaj lika se pomeri. Odrediti relativnu promenu rastojanja lika u odnosu na situaciju kada u ogledalu nema vode.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

$$\ell = \frac{Rp}{2p-R} = \frac{2}{3}R$$

---

Светлост пролази кроз водено сочиво, рефлектује се и затим пролази кроз водено сочиво.

$$\frac{1}{f_e} = \frac{1}{f_v} + \frac{2}{R} + \frac{1}{f_v}$$

$$\frac{1}{f_v} = \left(\frac{n_v}{1} - 1\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{3R}$$

$$\frac{1}{f_e} = \frac{2}{3R} + \frac{2}{R} = \frac{8}{3R}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell'} = \frac{1}{f_e} = \frac{8}{3R}$$

$$\frac{1}{\ell'} = \frac{8}{3R} - \frac{1}{2R} = \frac{13}{6R} \Rightarrow \ell' = \frac{6R}{13}$$

$$\delta = \frac{\ell' - \ell}{\ell} = \frac{\frac{6}{13} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{4}{13} \approx -30{,}77\%$$