



PRINCIPI MODERNIH TELEKOMUNIKACIJA

*Elektrotehnički fakultet
Katedra za telekomunikacije
Beograd, 2020/2021.*

Zadatak 1 (1)

U posmatranom sistemu vrši se prenos binarnog signala čiji je protok jednak V_b , pri čemu je prosečna vrednost verovatnoće greške po bitu na izlazu iz prijemnika jednaka P_e . Odrediti prosečno vremensko rastojanje između dva uzastopna pogrešno primljena binarna simbola za sledeće slučajeve:

- a) $V_b=1.024\text{Mb/s}, P_e=10^{-7}$;
- b) $V_b=1.024\text{Mb/s}, P_e=5 \cdot 10^{-7}$;
- c) $V_b=2.048\text{Mb/s}, P_e=10^{-7}$.

Rešenje:

Prosečno vremensko rastojanje između dva pogrešno primljena binarna simbola zavisi od prosečne vrednosti verovatnoće greške i signalizacionog intervala binarnog signala T (tj. protoka binarnog signala V_b , $T=1/V_b$).

Zadatak 1 (2)

Verovatnoća greške određuje na koliko bita će se prosečno pojaviti jedan pogrešan \Rightarrow u proseku se na svakih n bita pojavljuje jedna greška, gde je

$$n = \frac{1}{P_e}$$

Prosečno vremensko rastojanje između dva pogrešno prenetih bita zavisi i od dužine trajanja signalizacionog intervala binarnog signala T i jednako je

$$t_n = nT = n \frac{1}{V_b}$$

a) Verovatnoća greške po bitu je $P_e=10^{-7}$ pa će se u proseku pojaviti jedan pogrešan bit na svakih $n=10^7$ bita. Kako je trajanje signalizacionog intervala jednako $T=1/(1.024\text{Mb/s})=9.7656\mu\text{s}$, prosečno rastojanje je

$$t_n = nT = \frac{n}{V_b} = \frac{10^7}{1.024\text{Mb/s}} = 9.7656\text{s}$$

Zadatak 1 (3)

b) **Verovatnoća greške po bitu je 5 puta veća** nego u slučaju pod a), pa je prosečan broj bita između dva pogrešno prenetih simbola 5 puta manji

$$n = \frac{1}{P_e} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-7}} = 2 \cdot 10^6$$

Trajanje signalizacionog intervala je isto kao pod a), $T = 9.7656 \mu$, pa je **prosečan vremenski interval između dve greške 5 puta kraći** u odnosu na slučaj pod a)

$$t_n = nT = \frac{2 \cdot 10^6}{1.024 \text{ Mb/s}} = 1.9531 \text{ s}$$

c) Verovatnoća greške po bitu je ista kao u slučaju pod a), pa je u proseku pogrešan jedan bit na svakih $n = 10^7$ bita. **Protok binarnog signala je dva puta veći** u odnosu na slučaj pod a), odnosno trajanje signalizacionog intervala je dvostruko manje i iznosi $T = 1/(2.048 \text{ Mb/s}) = 4.8828 \mu$ s. **Prosečan vremenski interval između pogrešno prenetih bita je dva puta kraći i jednak**

$$t_n = nT = \frac{n}{V_b} = \frac{10^7}{2.048 \text{ Mb/s}} = 4.8828 \text{ s}$$

Zadatak 2 (1)

Posmatra se prenos binarnog polarnog NRZ signala, kod kojeg su verovatnoće pojave binarnih simbola 1 i 0 jednake ($P_0=P_1$).

Prijemnik je realizovan kao integrator sa rasterećenjem, iza koga slede odabirač i odlučivač (sa optimalnim pragom odlučivanja). Amplituda binarnog polarnog signala na ulazu u prijemnik je $U=0.02V$.

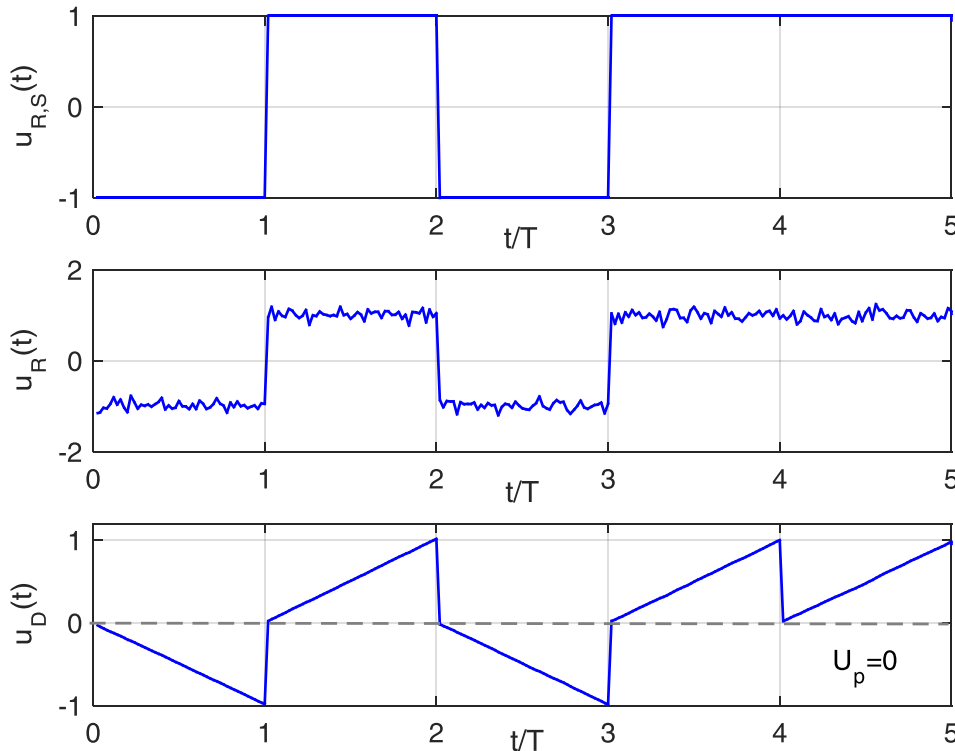
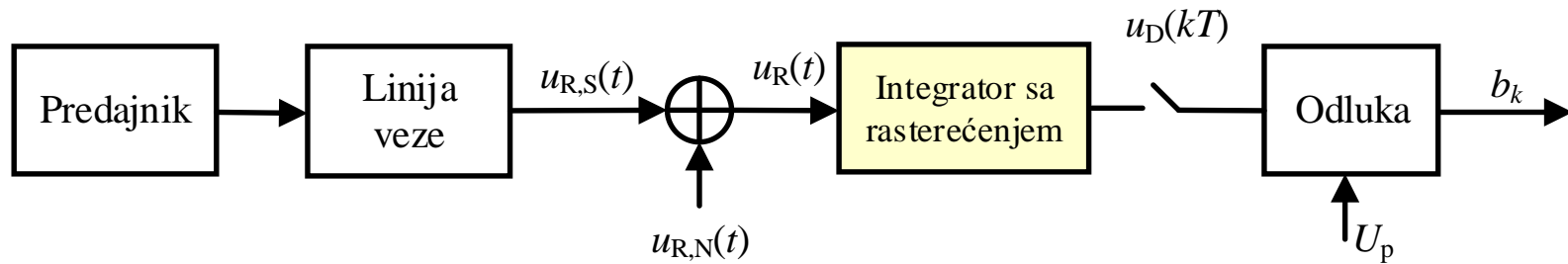
Na ulazu u prijemnik sa integracijom i rasterećenjem postoji i dejstvo ABGŠ čija je spektralna gustina srednje snage jednaka $p_N=10^{-10}[W/Hz]$. Izračunati verovatnoću greške kao i širinu propusnog opsega potrebnog za prenos signala po kriterijumu prve nule u spektru, za sledeće vrednosti trajanja signalizacionog intervala

a) $T=1\mu s$

b) $T=2\mu s$

c) $T=3\mu s$

Zadatak 2 (2)



Polarni binarni NRZ signal, amplitude signala $\pm U$

Prijemni signal degradiran dejstvom šuma, na ulazu u integrator sa rasterećenjem

Signal na izlazu integratora sa rasterećenjem

Odluka o poslatom binarnom simbolu b_k donosi se na kraju k -tog intervala signalizacije, na osnovu odbirka signala $u_D(kT)$

Zadatak 2 (3)

Vrednosti korisnog signala na izlazu integratora sa rasterećenjem u trenutku odabiranja i odlučivanja (nakon integracije u intervalu trajanja T)

$$u_D(kT) = \int_0^T \pm U dt = \begin{cases} U_{D1} = +UT, & \text{prenosi se binarni simbol 1,} \\ U_{D0} = -UT, & \text{prenosi se binarni simbol 0.} \end{cases}$$

Verovatnoća pojave binarnog simbola 1 (predstavlja se naponskim nivoom $+U$) je P_1 , a verovatnoća pojave binarnog simbola 0 (predstavlja se naponskim nivoom $-U$) je P_0 .

Ako su $P_0 = P_1 = 1/2$, tada je optimalan prag odlučivanja $U_{p,opt} = 0$

Može se pokazati da je snaga šuma na izlazu integratora sa rasterećenjem

$$\sigma_D^2 = p_N T / 2$$

Srednja snaga binarnog polarnog signala jednaka je $P_S = U^2$.

Srednja **energija po bitu binarnog polarnog signala** može se odrediti na sledeći način

$$E_b = P_0 \cdot E_0 + P_1 \cdot E_1 = \frac{1}{2} (-U)^2 T + \frac{1}{2} \cdot (U)^2 T = U^2 T = P_S T$$

Zadatak 2 (4)

Verovatnoća greške pri odlučivanju

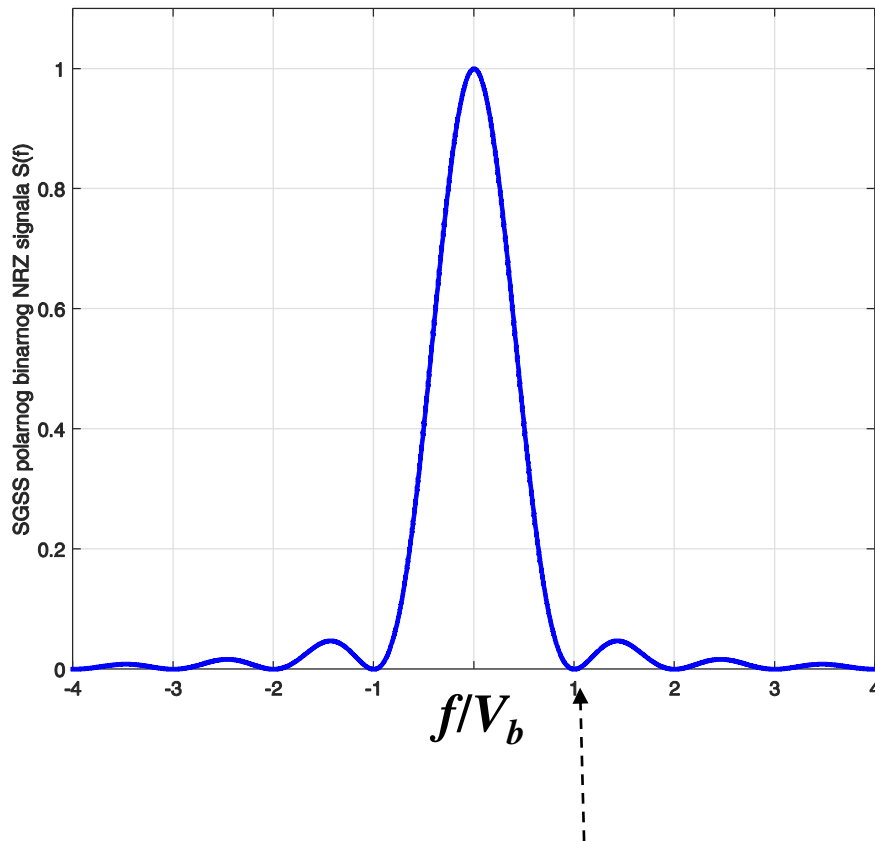
$$\begin{aligned} P_e &= P_1 \times \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U_{D1} - U_{p,\text{opt}}}{\sqrt{2}\sigma_D} \right) + P_0 \times \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{U_{p,\text{opt}} - U_{D0}}{\sqrt{2}\sigma_D} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{UT - 0}{\sqrt{2}\sigma_D} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{0 - (-UT)}{\sqrt{2}\sigma_D} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{U^2 T}{p_N}} \right) \end{aligned}$$

Verovatnoća greške na izlazu integratora sa rasterećenjem u slučaju polarnog NRZ signaliziranja data je izrazom

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{U^2 T}{p_N}}$$

gde je E_b energija po bitu (energija binarnog digitalnog signala u toku trajanja jednog signalizacionog intervala T , u okviru kojeg se prenosi jedan binarni simbol), dok je p_N spektralna gustina snage šuma na ulazu u prijemnik.

Zadatak 2 (5)



učestanost $f=V_b$ na kojoj je
prva nula u spektru signala

$$S_{u,PNRZ}(f) = U^2 T \left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2$$

Širina koju zauzima binarni polarni NRZ signal je beskonačna, ali se veliki deo snage signala nalazi na učestanostima do „prve nule“ u spektru koja je u slučaju polarnog binarnog signala na $f=V_b$.
Po kriterijumu prve nule u spektru signala, širina propusnog opsega pri prenosu binarnog polarnog (isto važi i za unipolarni) jednaka je

$$B=V_b$$

Zadatak 2 (6)

a) Verovatnoća greške jednaka je

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{U^2 T}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{(0.02V)^2 1 \cdot 10^{-6} s}{10^{-10} W / Hz}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{4} = 0.0023$$

Protok digitalnog signala jednak je

$$V_b = \frac{1}{T} = \frac{1}{1 \mu s} = 1 Mb / s$$

Širina koju zauzima binarni polarni digitalni signal je beskonačna, a najveći deo srednje snage signala nalazi se na niskim učestanostima, nižim od „prve nule“ u spektru signala koja se nalazi na učestanosti $f = V_b = 1/T$ [Hz].

U posmatranom slučaju širina opsega učestanosti po kriterijumu „prve nule“ u spektru jednaka je

$$B = V_b = \frac{1}{T} = 1 MHz$$

Zadatak 2 (7)

- b) Trajanje signalizacionog intervala $T=2\mu s$ je dva puta veće u odnosu na slučaj pod a), pa je binarni protok signala dvostruko manji ($V_b=0.5\text{Mb/s}$).

Kako je amplituda signala ista, a time i srednja snaga signala, energija signala po bitu je sada dvostruko veća u odnosu na slučaj pod a), pa je i verovatnoća greške manja (*erfc* funkcija je monotono opadajuća).

Širina propusnog opsega po kriterijumu „prve nule“ je dvostruko manja za dvostruko manji protok signala:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{U^2 T}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{8} = 3.17 \cdot 10^{-5}$$

$$B = V_b = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\mu s} = 0.5\text{MHz}$$

- c) Dužina signalizacionog intervala $T=3\mu s$ je tri puta veća u odnosu na slučaj pod a), pa je i energija po bitu tri puta veća u odnosu na slučaj pod a).

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{U^2 T}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{12} = 4.82 \cdot 10^{-7}$$

$$B = V_b = \frac{1}{T} = \frac{1}{3\mu s} = 0.33\text{MHz}$$

Zadatak 3 (1)

Posmatra se prenos binarnog polarnog NRZ signala protoka $V_b=8$ Mb/s, gde je srednja snaga signala $u_{R,S}(t)$ na ulazu u prijemnik jednaka $P_R=1\mu\text{W}$.

Osim korisnog signala na ulazu u prijemnik postoji i aditivni Gausov šum $u_{R,N}(t)$ čija je SGSS jednaka $p_N = 10^{-14}$ W/Hz.

a) Odrediti vrednost verovatnoće greške pri odlučivanju.

b) Ukoliko se binarni protok signala iznosi $V_b=16$ Mb/s, odrediti potrebnu snagu signala da bi se signal prenosio uz neizmenjenu verovatnoću greške.

Rešenje:

a) U posmatranom slučaju trajanje intervala signalizacije je $T = 1/V_b = 125$ ns, pa je energija signala u toku svakog signalizacionog intervala jednaka

$$E_b = P_R T = P_R / V_b = 1 \mu\text{W} \cdot 125 \text{ ns} = 1.25 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Odnos energije signala po bitu i SGSS šuma jednaka je

$$\frac{E_b}{p_N} = 12.5$$

Verovatnoća greške pri odlučivanju jednaka je

$$P_{e,\min} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{p_N}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{12.5} \right) = 2.86 \cdot 10^{-7}$$

Zadatak 3 (2)

b) Povećanjem binarnog protoka signala V_b , za fiksnu snagu P_R signala, smanjuje se energija signala po bitu $E_b \rightarrow$ povećava verovatnoća greške pri odlučivanju.

Uz neizmenjenu srednju snagu signala na prijemu P_R , energija signala po bitu E_b bi bila dvostruko manja u odnosu na slučaj kada je $V_b=8\text{Mb/s}$, pa bi verovatnoće greške iznosila

$$P_{e,\min} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{6.25}) = 2.03 \cdot 10^{-4}$$

Za brzinu signaliziranja koja je dvostruko povećana, vrednost verovatnoće greške bi se povećala približno 1000 puta!

Da se vrednost verovatnoće greške ne bi promenila potrebno je zadržati neizmenjenu energiju signala po bitu $E_b = P_R T = P_R / V_b$, što se može postići povećanjem srednje snage signala. U slučaju dvostrukog povećanja protoka, potrebno je dvostruko povećati i srednju snagu signala na prijemu i

$$P_{R,\text{novi}} = \frac{E_b}{T_{\text{novi}}} = \frac{P_R T}{T_{\text{novi}}} = 1 \mu\text{W} \times \frac{125\text{ns}}{62.5\text{ns}} = 2 \mu\text{W}$$

Da bi se izvršio prenos signala dvostruko većeg protoka uz neizmenjenu vrednost verovatnoće greške po bitu, snagu signala na prijemu potrebno je povećati 2 puta

$$\Delta P = 10 \log_{10} \frac{P_{R,\text{novi}}}{P_R} = 10 \log_{10} 2 = 3\text{dB}$$

Zadatak 4 (1)

Analogni signal $u(t)$ konvertuje se u digitalni primenom PCM sa ravnomernom kvantizacijom sa $q=1024$ nivoa. Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=15\text{kHz}$, a odabiranje se vrši minimalnom učestanošću određenom teoremom odabiranja.

Dobijeni digitalni signal predstavljen je binarnim polarnim impulsima i prenosi se u osnovnom opsegu učestanosti. Srednja snaga signala na izlazu iz predajnika iznosi $P_T=0.03\text{mW}$. Linija veze unosi slabljenje jednako $a=30\text{dB}$. Na ulazu u prijemnik osim korisnog signala postoji i aditivni beli Gausov šum, čija je spektralna gustina srednje snage (SGSS) jednaka $p_N=10^{-14}\text{W/Hz}$.

- Odrediti binarni protok signala na liniji veze.
- Izračunati širinu propusnog opsega učestanosti potrebnu za prenos digitalnog signala, po kriterijumu „prve nule“ u spektru.
- Odrediti verovatnoću greške po bitu za slučaj kada je prijemnik realizovan u obliku integratora sa rasterećenjem.

Zadatak 4 (2)

a) Protok binarnog digitalnog signala jednak je

$$V_b = f_s \times n = 2f_m \times \log_2 q = 2 \cdot 15000 \cdot \log_2 (1024) \text{ b/s} = 300 \text{ kb/s}$$

b) Potrebna širina propusnog opsega za prenos signala u osnovnom opsegu učestanosti po kriterijumu “prve nule u spektru” jednaka je

$$B = V_b = 300 \text{ kHz}$$

c) Verovatnoća greške pri prenosu signala jednaka je

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{P_R T}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{P_R}{p_N V_b}}$$

pri čemu je E_b energija signala po bitu, jednaka proizvodu snage signala na ulazu u prijemnik i trajanja signalizacionog intervala

$$E_b = P_R \cdot T$$

Slabljenje linije veze je $a = 30 \text{ dB}$, pa je odnos predajne i prijemne snage P_T/P_R :

$$a [\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{P_T}{P_R} \Rightarrow \frac{P_T}{P_R} = 10^{a/10} \Rightarrow \frac{P_R}{P_T} = 10^{-a/10} = 0.001$$

Zadatak 4 (3)

Snaga signala na prijemu jednaka je

$$P_R = P_T 10^{-a/10} = 0.03mW \cdot 10^{-30/10} = 0.03\mu W$$

Verovatnoća greške P_e jednaka je

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{P_R T}{p_N}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{P_R}{p_N V_b}}$$

Zamenom brojnih vrednosti

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{0.03\mu W}{10^{-14} W / Hz \times 300kHz}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (\sqrt{10}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (3.126)$$

Primenom aproksimacije $\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ za vrednost $x=3.126$ dobija se

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (3.126) \approx \frac{1}{2} \frac{1}{3.126\sqrt{\pi}} e^{-3.126^2} = 5 \cdot 10^{-6}$$

Zadatak 5 (1)

Analogni signal $u(t)$ konvertuje se u digitalni primenom PCM sa ravnomernom kvantizacijom. Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=20\text{kHz}$, a odabiranje se vrši minimalnom učestanošću određenom teoremom odabiranja. Amplituda signala $u(t)$ je uniformno raspodeljena u intervalu $[-5,+5]\text{V}$, a maksimalna dozvoljena greška kvantizacije jednaka je 5mV .

Dobijeni binarni signal konvertuje se u M -arni NRZ signal sa $M=4$ amplitudska nivoa primenom Grejevog mapiranja, a zatim prenosi preko linije veze. Pri odlučivanju u prijemniku, verovatnoća greške po simbolu jednaka je $P_{e,s}=10^{-6}$.

- Odrediti minimalan potreban broj kvantizacionih nivoa $q_{min}=2^n$.
- Izračunati protok binarnog digitalnog signala na liniji veze (za q_{min}).
- Izračunati širinu propusnog opsega učestanosti potrebna za prenos digitalnog M -arnog signala, po kriterijumu „prve nule“ u spektru.
- Odrediti srednju verovatnoću greške po bitu.

Zadatak 5 (2)

Maksimalna učestanost u spektru signala $u(t)$ jednaka je $f_m=20\text{kHz}$, pa se odabiranje vrši minimalnom učestanošću $f_s=2f_m=40\text{kHz}$.

Amplituda signala $u(t)$ je uniformno raspodeljena u intervalu $[-5,+5]\text{V}$, a maksimalna dozvoljena greška kvantizacije jednaka je 5mV .

Ako je broj kvantizacionih nivoa q , tada je korak kvantizacije $\Delta u=5\text{V}-(-5\text{V})$

$$\Delta u = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{q} = \frac{10}{q}$$

Maksimalna greška koja se unosi kvantizacijom je $\Delta u/2$, pa je minimalan broj potrebnih nivoa pri kvantizaciji

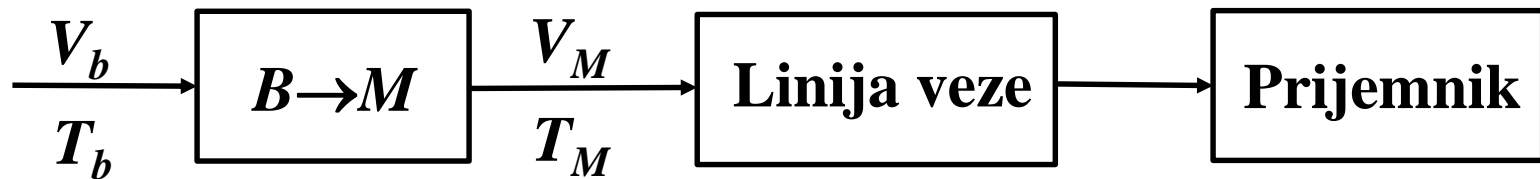
$$\frac{\Delta u}{2} = \frac{5\text{V}}{q} \leq 0.005\text{V} \Rightarrow q = 2^n \geq 1000 \Rightarrow q_{\min} = 1024$$

Minimalan broj nivoa kvantizacije je $q_{\min}=1024$, pa je za kodiranje svakog odbirka signala potrebno $n=\log_2 1024=10\text{bita}$.

Binarni protok signala jednak je

$$V_b = f_s \times n = 40\text{kHz} \times 10 = 400\text{kb/s}$$

Zadatak 5 (3)



Po uslovu zadatka, dobijeni binarni digitalni signal protoka $V_b=400\text{kb/s}$ konvertuje se u M -arni NRZ signal.

U toku trajanja svakog signalizacionog intervala trajanja T_M signal ima oblik pravougaonog impulsa trajanja T_M sa jednom od četiri moguće vrednosti amplitude $\{-3U, -U, +U, +3U\}$.

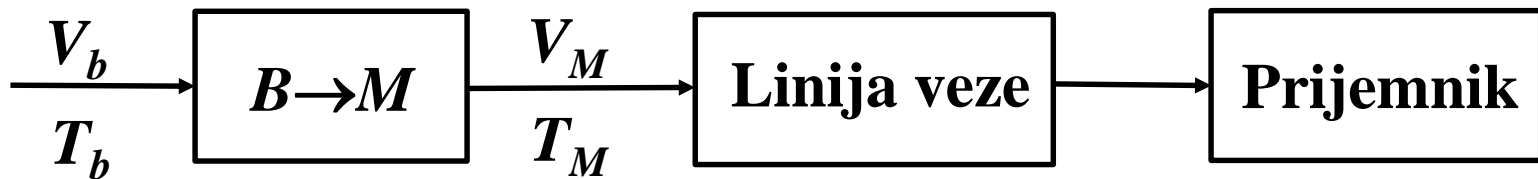
Kako je $M=4$, trajanje signalizacionog interval M -arnog signala T_M je dvostruko duže od trajanja jednog bita (informacija o ditektu sadrži se sada u jednoj od 4 moguće vrednosti amplitude) pa je

$$T_M = 2T_b = \frac{2}{V_b} = \frac{2}{400\text{kb/s}} = 5\mu\text{s}$$

Protok M -arnih simbola je dvostruko manji od binarnog protoka i

$$V_M = \frac{1}{T_M} = \frac{1}{2T_b} = \frac{V_b}{2} = 200\text{ksim/s}$$

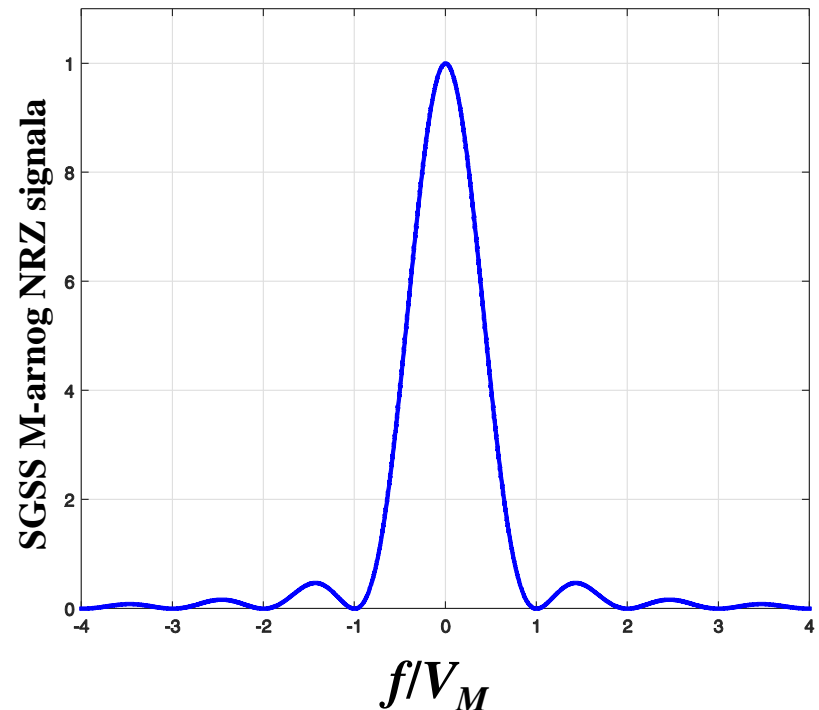
Zadatak 5 (4)



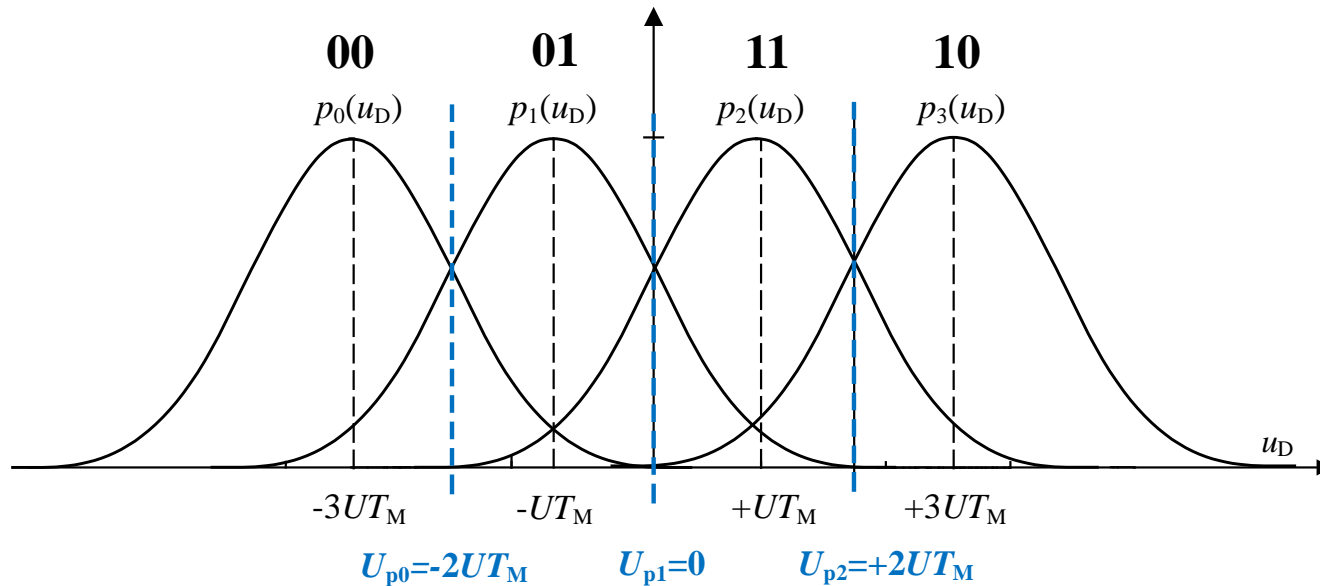
U posmatranom slučaju prenos signala vrši se signaliziranjem pravougaonim impulsima trajanja T_M , pa je širina opsega učestanosti koju signal zauzima teorijski beskonačna. Međutim, najveći deo srednje snage signala nalazi se na niskim učestanostima do „prve nule“ u spektru signala.

Prva nula u spektru signala u ovom slučaju nalazi se na

$$B = V_M = \frac{1}{T_M} = 200\text{kHz}$$



Zadatak 5 (5)



Verovatnoća greške po prenetom M -arnom simbolu jednaka je

$$P_{e,S} = 10^{-6}$$

Pri prenosu M -arnog signala najčešće dolazi do grešaka da je umesto poslatog simbola a_k poslat jedan od susednih simbola (a_{k+1} ili a_{k-1} , sa najbližim vrednostima amplitude). Kada je mapiranje bita u simbole izvršeno u skladu sa Grejevim kodom (pri mapiranju, susedni simboli se razlikuju u samo jednom bitu), do greške dolazi u samo jednom od $n_m = \log_2 M$ bita koji se prenose jednim M -arnim simbolom i verovatnoća greške po bitu je (približno) jednaka

$$P_{e,b} \approx \frac{P_{e,S}}{\log_2 M} = \frac{P_{e,S}}{2} = 5 \cdot 10^{-7}$$

Zadatak 6 (1)

Binarni signal protoka $V_b = 5\text{Mb/s}$ prenosi se primenom binarnog polarnog NRZ signaliziranja. Prijemnik je realizovan u obliku integratora sa rasterećenjem. Za zadovoljavajući kvalitet prenosa signala potrebno je da *maksimalna vrednost verovatnoće greške po bitu ne prelazi vrednost 10^{-6}* . Slabljenje linije veze je $a[\text{dB}] = 30\text{dB}$, dok je spektralna gustina srednje snage (SGGS) aditivnog belog Gausovog šuma (ABGŠ) na ulazu prijemnika jednaka $p_N = 10^{-15}\text{W/Hz}$.

Odrediti minimalnu potrebnu srednju snagu signala na izlazu iz predajnika. Pretpostavlja se da su apriorne verovatnoće pojave binarnih simbola 0 i 1 međusobno jednake, tj. $P_0 = P_1 = 0.5$.

Potrebni podaci:

$$\text{erfc}(3.3612) = 2 \times 10^{-6}, \text{erfc}(3.4589) = 10^{-6}, \text{erfc}(3.7667) = 10^{-7}$$

Zadatak 6 (2)

Vrednost verovatnoće greške po bitu za slučaj binarnog polarnog NRZ signaliziranja data je izrazom

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} \leq P_{e,\max} = 10^{-6}$$

Da bi vrednost verovatnoće greške po bitu bila manja od neke granične vrednosti $P_{e,\max}$, potrebno je da energija signala po bitu $E_b = P_R \times T$ bude veća od neke granične vrednosti $E_{b,\min} = P_{R,\min} \times T_b$. Funkcija $\operatorname{erfc}(x)$ je monotono opadajuća, pa kada argument funkcije x raste vrednost funkcije $\operatorname{erfc}(x)$ opada.

Za fiksnu vrednost binarnog protoka $V_b = 1/T$, potrebno je da srednja snaga signala na prijemu bude veća od minimalne vrednosti $P_{R,\min}$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} \leq P_{e,\max} = 10^{-6} \Rightarrow \sqrt{\frac{E_b}{p_N}} \geq \operatorname{erfc}^{-1}(2 \times 10^{-6}) = 3.3612 \Rightarrow \sqrt{\frac{P_{R,\min} T_b}{p_N}} = 3.3612$$

(koristi se jedna od datih vrednosti erfc funkcije, zavisno od vrednosti verovatnoće greške, u ovom slučaju $\operatorname{erfc}(3.3612) = 2 \times 10^{-6}$)

Zadatak 6 (3)

Minimalna vrednost srednje snage signala na ulazu u prijemnik jednaka je

$$\sqrt{\frac{P_{R,\min} T_b}{P_N}} = 3.3612 \Rightarrow P_{R,\min} = 3.3612^2 P_N V_b$$

odnosno jednaka je $P_{R,\min} = 5.65 \cdot 10^{-8} \text{W}$.

Srednja snaga signala na izlazu iz predajnika određena je sa

$$a[\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{P_T}{P_R} \Rightarrow P_{R,\min} = P_{T,\min} \times 10^{-a/10} \Rightarrow P_{T,\min} = P_{R,\min} \times 10^{+a/10}$$

Za date uslove prenosa minimalna vrednost srednje snage signala na predaji je

$$P_{T,\min} = P_{R,\min} \times 10^{+a/10} = 5.65 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{+3} \text{W} = 5.65 \cdot 10^{-5} \text{W}.$$

Da bi za date uslove prenosa verovatnoća greške bila manja od 10^{-6} , potrebno je da srednja snaga signala na predaji bude veća od $5.65 \cdot 10^{-5} \text{W}$.

Zadatak 7 (1)

Posmatra se prenos binarnog signala protoka $V_b=2$ Mb/s. Maksimalna dozvoljena verovatnoća greške $P_{e,MAX}$ jednaka je $5 \cdot 10^{-6}$. Na ulazu u prijemnik deluje aditivni beli Gausov šum čija je SGSS jednaka $p_N=10^{-14}$. Koliko iznosi minimalna potrebna srednja snaga signala na ulazu u prijemnik ukoliko se prenos signala vrši putem:

- Unipolarnog NRZ signaliziranja,
- Polarnog NRZ signaliziranja.

Napomena: $\text{erfc}(3.123) = 10^{-5}$

Rešenje:

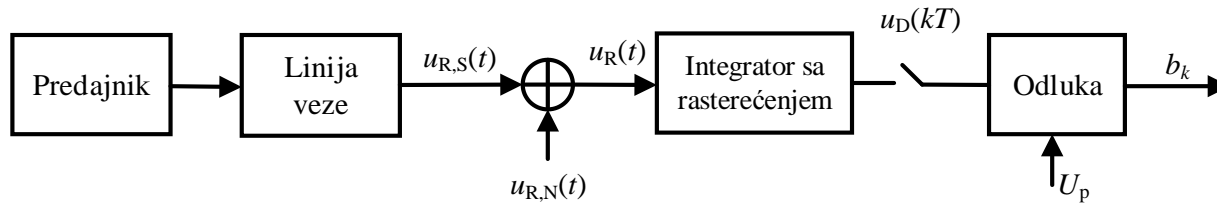
U slučaju binarnog unipolarnog NRZ signaliziranja

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2p_N}} \right) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{P_R T}{2p_N}} \right) \leq P_{e,MAX} = 5 \cdot 10^{-6}$$

U slučaju binarnog polarnog NRZ signaliziranja

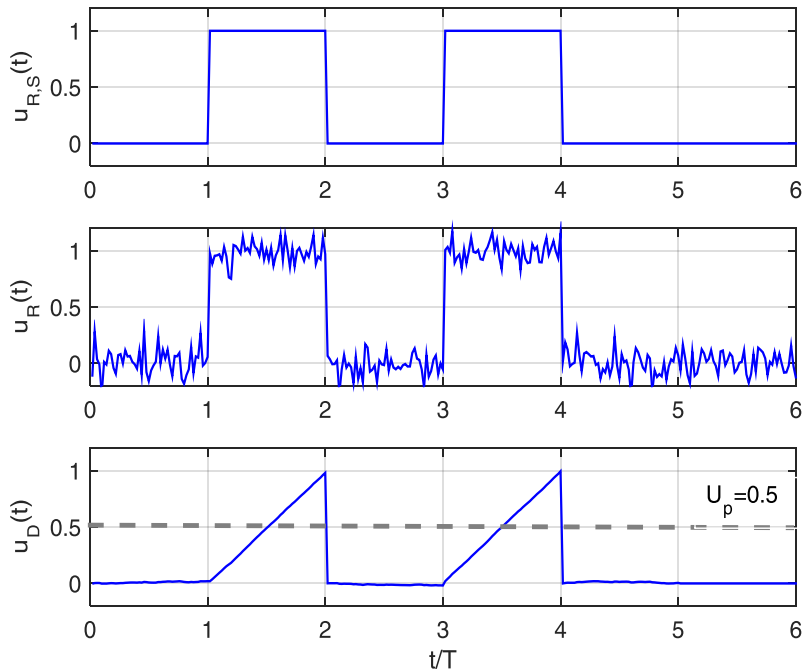
$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{b,pol}}{p_N}} \right) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{P_{R,pol} T}{p_N}} \right) \leq P_{e,MAX} = 5 \cdot 10^{-6}$$

Zadatak 7 (2)



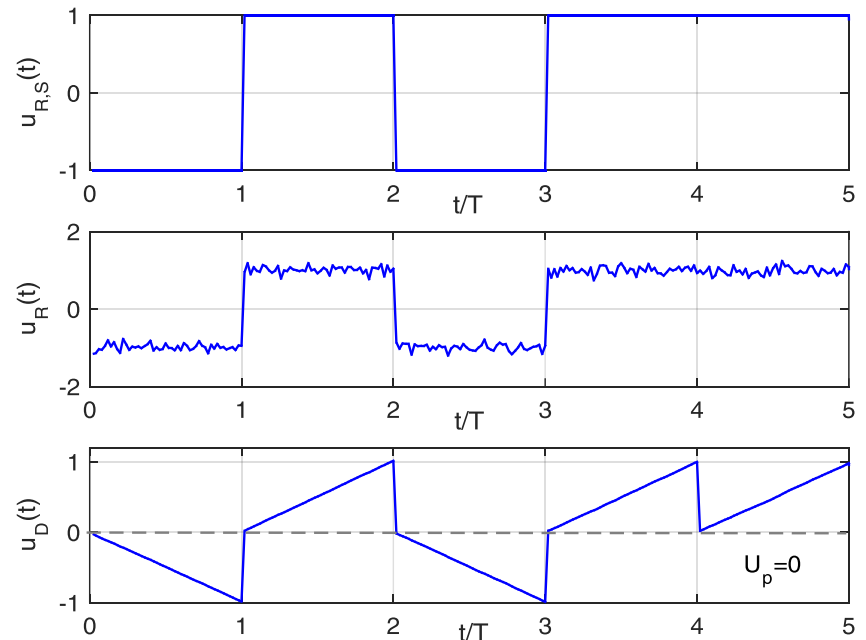
Unipolarno signaliziranje

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2p_N}} \right)$$



Polarno signaliziranje

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{b,pol}}{p_N}} \right)$$



Zadatak 7 (3)

Kod **unipolarnog signaliziranja**, da bi verovatnoća greške u odlučivanju bila manja od maksimalno dozvoljene potrebno je da bude ispunjen uslov

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2p_N}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{P_R T}{2p_N}} \right) \leq P_{e, \text{MAX}} = 5 \cdot 10^{-6} \quad \begin{array}{l} \operatorname{erfc}(3.123) = 10^{-5} \\ \operatorname{erfc}(x) = 10^{-5} \Rightarrow x = \operatorname{erfc}^{-1}(10^{-5}) = 3.123 \end{array}$$

Kako je trajanje signalizacionog intervala $T = 1/V_b = 0.5 \mu\text{s}$, minimalna potrebna srednja snaga određena je izrazom

$$P_R = \left(\operatorname{erfc}^{-1}(2P_{e, \text{MAX}}) \right)^2 \times 2p_N V_b = 3.123^2 \times 2p_N V_b = 0.4 \mu\text{W}$$

Kod **polarnog signaliziranja**, potrebno je da bude ispunjen uslov

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_{b, \text{pol}}}{p_N}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{P_{R, \text{pol}} T}{p_N}} \right) \leq P_{e, \text{MAX}} = 5 \cdot 10^{-6}$$

Minimalna potrebna srednja snaga signala u ovom slučaju određena je izrazom

$$P_{R, \text{pol}} = \left(\operatorname{erfc}^{-1}(2P_{e, \text{MAX}}) \right)^2 \times p_N V_b = 3.123^2 \times p_N V_b = 0.2 \mu\text{W}$$

Za istu vrednost verovatnoće greške u slučaju unipolarnog signaliziranja potrebna je dvostruko veća srednja snaga signala u odnosu na polarno signaliziranje, tj.

potrebno je da srednja snaga signala bude za $10\log_{10}2 = 3 \text{ dB}$ veća.