Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu

II kolokvijum iz Fizike za Si, 4.12.2014. godine

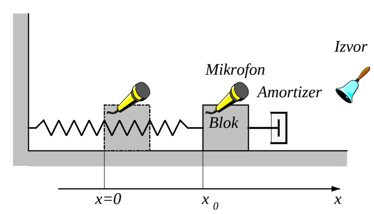
Predmetni nastavnici: Predrag Marinković, Peđa Mihailović i Marko Barjaktarović.

Trajanje ispita je 2 h.

1. Matematičko klatno, dužine l, prolazi kroz ravnotežni položaj brzinom v. Ako je najveća sila zatezanja konca F, odrediti period oscilovanja klatna, masu klatna i ukupnu energiju oscilatora.

2. Dve identične žice, dužine l i mase m, zategnute su jedna pored druge silama F_1 i F_2. Odrediti učestanosti oscilovanja osnovnog harmonika stojećih transverzalnih talasa ovih žica. Ako je količnik sila kojom su zategnute žice $F_2/F_1 = 2$, frekvencija izbijanja f_B, a žice osciluju u osnovnom harmoniku, odrediti frekvenciju oscilovanja žica u funkciji f_B.

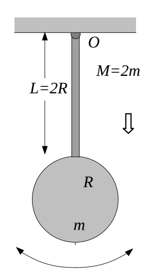
3. Na glatkoj horizontalnoj podlozi nalazi se blok koji je sa leve strane horizontalnom elastičnom oprugom zakačen za vertikalni zid, a sa desne strane za horizontalno postavljen amortizer kod koga intenzitet otporne sile linearno zavisi od intenziteta brzine (slika 1). U trenutku $t = 0$ leva ivica bloka se nalazi u miru na rastojanju $x_0 = 0,271$ m od koordinatnog početka, koji je na mestu leve ivice bloka u položaju kada opruga nije deformisana; x-osa je orijentisana sa leva na desno. Kada se sistem prepusti sam sebi, on se kreće kritično amortizovano.



Slika 1: *Uz zadatak 3.*

Na bloku se nalazi mikrofon, a na pozitivnom delu x-ose je tačkasti izvor zvuka koji se ne kreće. Ako je minimalna frekvencija zvuka koju registruje mikrofon 99,9% od maksimalne frekvencije u mikrofonu, odrediti trenutak u kome je brzina bloka po intenzitetu maksimalna i sopstvenu kružnu učestanost oscilovanja neamortizovanog sistema. Brzina zvuka u vazduhu je $c = 300$ m/s.

4. Na tanak štap dužine $L = 2R$ i mase $M = 2m$, zalepljen je tanak disk poluprečnika R i mase m (slika 2). Drugi kraj štapa zakačen je za zglob tako da sistem može rotirati u vertikalnoj ravni oko ose normalne na ravan koju čine štap i disk. Odrediti period malih oscilacija sistema.



Slika 2: *Uz zadatak 4.*

5. Dva identična, tačkasta izvora zvuka postavljena su na istom rastojanju r od prijemnika. Odrediti za koliko se promeni nivo zvuka u decibelima koju meri prijemnik, ukoliko se isti izvori zvuka postave na rastojanja $2r$ i $3r$ od prijemnika?

Rešenja

1. Za matematičko klatno ugao otklona klatna od ravnotežnog položaja je:

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)\,, \tag{1}$$

gde je, θ_0 amplituda, φ početna faza, a ω_0 kružna učestanost data sa:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}\,, \tag{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \tag{3}$$

$$v = l\left[\frac{d\theta}{dt}\right]_{MAX}\,, \tag{4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta_0\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)\,, \tag{5}$$

$$v = l\theta_0\omega_0\,, \tag{6}$$

$$\theta_0 = \frac{v}{\sqrt{gl}}\,. \tag{7}$$

Najveća sila zatezanja konca je u trenutku prolaska klatna kroz ravnotežni položaj:

$$F = mg + m\frac{v^2}{l}\,, \tag{8}$$

$$m = \frac{Fl}{gl + v^2}\,, \tag{9}$$

$$E = E_{pmax} = mgl(1 - \cos\theta_0)\,, \tag{10}$$

$$E = \frac{Fgl^2}{lg + v^2}\left(1 - \cos\frac{v}{\sqrt{gl}}\right)\,. \tag{11}$$

2. Brzina transverzalnog talasa na zategnutoj žici je:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{Fl}{m}}\,. \tag{12}$$

Pošto je u pitanju osnovni harmonik:

$$\lambda = 2l\,, \tag{13}$$

$$\lambda = \frac{c}{f_0}\,, \tag{14}$$

$$f_0 = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{ml}}\,, \tag{15}$$

$$f_{01} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F_1}{ml}}\,, \tag{16}$$

$$f_{02} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F_2}{ml}}\,. \tag{17}$$

Deobom jednačina 17 i 16, dobijamo:

$$\frac{f_{02}}{f_{01}} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} = \sqrt{2}\,, \tag{18}$$

$$f_B = f_{02} - f_{01} = f_{01}\left(\sqrt{2} - 1\right)\,, \tag{19}$$

$$f_{01} = \frac{f_B}{\sqrt{2} - 1}\,, \tag{20}$$

$$f_{02} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} f_B\,. \tag{21}$$

3. Na telo u horizontalnom pravcu deluju elastična sila u opruzi (na levo) i otporna sila u amortizeru (na desno) , tako da II Njutnov zakon glasi

$$-kx + r|v_x| = m\frac{d^2x}{dt^2}\,. \tag{22}$$

Sledi

$$-kx - r\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}\,, \tag{23}$$

jer je $v_x = dx/dt < 0$, kada je $x > 0$, a telo se kreće nalevo uz smanjenje koordinate x. Diferencijalna jednačina je

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0\,. \tag{24}$$

Kako je kretanje kritično amortizovano, mora biti $\alpha = \omega_0$, pa je rešenje ova jdnačine

$$x(t) = e^{-\alpha t}(C_1 + C_2 t)\,, \tag{25}$$

gde su C_1 i C_2 konstante koje treba odrediti iz početnih uslova $x(0) = x_0$ i $v_x(0) = 0$ (α je koeficijent amortizovanja, a ω_0 kružna učestanost oscilovanja neamortizovanog sistema). Lako se pokazuje da je $C_1 = x_0$ i $C_2 = \alpha x_0$. Dobija se (slika 3)

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t}(1 + \alpha t)\,. \tag{26}$$

Projekcija brzine tela na x-osu je (slika 4)

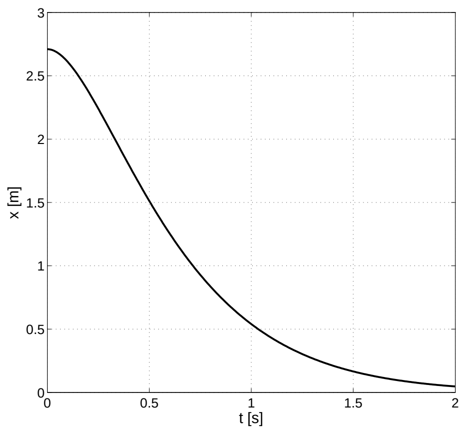
$$v_x = \dot{x} = -\alpha^2 x_0 e^{-\alpha t} t\,. \tag{27}$$

Intenzitet brzine tela je

$$v = |v_x| = \alpha^2 x_0 e^{-\alpha t} t\,. \tag{28}$$

Maksimalnu brzinu tela (v_{max}) dobijamo iz uslova $dv/dt = 0$, odakle je

$$t_{max} = 1/\alpha\,.$$



Slika 3: Slika uz rešenje zadatka 3.

S obzirom na to da se telo sa mikrofonom udaljava od izvora zvuka, registruje se niža frekvencija od emitovane iz izvora. Najniža je kada je brzina maksimalna. Stoga je

$$f_{min} = f_0 \frac{c - v_{max}}{c}.$$

Sledi da je maksimalna brzina tela

$$v_{max} = \frac{c}{1000}.$$

S druge strane

$$v_{max} = \alpha x_0 e^{-1}\,.$$

Izjednačavanjem prethodna dva izraza, lako se pokazuje da je

$$\omega_0 = \alpha = \frac{ec}{1000 x_0} = 3\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Trenitak maksimuma brzine je

$$t = 1/3\,\mathrm{s}\,.$$

4. Prilikom oscilacija, telo u ravnotežni položaj vraća gravitaciona sila i kretanje se može opisati sledećom jednačinom:

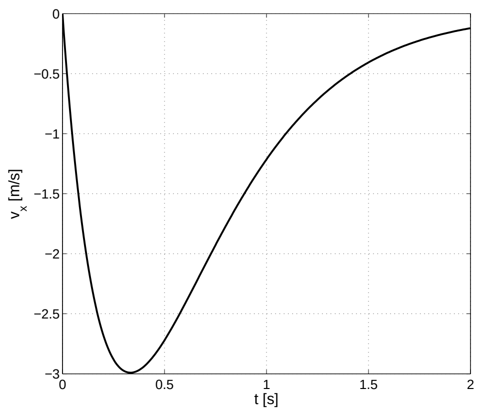
$$I\alpha = -(m+M)gr_c \sin\theta \approx -3mgr_c\theta\,, \tag{29}$$

gde je I moment inercija oko tačke O, a r_c rastojanje centra mase od pola rotacije O. Prethodna jednačina može se napisati u sledećem obliku:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3mgr_c}{I}\theta = 0\,, \tag{30}$$

odakle se dobija period malih oscilacija T:

$$\omega = \sqrt{\frac{3mgr_c}{I}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr_c}}],. \tag{31}$$



Slika 4: Slika uz rešenje zadatka 3.

Dalje, potrebno je odrediti moment inercije I i položaj centra mase:

$$I = \left[\frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{2}mR^2 + m\left(\frac{R}{\cancel{2}} + L\right)^2\right], \tag{32}$$

$$I = \frac{113}{12}mR^2\,, \tag{33}$$

$$r_c = \frac{M\frac{L}{2} + m\left(\frac{R}{\cancel{2}} + L\right)}{m+M} = \frac{3}{2}R\,. \tag{34}$$

Zamenom, dobija se vrednost perioda malih oscilacija T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\cancel{113}R}{\cancel{6}g}}\,.\quad \sqrt{\frac{73}{30}} \tag{35}$$

5. Kada su izvori zvuka na istom rastojanju, jačina zvuka koju detektuje prijemnik iznosi:

$$\beta = 10\log\frac{2I}{I_0} = \left[10\log\frac{I}{I_0} + 3,01\right]\mathrm{dB}\,, \tag{36}$$

gde je I intenzitet zvuka jednog izvora na rastojanju r. Na rastojanju r' od izvora zvuka intenzitet iznosi:

$$I' = I\frac{r^2}{r'^2} \tag{37}$$

Jačina zvuka pri promeni rastojanja iznosi:

$$\beta_1 = 10\log\frac{\frac{I}{4} + \frac{I}{9}}{I_0} = 10\log\left(\frac{13}{36}\frac{I}{I_0}\right)\,, \tag{38}$$

$$\beta_1 = 10\log\frac{I}{I_0} + 10\log\frac{13}{36}\,, \tag{39}$$

$$\beta_1 = \left[10\log\frac{I}{I_0} - 4,42\right]\mathrm{dB}\,, \tag{40}$$

odnosno jačina zvuka se smanjila za $\Delta\beta = \beta - \beta_1 = 7,43\,\mathrm{dB}$.