Увод у анализу

Низови и лимеси

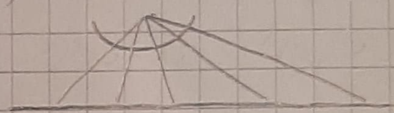
A) Кардинални број скупа

Скупови A и B имају исти кардинални број ако постоји бијекција $f: A \xrightarrow[на]{1-1} B$ и тада пишемо $|A| = |B|$.

Пр. 1. $|\{a_1, \dots, a_n\}| = n$

2. $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ → алеф нула – кардинални број свих пребројивих скупова ($|\mathbb{Z}| = \aleph_0$, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$)

3. $|(0,1)| = c$ → сви скупови који се могу бијекцијом пресликати на $(0,1)$ ($|\mathbb{R}| = c$)



$\exists f: (a,b) \xrightarrow[1-1]{на} \mathbb{R}$

$c > \aleph_0$

Претпоставимо да се сви децимални бројеви могу поређати у низ $0,a_1a_2a_3\ldots \in (0,1)$

(1) $0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$

(2) $0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$

(3) $0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$

⋮

Формира се низ $0,b_1b_2b_3$ са особином $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$, $b_3 \neq a_{33}$ ... тај број $0,b_1b_2b_3\ldots$ није у низу јер се разликује од сваког члана низа. Није могуће све децималне бројеве набројати у низ.

Скуп реалних бројева $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ одређује се особинама да је $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ поље и да важи аксиома непрекидности:

Ако скупови $A, B \subset \mathbb{R}$ врше партицију скупа $\mathbb{R}$ тако да $A \cup B = \mathbb{R}$ и $A \cap B = \emptyset$ тако да за свако $a \in A$ и $b \in B$ важи $a < b$, тада или скуп A има највећи елемент или скуп B има најмањи елемент.

Неки битни подскупови у $\mathbb{R}$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

Околина тачке a је сваки отворени интервал (c,d) такав да $a \in (c,d)$.

Епсилон околина тачке $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ за $\varepsilon > 0$.

Проширени скуп реалних бројева $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и притом за $\pm\infty$ важе следеће особине:

1. ограниченост $(\forall x \in \mathbb{R})\ -\infty < x < +\infty$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$
3. $(\forall x \in \mathbb{R})\ x - (+\infty) = x + (-\infty) = -\infty$
4. $(\forall x \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty))\ x \cdot (+\infty) = +\infty \land x \cdot (-\infty) = -\infty$
5. $(\forall x \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0))\ x \cdot (+\infty) = -\infty \land x \cdot (-\infty) = +\infty$
6. $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$
7. $+\infty + \infty = +\infty$
8. $-\infty + (-\infty) = -\infty$
9. $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty = (-\infty) \cdot (-\infty)$
10. $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty = -\infty \cdot (+\infty)$

није одређено $(+\infty) + (-\infty)$

Околина $+\infty$: $(k, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > k\}$ за $k \in \mathbb{R}^+$

Околина $-\infty$: $(-\infty, k) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < k\}$ за $k \in \mathbb{R}^-$

Минимум, максимум, инфимум и супремум

За $A \subset \mathbb{R}$ дефинишемо: a је минимум од $A \Leftrightarrow$ $a \in A \wedge (\forall x \in A)\ a \leq x$; $a = \max(A) \Leftrightarrow a \in A \wedge (\forall x \in A)\ x \leq a$

$m = \mathrm{minor}\,A \Leftrightarrow m \in \overline{\mathbb{R}} \wedge (\forall x \in A)\ m \leq x$

m - миноранта (доње ограничење)

M - мајоранта (горње ограничење)

$M = \mathrm{major}\,A \Leftrightarrow M \in \overline{\mathbb{R}} \wedge (\forall x \in A)\ x \leq M$

Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је ограничен одоздо ако постоји коначна доња граница. Скуп $A \subseteq \mathbb{R}$ је ограничен одозго ако постоји коначна горња граница. Скуп $A \subset \mathbb{R}$ је ограничен ако постоје коначне горње и доње границе.

тј. $(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\ m \leq x \leq M$

Претходни услов може се заменити и са следећим:

$(\exists M \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in A)\ |x| \leq M$.

Инфимум скупа $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ је максимум његових миноранти и користимо ознаку $\inf A$. Супремум скупа $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ је минимум његових мајоранти и користимо ознаку $\sup A$.

Важи $l = \inf A \Leftrightarrow l \in \overline{\mathbb{R}} \wedge (\forall x \in A)\ l \leq x \wedge (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\ a < l + \varepsilon$

$L = \sup A \Leftrightarrow L \in \overline{\mathbb{R}} \wedge (\forall x \in A)\ x \leq L \wedge (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)\ a > L - \varepsilon$

A	$\min A$	$\max A$	$\mathrm{minor}\,A$ ✓	$\mathrm{major}\,A$ ✓	ограниченост	$\inf A$ ✓	$\sup A$ ✓
$[0,1]$	0	1	$0, -1, -\frac{3}{2}, \ldots$	$1, \frac{5}{4}, 1+\sqrt{2}, \ldots$	огр.	0	1
$(0,1]$	X	1	$0, -\frac{3}{2}, -\sqrt{2}, \ldots$	$1, \frac{11}{10}, e, \ldots$	огр.	0	1
$(0,1)$	X	X	$0, -\frac{7}{6}, -e, \ldots$	$1, \frac{11}{10}, \pi, \ldots$	огр.	0	1
$[0,+\infty)$	0	X	$0, -\frac{9}{5}, -\pi, \ldots$	$+\infty$	огр. одоздо	0	$+\infty$
$(-\infty, 1)$	X	X	$-\infty$	$1, \frac{11}{10}, \pi, \ldots$	огр. одозго	$-\infty$	1
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$	X	X	$-\infty$	$+\infty$	X	$-\infty$	$+\infty$
$\{(1+\frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$	2	X	$2, 1.8, 0, -\frac{3}{2}$	$\frac{2719}{1000}, 3\pi, \ldots$	огр.	2	e

Деф. Реални низ $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ је одређен функцијом $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ и представља редом листу вредности те ф-је $a_1 = f(1),\ a_2 = f(2), \dots$

Уместо овог записа, када се зна редослед чланова користимо запис $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или (a_n).

Пр. 1. $\{(1+\frac{1}{n})^n \mid n\in\mathbb{N}\}$

$2 = (1+\frac{1}{1})^1,\ \frac{9}{4} = (1+\frac{1}{2})^2,\ \frac{64}{27} = (1+\frac{1}{3})^3, \dots$

2. Низ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ F_0 = 1,\ F_1 = 1$ одређује низ Фибоначијевих бројева (рекурентно задат):

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

општи облик: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

3. Низ $2, 9, 10, 12, 19, 20, \dots$ лексички задат - бројеви који почињу словом д у српском

За низ (a_n) кажемо да је:

1. строго растући $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n < a_{n+1}$
2. строго опадајући $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n > a_{n+1}$
3. растући (неопадајући) $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n \le a_{n+1}$
4. опадајући (нерастући) $(\forall n\in\mathbb{N})\ a_n \ge a_{n+1}$.

Низ је монотон ако испуњава један од ова 4 услова.

Низ је ограничен ако $(\exists m, M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})\ m \le a_n \le M$, односно $(\exists M\in\mathbb{R}^+)\ |a_n| \le M$.

За следеће низове проверити који су монотони и ограничени:

1. $a_n = \frac{1}{1+n^2}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{1+(n+1)^2} - \frac{1}{1+n^2} = \frac{\cancel{1}+\cancel{n^2}-\cancel{1}-\cancel{n^2}-2n-1}{(1+n^2)(n^2+2n+2)} = \frac{-2n-1}{(1+n^2)(n^2+2n+2)} < 0$$

низ је строго опадајући

$a_n = \frac{1}{1+n^2} > 0$, па је ограничен одоздо

$0 < \dots < a_{n+1} < a_n < \dots < a_1 = \frac{1}{2}$

$a_n > 0$ по начину формирања, низ почиње да опада почев од a_1

2. $a_n = \frac{n}{2^n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{1-n}{2^{n+1}} < 0$ почев од $n=2$ је строго опадајући

$a_n = \frac{n}{2^n} > 0$ по начину формирања, па је ограничен одоздо; $a_1 = \frac{1}{2}$; па је низ $0 < \dots < a_{n+1} < a_n < \dots < a_2 = a_1 = \frac{1}{2}$

3. $a_n = \frac{3n-1}{5n+1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+1} - \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3n+2}{5n+6} - \frac{3n-1}{5n+1} =$

$= \frac{15n^2+13n+2-15n^2-13n+6}{(5n+6)(5n+1)} = \frac{8}{(5n+6)(5n+1)} > 0$, па је низ строго растући

$a_1 = \frac{1}{3}$, а $a_n = \frac{3n-1}{5n+1} < 1$

$a_n = \frac{3 \cdot n - 1}{5 \cdot n + 1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{n - \frac{1}{3}}{n + \frac{1}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{n + \frac{1}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{\frac{8}{15}}{n + \frac{1}{5}}\right) < \frac{3}{5}$

4. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k + k} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3^{n+1}+n+1} > 0$, па је (a_n) строго растући

$a_1 = \frac{1}{3^1+1} = \frac{1}{4}$

$a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \dots + \frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots <$

$< \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} = a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < \frac{1}{2}$

5. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, 3$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ строго растући

$a_1 = 1$

$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} =$

$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

$a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < 2 - \frac{1}{n} < 2$

метод телескопских сума

6. $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}}\right)$, $a_0 = c > \sqrt{3}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}} - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2 + 3 - 2a_{n-1}^2}{2a_{n-1}} = \frac{3 - a_{n-1}^2}{2a_{n-1}} \quad (*)$$

да бисмо испитали монотоност проверавамо међусобни однос a_n и 3

$a_0 = c > \sqrt{3}$

$a_1 = \frac{1}{2}\left(c + \frac{3}{c}\right) = \frac{c^2 + 3}{2c} \overset{?}{>} \sqrt{3}$ $\quad c^2 + 3 > 2\sqrt{3}c$

$c^2 - 2\sqrt{3}c + 3 > 0 \quad (c - \sqrt{3})^2 > 0$ важи

претпоставимо $a_{n-1} > \sqrt{3}$

$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{3}{a_{n-1}}\right) \quad (a_{n-1} - \sqrt{3})^2 > 0$ ✓

индукцијом важи $(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > \sqrt{3}$ $(**)$

из $*$ и $**$ следи $a_n - a_{n-1} = \frac{3 - \overbrace{a_{n-1}^2}^{>3}}{2a_{n-1}} < 0 \quad a_{n-1} > a_n$

$a_0 = c > a_1 = \frac{1}{2}\left(c + \frac{3}{c}\right) > \dots > a_{n-1} > a_n > \dots > \sqrt{3}$

7. $a_{n+1} = \frac{6(1 + a_n)}{7 + a_n}$, $a_1 = c > 0$ $\quad n = 1, 2, 3, \dots$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6 + 6a_n}{7 + a_n} - a_n = \frac{-a_n^2 - a_n + 6}{7 + a_n} = \frac{f(a_n)}{7 + a_n} = -\frac{\overset{?}{(a_n - 2)}\overbrace{(a_n + 3)}^{>0}}{\underbrace{7 + a_n}_{>0}}$$

$f(t) = -t^2 - t + 6 \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{matrix} \nearrow -3 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

$= (t - 2)(t + 3)$

$$a_n - 2 = \frac{6 + 6a_{n-1}}{7 + a_{n-1}} - 2 = \frac{-8 + 4a_{n-1}}{7 + a_{n-1}} = \frac{4(a_{n-1} - 2)}{7 + a_{n-1}} = \frac{4\left(\frac{4(a_{n-2} - 2)}{7 + a_{n-2}}\right)}{7 + a_{n-1}}$$

$\dots$

$$a_n - 2 = \frac{4^{n-1}(a_1 - 2)}{(7 + a_{n-1}) \cdots (7 + a_1)} = \underbrace{\frac{4^{n-1}}{(7 + a_{n-1}) \cdots (7 + a_1)}}_{>0}(c - 2)$$

1) $c > 2 \quad a_n - 2 > 0 \quad a_{n+1} - a_n > 0$

2) $c = 2 \quad a_n - 2 = 0 \quad a_n = 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$

3) $c < 2 \quad a_n - 2 < 0 \quad a_{n+1} - a_n < 0$

Деф. За реалан низ (a_n) каже се да је a гранична вредност (лимес) низа ако важи:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |a_n - a| < \varepsilon \quad (*)$$

и у том случају пишемо $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Услов $(*)$ се може записати и овако:

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

тј. за природне бројеве n почев од n_0 важи $|a_n - a| < \varepsilon$

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

изван ε-околине може бити само коначно много чланова низа, а у околини бесконачно много

Пр. Доказати по дефиницији да је $a=1$ гранична вредност низа $a_n = \frac{n-1}{n}$.

$a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{2}{3},\ a_4 = \frac{3}{4}, \dots, a_{100} = \frac{99}{100}, \dots, a_k = \frac{k-1}{k}$

Посматрајмо услов који одређује дефиницију

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n)\ n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

фиксирајмо $\varepsilon > 0$ и одређујемо n_0 из импликације

$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ за $a=1$ тј. за $n \geq n_0$ испитујемо

$$a_n = \frac{n-1}{n} \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n} < \underbrace{1 + \underset{>0}{\varepsilon}}_{>1 \text{ важи } a_n < 1+\varepsilon}$$

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n}$$

$$n(1-\varepsilon) < n - 1$$

$$\cancel{n} - n\varepsilon < \cancel{n} - 1$$

$$n\varepsilon > 1$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ – доња граница за n

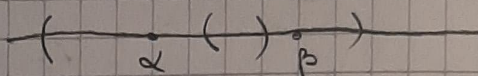
Деф. Реалан низ (a_n) који има граничну вредност $a\in\mathbb{R}$ назива се конвергентан. Низ који није конвергентан се назива дивергентан.

Важне тврђења:

(T1) Конвергентан низ има јединствену граничну вредност.

ППС: постоје 2 граничне вредности $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\beta=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, при чему $\alpha\neq\beta$

Нека је $\alpha<\beta$



У ε_1 околини тачке α се налазе сви чланови низа (a_n) почев од $n\geq n_1$; такође, то значи да у ε_2 околини тачке β се налазе сви чланови низа (a_n) почев од $n\geq n_2=n_2(\varepsilon_2)$

Ако је $d=\beta-\alpha>0$, бирајући $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon<\frac{d}{2}$ добијамо контрадикцију:

сви чланови низа су у обе околине, а те две околине су раздвојене; следи да претпоставка није добра

(T2) Ако за низове (a_n) и (b_n) постоје граничне вредности $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, тада су и низови $(a_n\pm b_n)$ као и $(a_n\cdot b_n)$ конвергентни и важи

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказ: $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \iff (\forall\varepsilon_1>0)(\exists n_0'=n_0'(\varepsilon_1)\in\mathbb{N})(\forall n)\ n\geq n_0' \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon_1$

$b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n \iff (\forall\varepsilon_2>0)(\exists n_0''=n_0''(\varepsilon_2)\in\mathbb{N})(\forall n)\ n\geq n_0'' \Rightarrow |b_n-b|<\varepsilon_2$

$a+b=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ што је еквивалентно са дефиниционим условом $(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n)\, n\geq n_0 \Rightarrow |(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$

посматрајмо $|(a_n+b_n)-(a+b)|<\varepsilon$

$|a_n-a+b_n-b|<\varepsilon$

важи $|a_n-a+b_n-b| < \underbrace{|a_n-a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n-b|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}$ увек тачно

$< \varepsilon$

одређујемо индексе код важи

почев од $n \geq n_0'(\varepsilon_1)$

почев од $n \geq n_0''(\varepsilon_2)$

бирајући $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}$ и $n_0=\max\{n_0'(\varepsilon_1), n_0''(\varepsilon_2)\}$ важи (3)

(Т3) Ако за реалне низове (a_n) и (b_n), при чему $b_n \neq 0$, важи да постоје лимеси $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, при чему $b\neq 0$, тада је низ $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ конвергентан и важи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$.

(Т4) Ако је низ конвергентан, онда је он ограничен.

нека постоји за низ (a_n) гранична вредност $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N})(\forall n)\ n\geq n_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$

фиксирајмо $\varepsilon>0$; у том случају почев од $n\geq n_0$ важи $a_n\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и изван ε-околине може бити само коначно много чланова, рецимо $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \in \mathbb{R}\setminus(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

бирајући $m=\min\{a-\varepsilon, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ и $M=\max\{a+\varepsilon, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$

очигледно се добија ограниченост $(\forall n)\ m\leq a_n\leq M$.

ПОСЛЕДИЦА Т4: Ако низ није ограничен, онда је он дивергентан.

$(p\Rightarrow q)\iff(\neg q\Rightarrow \neg p)$

Пр. низови $a_n=n$, $a_n=n^2$ нису ограничени, па су дивергентни

(Т5) Ако је реалан низ (a_n) монотон и ограничен, тада је и конвергентан.

① Испитати конвергенцију низова

а) $a_n=\frac{1}{1+n^2}$ доказана монотоност и ограниченост, па су низови конвергентни

(3) $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^2}=0$

2. $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$ $\quad 2^n \to$ брже расте

3. $L=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{5+\frac{1}{n}}=\frac{3}{5}$

4. $L=0{,}392\ldots$ нумерички

5. $L=\frac{\pi^2}{6}$ Фуријеов ред

6. $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n \qquad a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{3}{a_{n-1}}\right) \;/\lim$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(a_{n-1}+\frac{3}{a_{n-1}}\right)$$

$$L=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}a_{n-1}+\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3}{a_{n-1}}$$

$$L=\frac{1}{2}L+\frac{3}{2L} \quad /\cdot 2L$$

$$2L^2=L^2+3 \qquad L^2=3 \qquad L=\sqrt{3}$$

$$\cancel{L=-\sqrt{3}} \quad (\forall n)\ a_n>0$$

7. $L=\frac{6+6L}{7+L}\ \ldots\ L=2$

(T6) За конвергентне низове (a_n), (b_n) ако важи $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n)\ n\geq n_0 \Rightarrow a_n<b_n$ тада $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leq\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

(T7) За три реална конвергентна низа (a_n), (b_n), (c_n) ако важи $(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0)\ a_n\leq b_n\leq c_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=b$ тада $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.

Пр. ако се зна $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$, одредити $L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+7^n}$

$$7^n<7^n+5^n<7^n+7^n$$

$$7<\sqrt[n]{7^n+5^n}<\sqrt[n]{2\cdot7^n}=7\cdot\sqrt[n]{2}$$

$$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$$

$$7 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n+5^n}=7$$

други начин: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{7^n\left(1+\underbrace{\left(\frac{5}{7}\right)^n}_{\to 0}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}7\cdot1=7$

Деф. Реалан низ (a_n) је нула низ ако је конвергентан и важи $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(T8) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \iff \lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$

(Т9) Ако је (a_n) нула низ и (b_n) ограничен, тада је $(a_n \cdot b_n)$ нула низ.

Дивергентни низови

ка $+\infty$:

$(\forall E>0)(\exists n_0=n_0(E)\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)\ a_n>E \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$

ка $-\infty$:

$(\forall E>0)(\exists n_0=n_0(E)\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0)\ a_n<-E \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$

Низови су одређено дивергентни ка $\pm\infty$, у супротном су неодређено дивергентни.

(2) У зависности од реалног параметра q, одредити када је низ (q^n) конвергентан, одређено дивергентан и неодређено дивергентан.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \times, & q\leq -1 \quad \text{неодр. див} \\ 0, & q\in(-1,1) \\ 1, & q=1 \end{cases}\Big\} \text{ конв} \\ \quad\ +\infty,\ q>1 \quad \text{одр. див.}$$

(Т10) $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \wedge (\forall n\in\mathbb{N})\ a_n>0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=+\infty$

(Т11) $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \wedge (\forall n\in\mathbb{N})\ a_n<0) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=-\infty$

(Т12) Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$, тада:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\pm\infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\operatorname{sgn}(a)\cdot+\infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$

Деф. Низ (a_n) има тачку нагомилавања α уколико у свакој околини тачке α се налази бесконачно много чланова низа.

Пр. 1) $a_n=2$, $\alpha=2$

2) $a_n=1+\frac{n}{n+1}(-1)^n$ $\qquad a_{2k+1}=1+\frac{2k+1}{2k+2}\cdot(-1)$

$a_{2k}=1+\frac{2k}{2k+1}$ $\qquad \alpha_1=2,\ \alpha_2=0$

3) $a_n = \sin\frac{2n\pi}{3}$

Нека је дат низ (a_n) и $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ строго растући низ природних бројева. Тада низ (a_{n_k}) називамо подниз низа (a_n).

ТЛ3 Реални број α је тачка нагомилавања низа (a_n) акко постоји подниз (a_{n_k}) такав да $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Битне граничне вредности

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1 \quad (a>1)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_c n}{n^k} = 0, \quad c>1,\ k>0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{q^n} = 0 \quad k>0,\ q>1$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!} = 0 \quad q>1$

→ скала раста низова

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n}}{n!} = 1$

Лимеси функција и непрекидност функција

Основне особине функција

Реалне функције једне реалне променљиве $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$

Начини задавања:

1. експлицитни $y=f(x)$ облик
2. имплицитни облик $F(x,y)=0$
3. параметарски облик $x=x(t)$, $y=y(t)$ за $t\in[a,b]$
4. дискретним табеларним обликом или графички.

Елементарне ф-је: 1° степена, полиномска, рационална, експоненцијална и тригонометријске ф-је;
2° све ф-је које се добијају из претходних применом коначно много основних аритметичких операција, композицијом и употребом инверзне функције уз неопходно разматрање домена.

Функција $f: D \to \mathbb{R}$ је ограничена ф-ја на скупу $A \subseteq D$ уколико $(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall x \in A)\ m \leq f(x) \leq M$.

За ф-ју $f: D \to \mathbb{R}$ и скуп $A \subseteq D$ кажемо:

1) f је строго растућа уколико $(\forall x_{1,2} \in A)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
2) строго опадајућа ако $(\forall x_{1,2} \in A)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
3) растућа $(\forall x_{1,2} \in A)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
4) опадајућа $(\forall x_{1,2} \in A)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Ако испуњава 1 од 4 претходна услова, функција је монотона над скупом A.

За $f: D \to \mathbb{R}$ и подскуп $A \subseteq D$ са особином симетричности $x \in A \Rightarrow -x \in A$ уводимо:

1) f је парна ако $(\forall x \in A)\ f(-x) = f(x)$

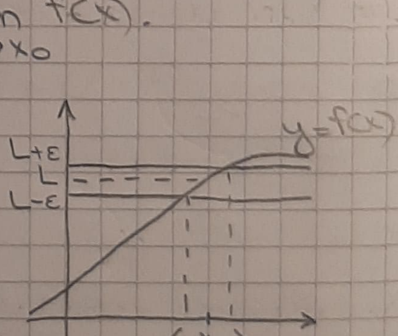
2) f је непарна ако $(\forall x \in A)\ f(-x) = -f(x)$.

Ако је f парна, она је осносиметрична у односу на y-осу, а ако је непарна онда је централносиметрична у односу на координатни почетак.

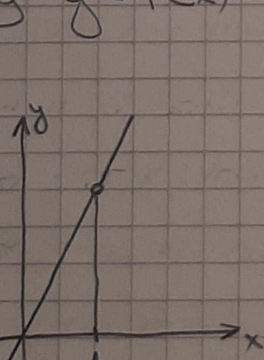
За ф-ју $f: D \to \mathbb{R}$ кажемо да је периодична ако постоји $T > 0$ такво да важи $(\forall x \in D)\ f(x+T) = f(x)$ број T називамо периодом функције f (основни период је најмањи позитиван T са претходном особином).

Гранична вредност реалне функције

Деф. Нека је дата ф-ја $f: D \to \mathbb{R}$ и тачка $x_0 \in \mathbb{R}$ таква да је ф-ја f дефинисана у некој околини тачке x_0 осим можда у x_0. За f кажемо да има граничну вредност L у тачки x_0 уколико важи $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D)(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$ и у том случају пишемо $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.



Пр. За ф-ју $y = f(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$



$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

и тачку $x_0 = 1$ доказати да је $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 2$.

За произвољно $\varepsilon > 0$ одређујемо $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такво да

$0<|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-2|<\varepsilon$ (*)

Нека важи претпоставка импликације $0<|x-1|<\delta$, за $x\neq 1$. Тада посматрамо закључак $|f(x)-2|<\varepsilon \Leftrightarrow |2x-2|<\varepsilon \Leftrightarrow 2|x-1|<\varepsilon \Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Гранична вредност је доказана по дефиницији када се одреди $\delta=\delta(\varepsilon)>0$. Довољно је бирати $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$. За такав избор $\delta(\varepsilon)$ биће испуњена импликација (*). $\delta(\varepsilon)$ није једнозначно одређена.

Важи $L=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \overset{def.}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x\in D)$
$(x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon)$ и одатле се дефинише:

1) лева гранична вредност

$L=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x\in D)(x\in(x_0-\delta,x_0)$
$\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon)$

2) десна гранична вредност

$L=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x\in D)(x\in(x_0,x_0+\delta)$
$\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon)$

$L=\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=L$

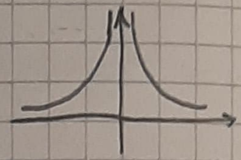
За функцију f за коју постоји $L=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ као коначан реалан број, сматрамо да има граничну вредност. Битни случајеви код није тачно $\neg\exists L\in\mathbb{R}$: случајеви бесконачних граничних вредности ($L=\pm\infty$) или када L не постоји у $\overline{\mathbb{R}}$, тј. $\neg\exists L\in\overline{\mathbb{R}}$.

Ф-ја има бесконачну граничну вредност у тачк $x=x_0$ уколико је испуњено:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall K>0)(\exists\delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)$
$(x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\Rightarrow f(x)>K)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall K>0)(\exists \delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)$$
$$(x\in(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f(x) < -K)$$

Пр. За $f(x)=\frac{1}{x^2} : (-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ важи
$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.



Даље прецизирамо:

1) ф-ја f има леву бесконачну граничну вредност у тачки x_0 ако важи:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall K>0)(\exists\delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)(x\in(x_0-\delta, x_0) \Rightarrow f(x)>K)$$

или

$$= -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall K>0)(\exists\delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)(x\in(x_0-\delta, x_0) \Rightarrow f(x)<-K)$$

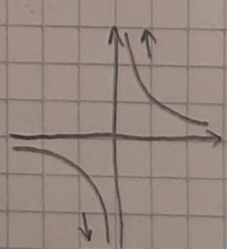
2) ф-ја f има десну бесконачну граничну вредност у тачки x_0 ако важи:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall K>0)(\exists\delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)(x\in(x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f(x)>K)$$

или

$$= -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall K>0)(\exists\delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)(x\in(x_0, x_0+\delta) \Rightarrow f(x)<-K)$$

Пр. Ф-ја $f(x)=\frac{1}{x} : (-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ испуњава
$\lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$



До сада смо разматрали случајеве када је x_0 коначан број. Сада ћемо разматрати случајеве када x_0 узима неку бесконачну вредност.

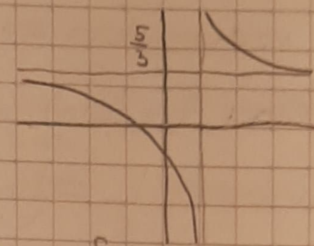
1) ако је ф-ја $f(x): D\to\mathbb{R}$ дефинисана на домену D који није ограничен одоздо, тада:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} L \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x\in D)(x\in(-\infty,\delta) \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon) \\ +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall K>0)(\exists\delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)(x\in(-\infty,\delta)\Rightarrow f(x)>K) \end{cases}$$

$-\infty \overset{def}{\iff} (\forall K>0)(\exists \delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)(x\in(-\infty,\delta)\Rightarrow f(x)<-K).$

Пр. $f(x)=\frac{5x+4}{3x-2}:(-\infty,\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},+\infty)\to\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{5}{3}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5}{3}$



$f(x)=\frac{5x^2+4}{3x-2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

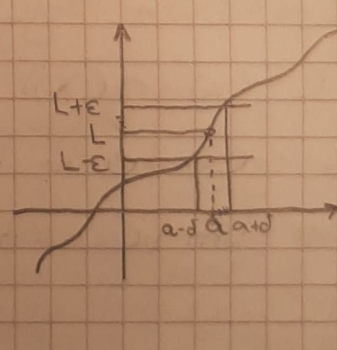
2) ако је f дефинисана на D који није ограничен одозго, уводимо:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\begin{cases} L \overset{def}{\iff} (\forall \varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)(\forall x\in D)(x\in(\delta,+\infty)\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon) \\ +\infty \overset{def}{\iff} (\forall K>0)(\exists\delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)(x\in(\delta,+\infty)\Rightarrow f(x)>K) \\ -\infty \overset{def}{\iff} (\forall K>0)(\exists\delta=\delta(K)>0)(\forall x\in D)(x\in(\delta,+\infty)\Rightarrow f(x)<-K) \end{cases}$$

Веза између граничних вредности низова и граничних вредности функција

(Т) (Хајне) Нека је дата ф-ја $f:D\to\overline{\mathbb{R}}$ која је дефинисана у околини тачке $a\in\overline{\mathbb{R}}$, осим можда у тачки a. Тада важи $L=\lim\limits_{x\to a} f(x)\in\overline{\mathbb{R}}$ акко за сваки низ (x_n) такав да $(\forall n\in\mathbb{N})\ x_n\in D\setminus\{a\}$ је испуњено $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

Пр. Доказати да за $y=\begin{cases}2x, & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$ и $x_0=1$ важи $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$ сагласно Хајнеовој теореми.



Бирамо произвољни низ (x_n) са особином $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$ (ма који низ који тежи 1). Тада $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} 2x_n=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2\cdot 1=2=L.$

Сагласно Хајнеовој теореми: $\lim\limits_{x\to1} f(x)=2$.

Пр. Показати да не постоји $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$.

Бирајући конкретне низове нпр. $x_n^{(1)} = n\pi$, $x_n^{(2)} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, оба низа теже ка ∞, при чему $f(x_n^{(1)}) = \sin n\pi = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $f(x_n^{(2)}) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Ако би постојала гранична вредност $L = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$, тада би и за сваки низ (x_n) који испуњава $x_n \to \infty$ важило $f(x_n) \to L$. За претходна два низа $(x_n^{(1)}) \to \infty$, $(x_n^{(2)}) \to \infty$ и притом $f(x_n^{(1)}) \to 0$, $f(x_n^{(2)}) \to 1$; тиме не постоји L.

Рачунске операције са граничним вредностима

Следећа тврђења су последица Хајнеове теореме:

(Т1) Ако је $f(x) = c = const.$ тада за $\forall a \in \mathbb{R}$ важи $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

(Т2) Нека су ф-је f и g дефинисане у некој околини тачке $a \in \overline{\mathbb{R}}$, осим можда у тачки a. Тада важи:

1) ако постоје $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ за $A, B \in \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = AB$$

ако $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0$ тада $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

2) ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $(A \in \overline{\mathbb{R}})$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, тада:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = +\infty$$

за $A \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

за $A \neq 0$ $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = sgn(A)\cdot\infty$

3) ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $(A \in \overline{\mathbb{R}})$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, тада:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = -\infty$$

за $A \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

за $A \neq 0$ $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = -\operatorname{sgn}(A) \cdot \infty$

4) ако $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $f(x) > 0$ за свако x из неке околине тачке a, тада $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

5) ако $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $f(x) < 0$ за свако x из неке околине тачке a, тада $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Т3 (о два жандара) Ако за свако x из неке околине тачке a важи $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$ и ако је $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$, тада је и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

$(f_1, f, f_2 : D \to \mathbb{R})$

Т4 (о смени променљиве) Нека је ф-ја композиције $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ дефинисана у некој околини тачке $a \in \overline{\mathbb{R}}$ осим можда у самој тачки a.

Ако важи:

1) постоји $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$
2) постоји $\lim\limits_{x \to b} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$
3) постоји нека околина тачке a у којој $g(x) \neq b$.

Тада важи $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = \lim\limits_{t \to b} f(t) = L$.

Важне граничне вредности функција

Т1 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (доказује се одговарајућом геометријском интерпретацијом)

последице: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} = \frac{\alpha^2}{2}$

Т2 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

последице: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

T3 $$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

T4 $$\lim_{x \to 0+0} x^k \ln x = 0, \quad k > 0$$

T5 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0, \quad k > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0, \quad k > 0, \quad a > 1$$