Branko J. Malešević
ETF Beograd, 2020.

1 DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

1.1 Definicije vezane za diferencijalne jednačine po jednoj promenljivoj

Neka je data funkcija $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ za $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Tada implicitna jednačina

$$(*) \qquad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

po nepoznatoj funkciji jedne promenljive (za koju postoje razmatrani izvodi)

$$y = y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$$

se naziva *implicitno zadana diferencijalna jednačina n-tog reda po jednoj promenljivoj $x \in (\alpha, \beta)$.*

Prirodan broj n se naziva *red diferencijalne jednačine.*

Primer 1.1.

1. *Diferencijalna jednačina*

$$y'' - 3(y')^2 + x^4 - y''' = 0$$

je reda $n = 3$.

2. *Diferencijalna jednačina*

$$(y - y'')(y + y'') + (y'')^2 + y' + y = 0$$

je reda $n = 1$.

Definicija 1.2. Rešenje diferencijalne jednačine $(*)$ *je svaka funkcija $y = y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju jednakost $(*)$ važi za svako $x \in (\alpha, \beta)$, tj. $(*)$ predstavlja identitet.*

Primer 1.3. *Za diferencijalnu jednačinu*

$$y'' - 1 = 0$$

jedno rešenje je

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Takođe rešenja su

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

za ma koje realne konstante C_1 i C_2.

Definicija 1.4. Opšte rešenje diferencijalne jednačine $(*)$ n-tog reda *je svaka funkcija $y = y(x) : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ koja ispunjava implicitnu jednačinu*

$$(**) \qquad \Phi(x, y(x), C_1, \dots, C_n) = 0,$$

za konstante $C_1, \dots, C_n \in \overline{\mathbb{R}}$, takve da važi uslovi:

1. *funkcija $y = y(x)$ jeste rešenje diferencijalne jednačine $(*)$;*

2. *diferencijalna jednačina $(*)$ se može dobiti iz implicitne jednačine $(**)$.*

Napomena 1.5. *Često se umesto implicitno zadane jednačine $(**)$ razmatra, ukoliko postoji, ekvivalentna eksplicitno zadana funkcija $y = y(x) = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ (za konstante $C_1, \dots, C_n \in \overline{\mathbb{R}}$) sa istim uslovima iz prethodne definicije.*

Primer 1.6. *Za diferencijalnu jednačinu*

$$F(x, y, y', y'') = y'' - 2y' + y = 0 \tag{1}$$

opšte rešenje je

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

za ma koje realne konstante C_1 *i* C_2 *jer za funkciju* $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ *i implicitnu jednačinu*

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = y - (C_1 e^x + C_2 x e^x) = 0 \tag{2}$$

je ispunjeno:

1. *Funkcija* $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ *jeste rešenje diferencijalne jednačine* (1) ;

2. *Diferencijalna jednačina* (1) *se može dobiti iz implicitne jednačine* (2)*. Navedeno znači sledeće da iz sledećeg sistema uslova:*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\Phi(x, y, C_1, C_2) &= y' - (C_1 e^x + C_2(1 + x)e^x) = 0,\\
\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x, y, C_1, C_2) &= y'' - (C_1 e^x + C_2(2 + x)e^x) = 0
\end{aligned}$$

dobijamo sistem po koeficijentima:

$$\begin{aligned}
C_1 e^x + C_2(1 + x)e^x &= y',\\
C_1 e^x + C_2(2 + x)e^x &= y''
\end{aligned}$$

sa rešenjima:

$$C_1 = \psi_1(x, y, y', y'') = \frac{-y'' + 2y' - x(y'' - y')}{e^x} \ \wedge\ C_2 = \psi_2(x, y, y', y'') = \frac{y'' - y'}{e^x}.$$

Zamenom $C_1 = \psi_1(x, y, y', y'')$ *i* $C_2 = \psi_2(x, y, y', y'')$ *u* (2) *dobijamo:*

$$\Phi(x, y, \psi_1(x, y, y', y''), \psi_2(x, y, y', y'')) = y - \left(\frac{-y'' + 2y' - x(y'' - y')}{e^x} \cdot e^x + \frac{y'' - y'}{e^x} \cdot x\, e^x\right) = 0$$

i odatle dobijamo polaznu diferencijalnu jednačinu (1) :

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Nadalje, u konkretnim primerima, diferencijalnih jednačina $n-$tog reda ne tražimo proveru opštosti rešenja $y = \varphi(x) = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$.

Definicija 1.7. Partikularno rešenje *diferenijalne jednačine* $(*)$ *je rešenje koje se dobija iz opšteg za specijalan izbor konstanti.*

Primer 1.8. *Za diferencijalnu jednačinu*

$$F(x, y, y', y'') = y'' - 1 = 0$$

opšte rešenje je

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

za ma koje realne konstante C_1 *i* C_2*, specijalno izborom* $C_1 = 0$ *i* $C_2 = 0$ *dobijamo jedno partikularno rešenje*

$$y = \frac{1}{2}x^2.$$

Definicija 1.9. Singularno rešenje *diferenijalne jednačine* $(*)$ *je rešenje koje se ne može dobiti iz opšteg ni jedan izbor konstanti.*

Definicija 1.10. Integralna kriva *je svako partikularno ili singularno rešenje diferenijalne jednačine* $(*)$.

Primer 1.11. *Diferencijalna jednačina prvog reda*

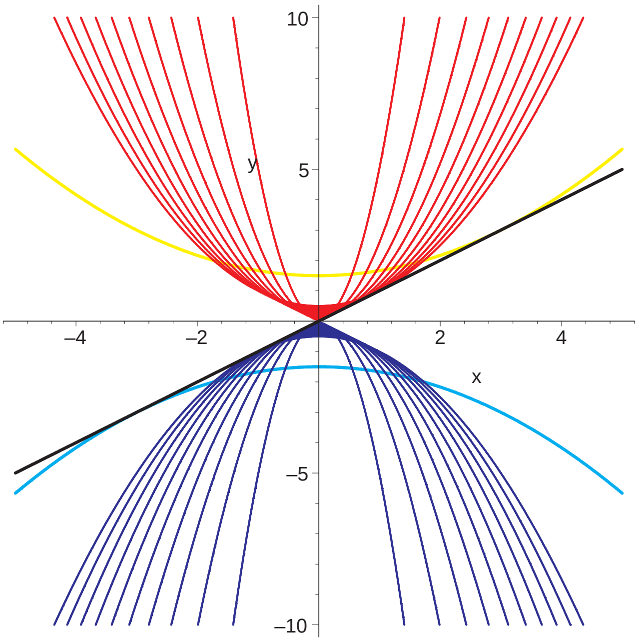
$$F(x, y, y') = x\left((y')^2 + 1\right) - 2yy' = 0, \tag{1}$$

ima opšte rešenje

$$y = y(x) = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2}, \tag{2}$$

za konstantu $C \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *i singularno rešenje*

$$y = y(x) = x. \tag{3}$$



Integralne krive diferencijalne jednačine.

Primetimo da za fiksirano $C > 0$ *i* $x \neq C$ *važi:*

$$y = y(x) = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2} > x \Big/ \underbrace{\cdot 2C}_{>0} \iff (x - C)^2 > 0.$$

Potpuno analogno za fiksirano $C < 0$ *i* $x \neq C$ *važi:*

$$y = y(x) = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2} < x \Big/ \underbrace{\cdot 2C}_{<0} \iff (x - C)^2 > 0.$$

Samim tim i aritmetički je dokazano da prava $y = x$ *nije element familije parabola* $y = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2}$. *Na kraju ovog primera napomenimo da za proizvoljno* $C \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ *tačka* $M_C = (C, C)$ *pripada paraboli* $y = \frac{x^2}{2C} + \frac{C}{2}$ *i tangenta u tački* $M_C = (C, C)$ *na parabolu je upravo singularno rešenje:*

$$y = y(x) = x.$$

Napomenimo da za posmatranu diferencijalnu jednačinu postoji i drugo singularno rešenje:

$$y = y(x) = -x$$

za koje važe analogni zaključci.

Definicija 1.12. *Za diferencijalnu jednačinu* $(*)$ *n-tog reda* Košijevo rešenje *je ono rešenje* $y = y(x)$ *koje ispunjava sledeće početne uslove*:

$$\begin{aligned}&y(x_0) = y_0,\\&y'(x_0) = y_1,\\&\vdots\\&y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1};\end{aligned}$$

za unapred zadanu tačku $x_0 \in (\alpha, \beta)$ *i vrednosti* $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Prethodna lista uslova određuje* Košijeve početne uslove.

1.2 Metode rešavanja diferencijalnih jednačina po jednoj promenljivoj

1. Diferencijalne jednačine I reda - načini zadavanja

Diferencijalne jednačine I reda se određuju u *implicitnom obliku*:

$$F(x, y, y') = 0,$$

za $F : D_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ za $D_3 \subseteq \mathbb{R}^3$. Rešavajuću prethodnu jednačinu po y', ukoliko je moguće, tada diferencijalnu jednačinu I reda određujemo u *eksplicitnom obliku*:

$$y' = f(x, y),$$

za $f : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ za $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Dalje, na osnovu zapisa izvoda preko diferencijala

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

ukoliko je

$$f(x) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

za neke funkcije $P, Q : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, za $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ i pri tom $Q \neq 0$, dobijamo diferencijalnu jednačininu I reda u *diferencijalnom obliku*:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

2. Diferencijalne jednačine I reda - metode rešavanja

Navodimo metode rešavanja diferencijalnih jednačina I reda u nekim standardnim tipovima.

(*i*) Diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive određena je u jednom od oblika:

$$y' = f(x)g(y) \iff \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \iff \frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx,$$

za neke funkcije $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, za neke intervale $D_1, E_1 \subseteq \mathbb{R}$ i $g(x) \neq 0$. Ova diferencijalna jednačina svodi se na direktnu integraciju

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx.$$

Zadatak 1. *Rešiti diferencijalnu jednačinu*:

$$y' = \frac{x}{y}\, e^{x^2 - y^2}.$$

Rešenje. Važi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} e^{x^2} \cdot e^{-y^2} \quad \Longrightarrow \quad y\, e^{y^2} dy = x\, e^{x^2} dx.$$

Odatle integracijom

$$\int y\, e^{y^2} dy \;=\; \int y\, e^{y^2} dy$$

dobijamo opšte rešenje u implicitnom obliku

$$\boldsymbol{e^{y^2} = e^{x^2} + C},$$

za neku realnu konstantu C. Opšte rešenje u eksplicitnom obliku je dato sa

$$\boldsymbol{y = \pm\sqrt{\ln(e^{x^2} + C)}}. \qquad \square$$

***(ii)* Homogene diferencijalne jednačine** određene su u eksplicitnom obliku:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

za neko $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ i za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Rešavaju se smenom

$$u = \frac{y}{x} \;\Longrightarrow\; y = ux \;\Longrightarrow\; y' = u'x + u,$$

preko pomoćne funkcije $u = u(x)$, svodeći je na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive. Drugo određenje homogene diferencijalne jednačine je sa diferencijalnom jednačinom u diferencijalnom obliku:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

pri čemu za funkcije $P, Q : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, gde $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ se traži da je ispunjen *uslov homogenosti*

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n P(x, y) \quad \text{i} \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n Q(x, y).$$

za neki prirodan broj n.

Zadatak 2. *Rešiti diferencijalnu jednačinu:*

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Rešenje. Funkcije $P(x, y) = x^2 - 3y^2$ i $Q(x, y) = 2xy$ jesu homogene stepena homogenosti $n = 2$. Samim tim dobijamo

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0 \Big/ : x^2 dx \tag{1}$$

$$\Longrightarrow \qquad 1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\,\frac{y}{x}\,\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \qquad y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}} \tag{3}$$

Za $y = y(x)$ funkcija $u = u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ određuje smenu

$$u = \frac{y}{x} \;\Longrightarrow\; y = u\,x \;\Longrightarrow\; y' = u'x + u \tag{4}$$

i odatle zaključujemo da se jednačina (2) može smenom (4) svesti na oblik diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive

$$\begin{aligned}
& 1-3u^2+2u\left(u'x+u\right)=0 \\
\Longrightarrow\quad & 1-3u^2+2uxu'+2u^2=0 \\
\Longrightarrow\quad & 2uxu'=u^2-1 \\
\Longrightarrow\quad & 2ux\frac{du}{dx}=u^2-1 \\
\Longrightarrow\quad & \frac{2u}{u^2-1}du=\frac{1}{x}dx \\
\Longrightarrow\quad & \ln|u^2-1|=\ln|x|+C,
\end{aligned}$$

za neku realnu konstantu C. Neka je $C=\ln C_1$, za $C_1>0$, tada nalazimo opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine u implicitnom obliku:

$$\begin{aligned}
& \ln|u^2-1|=\ln|x|+\ln C_1 \\
\Longrightarrow\quad & u^2-1=C_1x \\
\Longrightarrow\quad & \left(\frac{y}{x}\right)^2-1=C_1x \\
\Longrightarrow\quad & \boldsymbol{y^2-x^2=C_1x^3}.
\end{aligned}$$

$\square$

***(iii)* Uopštene homogene diferencijalne jednačine** određene su u eksplicitnom obliku:

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right),$$

za neko $f\colon D_1\longrightarrow\mathbb{R}$ i za neki interval $D_1\subseteq\mathbb{R}$ za neke realne konstante $a_{1,2},b_{1,2},c_{1,2}$. Razlikujemo:

1. Ako je:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0,$$

uvodi se smena:

$$x=u+h,\ y=v+k,$$

gde je $v=v(u)$ pomoćna funkcija i h,k brojevi koji su rešenja sistema:

$$\left\{\begin{aligned} a_1h+b_1k+c_1&=0, \\ a_2h+b_2k+c_2&=0. \end{aligned}\right\}$$

U tom slučaju posmatrana diferencijalna jednačina se transformiše u jednostavniji eksplicitni oblik:

$$v'=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right),$$

što je diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive i rešava se sa smenom $w=\dfrac{v}{u}$, odakle nalazimo $v'=v'_u=w'_uu+w$.

2. Ako je:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

uz dodatnu pretpostavku $a_1 \neq 0$, uvodi se smena:

$$u = a_1x + b_1y$$

gde je $u = u(x)$ pomoćna funkcija. U tom slučaju je $u' = u'_x = a_1 + b_1y'$ i posmatrana diferencijalna jednačina se transformiše u eksplicitni oblik diferencijalne jednačine koja razdvaja promenljive:

$$u' = a_1 + b_1 f\left(\frac{u + c_1}{\frac{a_2}{a_1}u + c_2}\right).$$

Zadatak 3. *Rešiti diferencijalne jednačine*:

(*i*)

$$y' = \frac{4x - y - 1}{-x + y - 2},$$

(*ii*)

$$y' = \frac{x + y + 1}{3x + 3y + 1}.$$

Rešenje. (*i*) Na osnovu $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ neophodno je uvesti smenu

$$x = u + h, \quad y = v + k,$$

za neke funkcije $u = u(x)$ i $v = v(y)$ i neke realne konstante h i k koje naknadno određujemo. Ako su h i k konstante, onda mora biti $u = u(x)$ i $v = v(y)$. Primetimo

$$y' = y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v + k)}{d(u + h)} = \frac{dv}{du} = v'_u = v'.$$

Samim tim

$$\begin{aligned} y' = \frac{4x - y - 1}{-x + y - 2} &\iff v' = \frac{4(u + h) - (v + k) - 1}{-(u + h) + (v + k) - 2} \\ &\iff v' = \frac{4u - v + (4h - k - 1)}{-u + v + (-h + k - 2)}. \end{aligned}$$

Rešavamo prethodnu diferencijalnu jednačinu pri izboru realnih konstanti h i k takvih da

$$\left\{ \begin{array}{l} 4h - k - 1 = 0, \\ -h + k - 2 = 0; \end{array} \right\}$$

tj. za

$$h = 1 \quad \text{i} \quad k = 1.$$

Za takav izbor konstanti diferencijalna jednačina

$$v'_u = \frac{4u - v}{-u + v} = \frac{4 - \frac{v}{u}}{-1 + \frac{v}{u}}$$

jeste jedna homogena diferencijalna jednačina koja se rešava smenom

$$w = \frac{v}{u},$$

odakle nalazimo

$$v'_u = w'_u u + w.$$

Samim tim dobijamo diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive

$$\begin{aligned}
v'_u = \frac{4u-v}{-u+v} &\iff w'_u u + w = \frac{4u-wu}{-u+wu}\\
&\iff w'_u = \frac{1}{u}\left(\frac{4-w}{-1+w} - w\right)\\
&\iff \frac{dw}{du} = \frac{1}{u}\cdot\frac{4-w^2}{w-1}\\
&\iff \frac{w-1}{4-w^2}dw = \frac{1}{u}du.
\end{aligned}$$

Integracijom

$$\int \frac{w-1}{4-w^2}\,dw = \int \frac{w}{4-w^2}\,dw - \int \frac{1}{4-w^2}\,dw = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$\iff \quad -\frac{1}{2}\ln|4-w^2| - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+w}{2-w}\right| = \ln|u| + \ln C_1,$$

za neku konstantu $C_1 > 0$, nalazimo

$$(2-w)(2+w)^3 = \frac{1}{(C_1u)^4}.$$

Konačno, dobijamo opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{C_1^4(4x^2-8x-y^2+6y-5)(2x+y-5)=1}.$$

(ii) Opšte rešenje posmatrane diferencijalne jednačine je dato sa

$$\boldsymbol{3y + x + \ln|x+y| = 2\,C},$$

za neku realnu konstantu C. □

***(iv)* Linearna diferencijalna jednačina** je diferencijalna jednačina oblika[*)]:

$$(*) \qquad y' + P(x)y = Q(x),$$

za neprekidne funkcije $P, Q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $Q(x) = 0$ za svako $x \in D_1$, tada se radi o *homogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini I reda.* Inače ako je $Q(x) \neq 0$ za neko $x \in D_1$, tada se radi o *nehomogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini I reda.*

Formula opšteg rešenja je data sa sledećim tvrđenjem.

Teorema 1.13. *Opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine*

$$(*) \qquad y' + P(x)\,y = Q(x),$$

gde su $P = P(x)$ i $Q = Q(x)$ neprekidne funkcije nad intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, je dato formulom:

$$y = \left(C + \int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}dx\right)\cdot e^{-\int P(x)\,dx}.$$

[*)]koji nije formalno eksplicitni oblik

Posebno za Košijev početni uslov

$$y(x_0) = y_0,$$

za ma koju tačku $x_0 \in D_1$ *i fiksiranu vrednost* $y_0 \in \mathbb{R}$*, Košijevo rešenje je dato formulom:*

$$y = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\, dx} dx \right) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\, dx}.$$

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja:

(i) $Q(x) = 0$: Važi

$$\begin{aligned} y' + P(x)\, y = 0 \;&\Longrightarrow\; \frac{y'}{y} = -P(x) \\ &\Longrightarrow\; \ln y = -\int P(x)\, dx + \ln C \qquad (C - const.) \\ &\Longrightarrow\; y = Ce^{-\int P(x)\, dx}, \end{aligned}$$

za neku pozitivnu realnu konstantu C.

(ii) $Q(x) \neq 0$: Množenjem

$$y' + P(x)\, y = Q(x) \;\Big/\cdot\, e^{\int P(x) dx}$$

zaključujemo

$$\begin{aligned} & y' \cdot e^{\int P(x)\, dx} + P(x)\, y \cdot e^{\int P(x)\, dx} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)\, dx} \\ \Longleftrightarrow\quad & y' \cdot e^{\int P(x)\, dx} + y \cdot e^{\int P(x)\, dx} P(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)\, dx} \qquad \text{i} \qquad e^{\int P(x)\, dx} P(x) = \left(e^{\int P(x)\, dx}\right)' \\ \Longleftrightarrow\quad & \left(y\, e^{\int P(x)\, dx}\right)' = Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx} \\ \Longrightarrow\quad & y\, e^{\int P(x)\, dx} = \int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx + C \qquad (C - const.) \\ \Longrightarrow\quad & y = e^{-\int P(x)\, dx} \left(C + \int Q(x)\, e^{\int P(x)\, dx}\, dx \right), \end{aligned}$$

za neku realnu konstantu C. Evidentno je da Košijevo rešenje koje ispunjava zadati početni uslov dato formulom

$$y = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\, dx} dx \right) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\, dx}.$$

Drugi metod za određivanje Košijevog rešenja je da se odredi konstanta C iz opšteg rešenja tako da je ispunjen početni uslov $y(x_0) = y_0$. ∎

Zadatak 4. *Rešiti diferencijalne jednačine:*

(i)

$$y' + \frac{1}{x} y = 3x,$$

(ii)

$$2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0.$$

Rešenje. (i) Za funkciju $P = P(x) = \dfrac{1}{x} : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subset R\backslash\{0\}$ i za funkciju $Q = Q(x) = 3x : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ prema formuli opšteg rešenja

$$
\begin{aligned}
y &= \left(C+\int Q(x)\, e^{\int P(x)\,dx} dx\right) e^{-\int P(x)\,dx} = \left(C+\int 3x\, e^{\int \frac{1}{x}\,dx} dx\right) e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\\
&= \left(C+\int 3x\, e^{\ln|x|} dx\right) e^{-\ln|x|} = \left(C+\int 3x|x|\,dx\right)\frac{1}{|x|} = \boldsymbol{\left(C+|x|^3\right)\frac{1}{|x|}}\,,
\end{aligned}
$$

pri čemu $x\neq 0$. Napomenimo da se jednakost $\displaystyle\int 3x|x|\,dx = |x|^3 + C_1$ (gde je $C_1 - const.$) jednostavno proverava razlikovanjem slučajeva u zavisnosti od znaka x nad intervalom koji ne sadrži nulu i nad kojim se razmatra ovaj integral.

(ii) Polazeći od diferencijalnog oblika

$$
2ydx + (y^2 - x^2)dy = 0
$$

moguća su dva ekvivalentna eksplicitna oblika

$$
y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{-y^2+2x}
$$

i

$$
\begin{aligned}
x'_y &= \frac{dx}{dy} = \frac{-y^2+2x}{2y}\\
&= \frac{2x-y^2}{2y} = \frac{1}{y}x - \frac{y}{2}\\
\Longrightarrow\quad x'_y &+ \underbrace{\left(-\frac{1}{y}\right)}_{P(y)} x = \underbrace{\left(-\frac{y}{2}\right)}_{Q(y)}.
\end{aligned}
$$

Drugi oblik diferencijalne jednačine jeste primer linearne diferencijalne jednačine po funkciji $x = x(y)$. Po formuli opšteg rešenja

$$
\begin{aligned}
x = x(y) &= \left(C+\int Q(y)\, e^{\int P(y)\,dy} dy\right)\cdot e^{-\int P(y)\,dy}\\
&= \left(C+\int \left(-\frac{y}{2}\right) e^{\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy} dy\right)\cdot e^{-\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy}\\
&= \left(C+\int \left(-\frac{y}{2}\right) e^{-\ln|y|} dy\right)\cdot e^{\ln|y|}\\
&= \left(C-\frac{1}{2}\int \frac{y}{|y|}\,dy\right)|y|\\
&= \left(C-\frac{1}{2}|y|\right)|y|\\
&= \boldsymbol{C|y| - \frac{1}{2}y^2},
\end{aligned}
$$

pri čemu $y\neq 0$. Napomenimo da se jednakost $\displaystyle\int \frac{y}{|y|}\,dy = |y| + C_1$ (gde je $C_1 - const.$) jednostavno proverava razlikovanjem slučajeva u zavisnosti od znaka y nad intervalom koji ne sadrži nulu i nad kojim se razmatra ovaj integral.

Zadatak 5. *Naći Košijeva rešenja sledećih diferencijalnih jednačina:*

(i)

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x, \quad y(2) = 1;$$

(ii)

$$2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0, \quad y(1) = 2.$$

Rešenje. (i) Zamenom u opšte rešenje iz prethodnog zadatka

$$y = y(x) = \left(C + |x|^3\right)\frac{1}{|x|}$$

nalazimo vrednost konstante $y(2) = 1 \Longleftrightarrow (C+8)\,\frac{1}{2} = 1 \Longleftrightarrow \boldsymbol{C = -6}$ i time Košijevo rešenje

$$y = y(x) = \frac{|x|^3 - 6}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

(ii) Zamenom u opšte rešenje iz prethodnog zadatka

$$x = x(y) = C|y| - \frac{1}{2}y^2$$

nalazimo vrednost konstante $y(1) = 2 \Longleftrightarrow x(2) = 1 \Longleftrightarrow C|2| - \frac{1}{2}|2|^2 = 1 \Longleftrightarrow \boldsymbol{C = \frac{3}{2}}$ i time Košijevo rešenje

$$x = x(y) = \frac{3}{2}|y| - \frac{1}{2}y^2, \quad y \neq 0.$$

(v) Bernulijeva diferencijalna jednačina je diferencijalna jednačina oblika$^{*)}$:

$$(*) \qquad y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha,$$

za neprekidne funkcije $P, Q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde je Q ne-nula funkcija i pri tom $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$.

Teorema 1.14. *Bernulijeva diferencijalna jednačina:*

$$(*) \qquad y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha,$$

za neprekidne funkcije $P, Q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *za neki interval* $D_1 \subseteq \mathbb{R}$*, gde je* Q *ne-nula funkcija i pri tom* $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$*, smenom:*

$$z = z(x) = y^{1-\alpha} = \frac{y}{y^\alpha} \quad \Longrightarrow \quad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = \frac{1-\alpha}{y^\alpha}y'.$$

se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu:

$$(**) \qquad z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x).$$

Dokaz. Za $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ važi:

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^\alpha \big/ : y^\alpha \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'}{y^\alpha} + P(x)\,y^{1-\alpha} = Q(x).$$

Uvodeći smenu $z = z(x) = y^{1-\alpha}$ dobijamo $z' = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}\,y' = (1-\alpha)\,\frac{y'}{y^\alpha}$, čime se polazna Bernulijeva diferencijalna jednačina svodi na linearnu diferencijalnu jedanačinu:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad z' + \underbrace{(1-\alpha)\,P(x)}_{P_1(x)}\,z = \underbrace{(1-\alpha)\,Q(x)}_{Q_1(x)},$$

sa neprekidnim funkcijama $P_1, Q_1 : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. ∎

$^{*)}$koji nije formalno eksplicitni oblik

Napomena 1.15. *Nalazeći opšte rešenje $z = z(x)$ linearne diferencijalne jednačine $(**)$ i vraćajući smenu $z = y^{1-\alpha}$ nalazimo $y = y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ kao opšte rešenje Bernulijeve diferencijalne jednačine $(*)$.*

Zadatak 6. *Rešiti diferencijalne jednačine:*

(i)

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y},$$

(ii)

$$2ydx + (x - \frac{1}{2}x^3y)dy = 0.$$

Rešenje. (i) Posmatrana diferencijalna jednačina

$$y' + \underbrace{\frac{x}{1-x^2}}_{P(x)}\, y = \underbrace{x}_{Q(x)}\, y^{1/2},$$

jeste Bernulijeva diferencijalna jednačina po funkciji $y = y(x)$ sa parametrom $\boldsymbol{\alpha = 1/2}$. Samim tim posmatrana Bernulijeva diferencijalna jednačina se rešava smenom

$$z = z(x) = y^{1-\alpha} = y^{1-1/2} = y^{1/2} = \sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad y = z^2$$

svođenjem na odgovarajuću linearnu diferencijalnu jednačinu. Zaista

$$\begin{aligned}
y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y} \quad &\Longleftrightarrow \quad (z^2)' + \frac{x}{1-x^2}z^2 = x\sqrt{z^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2\,z\,z' + \frac{x}{1-x^2}z^2 = xz \;\Big/ :z \\
&\Longleftrightarrow \quad 2\,z' + \frac{x}{1-x^2}z = x \;\Big/ :2 \\
&\Longleftrightarrow \quad z' + \underbrace{\frac{x}{2(1-x^2)}}_{P_1(x)}\, z = \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{Q_1(x)}.
\end{aligned}$$

Prema formuli opšteg rešenja

$$\begin{aligned}
z = z(x) &= \left(C + \int Q_1(x)\, e^{\int P_1(x)\,dx} dx\right) e^{-\int P_1(x)\,dx} \\
&= \left(C + \int \frac{x}{2}\, e^{\int \frac{x}{2(1-x^2)}\,dx} dx\right) e^{-\int \frac{x}{2(1-x^2)}\,dx} \\
&= \left(C + \int \frac{x}{2}\, e^{-\frac{1}{4}\ln|1-x^2|} dx\right) e^{\frac{1}{4}\ln|1-x^2|} \\
&= \left(C + \int \frac{x}{2}\, e^{\ln\left(1/|\sqrt[4]{1-x^2}|\right)} dx\right) e^{\ln|\sqrt[4]{1-x^2}|} \\
&= \left(C + \int \frac{x}{2}\, \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}} dx\right) \sqrt[4]{1-x^2}, \qquad x \in D_1 = (-1, 1)\,.
\end{aligned}$$

Dalje, za $x \in D_1 = (-1,1)$ nalazimo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z = z(x)} &= \left(C - \frac{1}{4} \int \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt[4]{1-x^2}} dx \right) \sqrt[4]{1-x^2} \\
&= \left(C - \frac{1}{4} \int \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}} d\left(1-x^2\right) \right) \sqrt[4]{1-x^2} \\
&= \left(C - \frac{1}{4} \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{4}}}{3/4} \right) \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\boldsymbol{= C\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}\left(1-x^2\right)}.
\end{aligned}$$

Samim tim, na osnovu $y = z^2$, nalazimo opšte rešenje Bernulijeve diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{y = y(x) = \left(C\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3}\left(1-x^2\right) \right)^2}, \quad x \in D_1 = (-1,1)\,.$$

(ii) Polazeći od diferencijalnog oblika

$$y dx + \left(x - \frac{1}{2} x^3 y \right) dy = 0$$

moguća su dva ekvivalentna eksplicitna oblika

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{-x + \frac{1}{2} x^3 y}$$

i

$$\begin{aligned}
x'_y = \frac{dx}{dy} &= \frac{-x + \frac{1}{2} x^3 y}{y} \\
&= -\frac{1}{y} x + \frac{1}{2} x^3 \\
\Longrightarrow \quad x'_y + \underbrace{\left(\frac{1}{y}\right)}_{P_1(y)} x &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{Q_1(y)} x^3.
\end{aligned}$$

Drugi oblik diferencijalne jednačine jeste Bernulijeva diferencijalna jednačina po funkciji $x = x(y)$ sa parametrom $\boldsymbol{\alpha = 3}$. Samim tim posmatrana Bernulijeva diferencijalna jednačina se rešava smenom

$$z = z(y) = x^{1-\alpha} = x^{1-3} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{z}} = z^{-\frac{1}{2}}$$

svođenjem na odgovarajuću linearnu diferencijalnu jednačinu. Zaista

$$\begin{aligned}
x' + \frac{1}{y} x = \frac{1}{2} x^3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(z^{-\frac{1}{2}}\right)' + \frac{1}{y}\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3} \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' + \frac{1}{y} z^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \;\Big/ : z^{-\frac{3}{2}} \\
&\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} z' + \frac{1}{y} z = \frac{1}{2} \;\Big/ : \left(-\frac{1}{2}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad z' + \underbrace{\left(-\frac{2}{y}\right)}_{P_1(y)} z = \underbrace{(-1)}_{Q_1(y)}.
\end{aligned}$$

Prema formuli opšteg rešenja

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z = z(y)} &= \left(C + \int Q_1(y)\, e^{\int P_1(y)\,dy} dy\right) e^{-\int P_1(y)\,dy}\\
&= \left(C + \int (-1)\; e^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy} dy\right) e^{-\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy}\\
&= \left(C - \int e^{-2\ln|y|} dy\right) e^{\,2\ln|y|}\\
&= \left(C - \int e^{\ln\left(1/y^2\right)} dy\right) e^{\,\ln y^2}\\
&= \left(C - \int \frac{1}{y^2}\,dy\right) y^2\\
&= \left(C + \frac{1}{y}\right) y^2\\
&= \boldsymbol{Cy^2 + y}.
\end{aligned}$$

Samim tim, na osnovu $x = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$, nalazimo opšte rešenje Bernulijeve diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{x = x(y) = \frac{1}{Cy^2 + y}}. \qquad \square$$

***(vi)* Rikatijeva diferencijalna jednačina** je diferencijalna jednačina eksplicitnog oblika:

$$(*) \qquad y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

za neprekidne funkcije $P, Q, R\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ nad domenom nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde su P i Q ne-nula funkcije. U opštem slučaju se ne rešava u kvadraturama, tj. u konačno mnogo koraka integracije.

Teorema 1.16. *Neka je*

$$y_p = y_p(x)$$

jedno partikularno rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine

$$(*) \qquad y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

za neprekidne funkcije $P, Q, R\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ nad domenom nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde su P i Q ne-nula funkcije. Smenom

$$z = z(x) = \frac{1}{y - y_p} \quad\Longrightarrow\quad y = y_p + \frac{1}{z},$$

Rikatijeva diferencijalna jednačina $(*)$ se svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$(**) \qquad z' + \big(2y_pP(x) + Q(x)\big)z = \big(-P(x)\big).$$

Dokaz. Neka je $y_p = y_p(x)$ jedno partikularno rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine, tada za funkciju $y_p = y_p(x)$ je ispunjeno

$$(*)_p \qquad y_p' = P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x).$$

Neka je $z = z(x)$ funkcija takva da je $z = z(x) = \dfrac{1}{y - y_p}$. Tada na osnovu

$$y = y_p + \frac{1}{z} \implies y' = y_p' - \frac{z'}{z^2},$$

zaključujemo

$$\begin{aligned}
& \underbrace{y_p' - \frac{z'}{z^2}}_{y'} = P(x)\underbrace{\left(y_p + \frac{1}{z}\right)^2}_{y^2} + Q(x)\underbrace{\left(y_p + \frac{1}{z}\right)}_{y} + R(x) \\
\underset{(*)_p}{\implies} \; & \underbrace{P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x)}_{y_p'} - \frac{z'}{z^2} = P(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + R(x) \\
\implies \; & P(x)y_p^2 + Q(x)y_p + R(x) - \frac{z'}{z^2} = P(x)y_p^2 + 2P(x)y_p\frac{1}{z} + P(x)\frac{1}{z^2} + Q(x)y_p + Q(x)\frac{1}{z} + R(x) \\
\implies \; & -\frac{z'}{z^2} = 2P(x)y_p\frac{1}{z} + P(x)\frac{1}{z^2} + Q(x)\frac{1}{z} \quad \Big/ \cdot(-z^2) \\
\implies \; & z' = -2P(x)y_p\, z - P(x) - Q(x)\, z \\
\implies \; & z' + \underbrace{\big(2P(x)y_p + Q(x)\big)}_{P_2(x)} z = \underbrace{\big(-P(x)\big)}_{Q_2(x)}.
\end{aligned}$$

sa neprekidnim funkcijama $P_2, Q_2 : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. ■

Napomena 1.17. *Nalazeći opšte rešenje $z = z(x)$ linearne diferencijalne jednačine $(**)$ i vraćajući smenu $z = \dfrac{1}{y - y_p}$ nalazimo $y = y(x) = y_p(x) + \dfrac{1}{z(x)}$ kao opšte rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine $(*)$.*

Zadatak 7. *Rešiti diferencijalne jednačine:*

(i)

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2},$$

tražeći partikularno rešenje u obliku $y_p = A/x$ za $A \in \mathbb{R}$;

(ii)

$$dx + (x^2 - y^2 - 1)dy = 0,$$

tražeći partikularno rešenje u obliku $x_p = By$ za $B \in \mathbb{R}$.

Rešenje. *(i)* Posmatrana diferencijalna jednačina

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2},$$

jeste Rikatijeva diferencijalna jednačina po funkciji $y = y(x)$ i pri tom se zna oblik partikularnog rešenja $y_p = A/x$ za $A \in \mathbb{R}$. Prvo određujemo konstantu A na osnovu

$$\begin{aligned} y_p' = \frac{1}{2}y_p^2 + \frac{1}{2x^2} \quad &\iff \quad \left(\frac{A}{x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x}\right)^2 + \frac{1}{2x^2} \\ &\iff \quad -\frac{A}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{A^2}{x^2} + \frac{1}{2x^2} \ \Big/ \cdot 2x^2 \\ &\iff \quad -2A = A^2 + 1 \\ &\iff \quad (A+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A = -1}. \end{aligned}$$

Samim tim partikularno rešenje je funkcija

$$\boldsymbol{y_p = -\frac{1}{x}}.$$

Znajući jedno partikularno rešenje y_p posmatrana Rikatijeva diferencijalna jednačina se rešava smenom

$$\boldsymbol{z = \frac{1}{y - y_p} \quad \Longrightarrow \quad y = y_p + \frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}}$$

svođenjem na odgovarajuću linearnu diferencijalnu jednačinu po funkciji $z = z(x)$. Zaista

$$\begin{aligned} y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2} \quad &\iff \quad \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{2x^2} \\ &\iff \quad \frac{1}{x^2} + (z^{-1})' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) + \frac{1}{2x^2} \\ &\iff \quad \frac{1}{x^2} - z^{-2}z' = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xz} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \\ &\iff \quad -z^{-2}z' = -\frac{1}{xz} + \frac{1}{2z^2} \ \Big/ : \left(-\frac{1}{z^2}\right) \\ &\iff \quad z' = \frac{1}{x}z - \frac{1}{2} \\ &\iff \quad z' + \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{P_2(x)} z = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{Q_2(x)}. \end{aligned}$$

Prema formuli opšteg rešenja

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z = z(x)} &= \left(C + \int Q_2(x)\, e^{\int P_2(x)\,dx} dx\right) e^{-\int P_2(x)\,dx} \\ &= \left(C + \int \left(-\frac{1}{2}\right)\, e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} dx\right) e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} \\ &= \left(C - \frac{1}{2}\int e^{-\ln|x|} dx\right) e^{\ln|x|} \\ &= \left(C - \frac{1}{2}\int e^{\ln(1/|x|)} dx\right) e^{\ln|x|} \\ &= \left(C - \frac{1}{2}\int \frac{1}{|x|}\,dx\right)|x| \\ &= \left(C - \frac{1}{2}\ln|x|\right)|x| = \boldsymbol{C|x| - \frac{|x|}{2}\ln|x|}. \end{aligned}$$

Samim tim, na osnovu $y = y_p + \dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$, nalazimo opšte rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{y = y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{C|x| - \frac{|x|}{2}\ln|x|}}.$$

(ii) Polazeći od diferencijalnog oblika

$$1\,dx + \big(x^2 - y^2 - 1\big)\,dy = 0$$

moguća su dva ekvivalentna eksplicitna oblika

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2 - y^2 - 1}$$

i

$$\begin{aligned} x'_y &= \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2 - 1}{-1} \\ &= -x^2 + y^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad x'_y = \underbrace{\big(-1\big)}_{P(y)} x^2 + \underbrace{\big(0\big)}_{Q(y)} x + \underbrace{\big(y^2 + 1\big)}_{R(y)}.$$

Drugi oblik diferencijalne jednačine jeste Rikatijeva diferencijalna jednačina po funkciji $\boldsymbol{x = x(y)}$ i pri tom se zna oblik partikularnog rešenja $x_p = By$ za $B \in \mathbb{R}$. Prvo određujemo konstantu B na osnovu

$$\begin{aligned} (x_p)'_y = -x_p^2 + y^2 + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad (By)'_y = -\,(By)^2 + y^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad B = -B^2 y^2 + y^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad -B^2 y^2 + y^2 + 1 - B = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (1 - B^2)\, y^2 + (1 - B) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(1 - B\big)\big((B+1)\, y^2 + 1\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{B = 1}. \end{aligned}$$

Samim tim partikularno re vsenje je funkcija

$$\boldsymbol{x_p = x_p(y) = By = y}.$$

Znajući jedno partikularno rešenje x_p posmatrana Rikatijeva diferencijalna jednačina se rešava smenom

$$\boldsymbol{z = \frac{1}{x - x_p} \quad \Longrightarrow \quad x = x_p + \frac{1}{z} = y + \frac{1}{z}}$$

svođenjem na odgovarajuću linearnu diferencijalnu jednačinu po funkciji $z = z(y)$. Zaista

$$\begin{aligned} x'_y = -x^2 + y^2 + 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big(y + \frac{1}{z}\Big)'_y = -\Big(y + \frac{1}{z}\Big)^2 + y^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 + (z^{-1})' = -y^2 - 2y\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + y^2 + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{z'_y}{z^2} = -2y\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \;\Big/ \cdot(-z^2) \\ &\Longleftrightarrow \quad z'_y = 2yz + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad z' + \underbrace{(-2y)}_{P_2(y)} z = \underbrace{(1)}_{Q_2(y)}. \end{aligned}$$

Prema formuli opšteg rešenja

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z=z(y)} &= \left(C+\int Q_2(y)\,e^{\int P_2(y)\,dy}dy\right)e^{-\int P_2(y)\,dy}\\
&= \left(C+\int (1)\;e^{\int(-2y)\,dy}dy\right)e^{-\int(-2y)\,dy}\\
&= \boldsymbol{\left(C+\int e^{-y^2}dy\right)e^{\,y^2}}.
\end{aligned}$$

Samim tim na osnovu $x=y+\dfrac{1}{z}$, nalazimo opšte rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{x=x(y)=y+\frac{1}{\left(C+\int e^{-y^2}dy\right)e^{\,y^2}}}.$$

Napomenimo da integral $\displaystyle\int e^{-t^2}dt$ nije elementarna funkcija. $\square$

***(vii)* Langranžova diferencijalna jednačina** je diferencijalna jednačina oblika:

$$y=\varphi(y')x+\psi(x),$$

za neprekidne funkcije $\varphi,\psi\colon D_1\longrightarrow\mathbb{R}$ za neki interval $D_1\subseteq\mathbb{R}$. Neka je $\varphi(p)\neq p$. Tada posmatrana diferencijalna jenačina se rešava pomoću funkcije:

$$x=x(p)$$

smenom:

$$p=y' \quad\wedge\quad d_py=p\,d_px=p\,x'_p\,dp.$$

Zaista

$$d_py=d_p(\varphi(p)x+\psi(p))=\big(\varphi'_p(p)x+\varphi(p)x'_p+\psi'_p(p)\big)dp=p\,x'_p\,dp$$

$$\Longrightarrow\quad x'_p+\frac{\varphi'_p(p)}{\varphi(p)-p}x=-\frac{\psi'_p(p)}{\varphi(p)-p}$$

Ako je $\varphi(p)=p$ tada postoji singularno rešenje:

$$y=p\cdot x+\psi(p).$$

3. Diferencijalne jednačine n-tog reda

Diferencijalne jednačine n-tog reda se određuju u *implicitnom obliku*:

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0,$$

za $F:D_{n+2}\longrightarrow\mathbb{R}$, za $D_{n+2}\subseteq\mathbb{R}^{n+2}$. Diferencijalne jednačine n-tog reda, za $n\geq 2$ nazivamo diferencijalnim jednačinama višeg reda.

Nadalje od diferencijalnih jednačina višeg rada razmatramo samo linearne diferencijalne jednačine u sledećoj sekciji.

4. Diferencijalne višeg reda - metode rešavanja

***(i)* Linearna diferencijalna jednačina *n*-tog reda** je diferencijalna jednačina

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Ako su $a_1 = a_1(x), \ldots, a_n = a_n(x)$ konstante tada $(*)$ je *linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima*, u protivnom je sa funkcionalnim koeficijentima. Ako je $f(x) = 0$ diferencijalna jednačina $(*)$ je *homogena linearna diferencijalna jednačina*, a ako je $f(x) \neq 0$ diferencijalna jednačina $(*)$ je *nehomogena linearna diferencijalna jednačina*.

***(ii)* Homogena linearna diferencijalna jednačina *n*-tog reda** je diferencijalna jednačina:

$$(*)_H \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,$$

gde su $a_1, \ldots, a_n : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Rešenje diferencijalne jednačine $(*)_H$ dato u obliku nula funkcije

$$y = y(x) = 0$$

se naziva *trivijalno rešenje*. Funkcije $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ definisane nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ su *linearno zavisne* ako postoje realne konstante $c_1, \ldots, c_n$ takve da $c_1^2 + \ldots + c_n^2 \neq 0$ i da važi $(\forall x \in D_1)\, c_1y_1(x) + \ldots + c_ny_n(x) = 0$. U suprotnom su *linearno nezavisne*. Neka je dato n funkcija $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$, tada determinanta

$$W(y_1, \ldots, y_n, x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se naziva *determinanta Vronskog*. Važi tvrđenje:

Teorema 1.18. *Neka su $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$. Tada je ili*

$(\forall x \in D_1)\, W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ i funkcije $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ su linearno nezavisne

ili

$(\forall x \in D_1)\, W(y_1, \ldots, y_n) = 0$ i funkcije $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ su linearno zavisne.

Teorema 1.19. *Neka su $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ i ako su funkcije $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ linearno nezavisne, tada je opšte rešenje date jednačine*

$$y = c_1y_1(x) + \ldots + c_ny_n(x),$$

za $x \in D_1$ i gde su $c_1, \ldots, c_n$ proizvoljne realne konstante.

Neka su $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x) : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ rešenja homogene linearne jednačine $L_n[y] = 0$ koja su linearno nezavisne, tada $y_1, \ldots, y_n$ nazivamo *fundamentalni sistem rešenja*.

Teorema 1.20. (Liuvilova formula) *Ako je $y_1 = y_1(x)$ jedno netrivijalno rešenje linearne diferencijalne jednačine*

$$L_2[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

za neke funkcije $p, q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$, tada funkcija:

$$y_2 = y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\, dx$$

predstavlja drugo partikularno rešene diferencijalne jednačine $L_2[y] = 0$ koje je linearno nezavisno od $y_1 = y_1(x)$. U tom slučaju opšte rešenje diferencijalne jednačine $L_2[y] = 0$ je dato sa

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

za ma koje realne konstante c_1, c_2.

Prethodno tvrđenje dokazujemo sa sledećim tvrđenjem.

Teorema 1.21. (1) *Neka je data homogena linearna diferencijalna jednačina*

$$L_2[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

za neke funkcije $p, q : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ za neki interval $D_1 \subseteq \mathbb{R}$. Ako je dato jedno netrivijalno rešenje linearne diferencijalne jednačine

$$y_1 = y_1(x),$$

tada jedno drugo rešenje linearne diferencijalne jednačine je oblika

$$y_2 = y_1 \int u \, dx,$$

za funkciju

$$u = \frac{e^{-\int p(x)\, dx}}{y_1^2}.$$

(2) *Rešenja*

$$y_1 = y_1(x) \quad i \quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\, dx}}{y_1^2(x)} \, dx$$

su linearno nezavisna.

Dokaz. (1) Ako tražimo jedno drugo rešenje u obliku $y_2 = y_1 \int u \, dx$, tada:

$$\begin{aligned} & y_2 = y_1 \int u \, dx \\ \Longrightarrow \quad & y_2' = y_1' \int u \, dx + y_1 u \\ \Longrightarrow \quad & y_2'' = y_1'' \int u \, dx + 2y_1' u + y_1 u'. \end{aligned}$$

Samim tim

$$\begin{aligned} & y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & y_1'' \int u \, dx + 2y_1' u + y_1 u' + p(x) \left(y_1' \int u \, dx + y_1 u \right) + q(x) \left(y_1 \int u \, dx \right) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \underbrace{(y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1)}_{(=0)} \int u \, dx + 2y_1' u + y_1 u' + p(x) y_1 u = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 2y_1' u + p(x) y_1 u = -y_1 u' \quad /^{:u} \\ \Longleftrightarrow \quad & 2y_1' + p(x) y_1 = -y_1 \frac{u'}{u} \quad /^{:y_1} \\ \Longleftrightarrow \quad & 2\frac{y_1'}{y_1} + p(x) = -\frac{u'}{u}. \end{aligned}$$

Integracijom

$$\frac{u'}{u} = -2\frac{y_1'}{y_1} - p(x) \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{e^{-\int p(x)\, dx}}{y_1^2}.$$

2. Na osnovu činjenice da formula

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx,$$

ne daje linearnu zavisnost $y_2 = y_1\, r$ za neki realan broj $r \in \mathbb{R}$, odatle sleduje navedeni zaključak. ■

Zadatak 8. *Rešiti diferencijalne jednačine:*

(i)

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

znajući da je jedno partikularno rešenje $y_1 = y_1(x) = e^x$;

(ii)

$$xy'' + 2y' - xy = 0,$$

tražeći partikularno rešenje u obliku $y_1 = y_1(x) = x^a e^x$ *za* $a \in \mathbb{R}$.

Rešenje. *(i) Budući da se zna jedno netrivijalno rešenje* $y_1 = y_1(x) = e^x$ *diferencijalne jednačine*

$$y'' \underbrace{-6}_{p(x)} y' + \underbrace{5}_{q(x)} y = 0$$

drugo linearno nezavisno rešenje $y_2 = y_2(x)$ *je određeno Liuvilovom formulom*

$$\boldsymbol{y_2 = y_2(x)} = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx = e^x \int \frac{e^{-\int (-6)\,dx}}{(e^x)^2}\,dx = e^x \int \frac{e^{6x}}{e^{2x}}\,dx = e^x \int e^{4x}\,dx = \boldsymbol{\frac{e^{5x}}{4}}.$$

Samim tim, opšte rešenje je dato sa

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 \frac{1}{4} e^{5x}},$$

za neke realne konstante c_1 *i* c_2. *Funkcije* $y_1 = e^x, y_2 = e^{5x}$ *predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane diferencijalne jednačine.*

(ii) Odredimo vrednost $a \in \mathbb{R}$ *tako da je* $y_1 = y_1(x) = e^{ax}$ *rešenje. Važi*

$$\begin{aligned}
& xy_1'' + 2y_1' - xy_1 = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & x\big(x^a e^x\big)'' + 2\big(x^a e^x\big)' - x\big(x^a e^x\big) = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & x\big(ax^{a-1}e^x + x^a e^x\big)' + 2\big(ax^{a-1}e^x + x^a e^x\big) - x\big(x^a e^x\big) = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & x\big(a(a-1)x^{a-2}e^x + 2ax^{a-1}e^x + x^a e^x\big) + 2\big(ax^{a-1}e^x + x^a e^x\big) - x\big(x^a e^x\big) = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & x\big(a(a-1)x^{a-2} + 2ax^{a-1} + x^a\big) + 2\big(ax^{a-1} + x^a\big) - x\big(x^a\big) = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \big(a(a-1)x^{a-1} + 2ax^a + x^{a+1}\big) + 2\big(ax^{a-1} + x^a\big) - \big(x^{a+1}\big) = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & a(a-1)x^{a-1} + 2ax^a + 2ax^{a-1} + 2x^a = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \big(a(a-1) + 2a\big)x^{a-1} + \big(2a + 2\big)x^a = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \big(a^2 + a\big)x^{a-1} + 2\big(a+1\big)x^a = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \big(a+1\big)\big(a\,x^{a-1} + 2\,x^a\big) = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \boldsymbol{a = -1}.
\end{aligned}$$

Samim tim jedno (netrivijalno) partikularno rešenje je

$$\boldsymbol{y_1 = y_1(x) = x^a e^x = \frac{e^x}{x}},$$

pri čemu $x \neq 0$. *Polazeći od diferencijalne jednačine*

$$xy'' + 2y' - xy = 0$$

zapisane u normiranom obliku

$$y'' + \underbrace{\left(\frac{2}{x}\right)}_{p(x)} y' + \underbrace{(-1)}_{q(x)} y = 0,$$

drugo linearno nezavisno rešenje $y_2 = y_2(x)$ *je određeno Liuvilovom formulom*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y_2 = y_2(x)} &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx \\
&= \frac{e^x}{x} \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}}{\left(\frac{e^x}{x}\right)^2}\,dx \\
&= \frac{e^x}{x} \int \frac{e^{-2\ln|x|}}{\frac{e^{2x}}{x^2}}\,dx \\
&= \frac{e^x}{x} \int \frac{\frac{1}{|x|^2}}{\frac{e^{2x}}{x^2}}\,dx \\
&= \frac{e^x}{x} \int e^{-2x}\,dx \\
&= \frac{e^x}{x} \left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) \\
&= \boldsymbol{-\frac{e^{-x}}{2x}}.
\end{aligned}$$

Samim tim, opšte rešenje je dato sa

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \frac{e^x}{x} - c_2 \frac{e^{-x}}{2x}},$$

za neke realne konstante c_1 *i* c_2. *Funkcije* $y_1 = \dfrac{e^x}{x}, y_2 = \dfrac{e^{-x}}{2x}$ *predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane diferencijalne jednačine.* □

(*iii*) Nehomogena linearna diferencijalna jednačina *n*-tog reda *je diferencijalna jednačina*

$$(*) \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *neprekidne funkcije nad nekim intervalom* $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ *i* $f(x) \neq 0$. *Važi opšte tvrđenje:*

Teorema 1.22. *Neka je data nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda*

$$(*) \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),$$

i odgovarajuća homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda

$$(*)_H \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ i $f(x) \neq 0$. Ako je $y_p = y_p(x)$ partikularno rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine $(*)$ i ako je $y_h = y_h(x)$ opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine $(*)_H$, tada opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$ je dato sa

$$y = y(x) = y_p(x) + y_h(x),$$

za $x \in D_1$.

Teorema 1.23. *Neka je data nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda*

$$(*) \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n, f_1, \ldots, f_k : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidne funkcije nad nekim intervalom $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x) \neq 0$. Ako je $y_{p_1} = y_{p_1}(x)$ partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine $L_n[y_1] = f_1(x), \ldots, y_{p_k} = y_{p_k}(x)$ partikularno rešenje linearne diferencijalne jednačine $L_n[y_k] = f_k(x)$ respektivmo, tada je

$$y_p = y_{p_1} + \ldots + y_{p_k}$$

partikularno rešenje polazne linearne diferencijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$, za $x \in D_1$.

(iv) Metoda varijacije konstanti za nalaženja partikularnog rešenja $L_n[y] = f(x)$

Teorema 1.24. *Neka je*

$$y_h = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine $L_n[y] = 0$. Tada opšte rešenje nehomogene linearne diferecijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$ koje je dato sa

$$y = y(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

gde su $C_1 = C_1(x), \ldots, C_n = C_n(x)$ funkcije takve da važi

$$(**) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} C_1'(x)\,y_1(x) & + & C_2'(x)\,y_2(x) & + \ldots + & C_n'(x)\,y_n(x) & = & 0, \\ C_1'(x)\,y_1'(x) & + & C_2'(x)\,y_2'(x) & + \ldots + & C_n'(x)\,y_n'(x) & = & 0, \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) & + \ldots + & C_n^{(n-2)}(x)y_n'(x) & = & 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) & + \ldots + & C_n^{(n-1)}(x)y_n'(x) & = & f(x). \end{array} \right\}$$

Napomena 1.25. *Sistem $(**)$ nazivamo sistemo varijacije konstanti i on se rešava kao linearan sistem po nepoznatim funkcijama $C_1'(x), \ldots, C_n'(x)$. Odatle*

$$C_1(x) = C_1^* + \int C_1'(x)\,dx, \ldots, C_n(x) = C_n^* + \int C_n'(x)\,dx,$$

za realne konstante $C_1^*, \ldots, C_n^*$.

Zadatak 9. *(i) Rešiti nehomogenu diferencijalnu jednačinu*

$$(*) \qquad y'' + y = \frac{1}{\cos x},$$

ukoliko se zna da je $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, *za neke realne konstante* c_1, c_2, *opšte rešenje homogene diferencijlne jednačine*

$$(*)_H \qquad y'' + y = 0.$$

(ii) Rešiti nehomogenu diferencijalnu jednačinu

$$(*) \qquad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1},$$

ukoliko se zna da je $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$, *za neke realne konstante* c_1, c_2, c_3, *opšte rešenje homogene diferencijlne jednačine*

$$(*)_H \qquad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Rešenje. (i) Opšte rešenje nehomogene linearne diferencjalne jednačine $(*)$ tražimo u obliku

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x,$$

gde funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ se određuju iz linearnog sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(\cos x)' + C_2'(x)(\sin x)' = \dfrac{1}{\cos x}; \end{array} \right\}$$

odnosno sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{array} \right\}$$

Rešimo prvo sistem po $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$ upotrebom Kramerovih formula. Izračunajmo determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1/\cos x & \cos x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} x, \quad \Delta_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & 1/\cos x \end{vmatrix} = 1;$$

na osnovu kojih dobijamo

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'(x)}}{\Delta} = -\operatorname{tg} x \quad \Longrightarrow \quad C_1(x) = -\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C_1^*,$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2'(x)}}{\Delta} = 1 \quad \Longrightarrow \quad C_2(x) = \int 1\, dx = x + C_2^*;$$

za neke realne konstante C_1^* i C_2^*. Za prethodno određene funkcije

$$C_1(x) = -\ln|\cos x| + C_1^* \quad \text{i} \quad C_2(x) = x + C_2^*$$

nalazimo opšte rešenje nehomogene linerne diferencijalne jednačine

$$\boldsymbol{y = C_1(x)\cdot\cos x + C_2(x)\cdot\sin x = -\ln|\cos x|\cdot\cos x + x\cdot\sin x + C_1^*\cos x + C_2^*\sin x},$$

za $x \in D_1$, gde je $D_1 \subset \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z\right\}$ neki interval.

Primetimo da je ovim postupkom jedno partikularno rešenje polazne diferencijalne jednačine dato sa

$$\boldsymbol{y_p = -\ln|\cos x|\cdot\cos x + x\cdot\sin x},$$

za $x \in D_1$, gde je $D_1 \subset \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in Z\right\}$ neki interval.

(ii) Opšte rešenje nehomogene linearne diferencjalne jednačine $(*)$ tražimo u obliku

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} + C_3(x)e^{3x}$$

gde funkcije $C_1(x)$, $C_2(x)$ i $C_3(x)$ se određuju iz linearnog sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} + C_3'(x)e^{3x} = 0, \\ C_1'(x)\,(e^x)' + C_2'(x)\,(e^{2x})' + C_3'(x)\,(e^{3x})' = 0, \\ C_1'(x)\,(e^x)'' + C_2'(x)\,(e^{2x})'' + C_3'(x)\,(e^{3x})'' = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}; \end{array}\right\}$$

odnosno sistema

$$\left\{\begin{array}{c} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} + C_3'(x)e^{3x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} + 3C_3'(x)e^{3x} = 0, \\ C_1'(x)e^x + 4C_2'(x)e^{2x} + 9C_3'(x)e^{3x} = \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}. \end{array}\right\}$$

Rešimo prvo sistem po $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ i $C_3'(x)$ upotrebom Kramerovih formula. Izračunajmo determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 \end{vmatrix} \cdot e^{6x} = 2\,e^{6x} \neq 0,$$

$$\Delta_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}\cdot\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\cdot e^{5x} = \frac{e^{9x}}{e^{2x}+1} \neq 0,$$

$$\Delta_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{3x} \\ e^x & 0 & 3e^{3x} \\ e^x & \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = (-1)^{3+2}\cdot\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\cdot 2e^{4x} = -\frac{2e^{8x}}{e^{2x}+1} \neq 0,$$

$$\Delta_{C_3'(x)} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & 4e^{2x} & \dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1} \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\cdot\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\cdot(-e^{3x}) = -\frac{e^{7x}}{e^{2x}+1} \neq 0;$$

na osnovu kojih dobijamo

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'(x)}}{\Delta} = \frac{1}{2}\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1} \quad\Longrightarrow\quad C_1(x) = \frac{1}{2}\int\frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^x - \operatorname{arctg} x\right) + C_1^*,$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2'(x)}}{\Delta} = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} \quad\Longrightarrow\quad C_2(x) = -\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + C_2^*,$$

$$C_3'(x) = \frac{\Delta_{C_3'(x)}}{\Delta} = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{e^{2x}+1} \quad\Longrightarrow\quad C_3(x) = -\int\frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x + C_3^*;$$

za neke realne konstante C_1^*, C_2^* i C_3^*. Za prethodno određene funkcije

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - \operatorname{arctg} e^x\right) + C_1^*,\;\; C_2(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right) + C_2^* \;\text{ i }\; C_3(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x + C_3^*$$

nalazimo opšte rešenje nehomogene linerne diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C_1(x)\cdot e^{x} + C_2(x)\cdot e^{2x} + C_3(x)\cdot e^{3x}}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\Big(e^{2x} + (e^{3x} - e^{x})\,\mathrm{arctg}\, e^{x} - e^{2x}\ln(1+e^{2x})\Big) + C_1^{*}e^{x} + C_2^{*}e^{2x} + C_3^{*}e^{3x}},\end{aligned}$$

za $x \in D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde je D_1 neki interval.

Primetimo da je ovim postupkom jedno partikularno rešenje polazne diferencijalne jednačine dato sa

$$\boldsymbol{y_p = \frac{1}{2}\Big(e^{2x} + (e^{3x} - e^{x})\,\mathrm{arctg}\, e^{x} - e^{2x}\ln(1+e^{2x})\Big)},$$

za $x \in D_1 \subseteq \mathbb{R}$, gde je D_1 neki interval. □

(v) Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima je diferencijalna jednačina:

$$(*)_H \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0,$$

gde su $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ konstante.

Važe tvrđenja iz sekcije (ii) ovog dela.

Teorema 1.26. *Za karakterističnu jednačinu:*

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

neka je određeno n korena $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in C$. Svakom korenu λ_j odgovara jedno partikularno rešenje

$$y_j = y_j(x)$$

homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda $(*)_H$ po sledećim pravilima:

1. *Svakom realnom korenu λ_j reda k odgovara sledećih k partikularnih rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda $(*)_H$:*

$$y_j^{(0)}(x) = e^{\lambda_j x},\ y_j^{(1)}(x) = xe^{\lambda_j x},\ \ldots,\ y_j^{(k-1)}(x) = x^{k-1}e^{\lambda_j x}.$$

2. *Svakom kompleksnom korenu $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j \boldsymbol{i}$ reda k odgovara sledećih $2k$ partikularnih rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda $(*)_H$:*

$$y_j^{(0)}(x) = e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\ y_j^{(2)}(x) = xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,\ \ldots,\ y_j^{(2k-2)}(x) = x^{k-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x,$$

$$y_j^{(1)}(x) = e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,\ y_j^{(3)}(x) = xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x,\ \ldots,\ y_j^{(2k-1)}(x) = x^{k-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x.$$

Prethodno određenih n rešenja $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ su linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda $(*)_H$ i opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda $(*)_H$ dato je sa linarnom kombinacijom

$$y_h = y_h(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

gde su $c_1, \ldots, c_n$ proizvoljne realne konstante.

***(vi)* Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima** je diferencijalna jednačina:

$$(*) \qquad L_n[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x),$$

gde su $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ konstante i $f\colon D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad $D_1 \subseteq \mathbb{R}$ i $f(x) \neq 0$.

Važe tvrđenja iz sekcije (iii) ovog dela. Postupci rešavnja se baziraju na prethodnoj teoremi koja omogućava da se za homogenu linearu diferencijalnu jednačinu $L_n[y] = 0$ nađe opšte rešenje:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

gde su $c_1, \ldots, c_n$ realne konstante. Posle toga se mogu koristiti sledeća dva postupka za određivanje opšteg rešenja nehomogene linearne diferencijalne jednačine $L_n[y] = f(x)$:

1. Metoda varijacije konstanti. Svodi se na primenu prethodno iskazane Teoreme 1.24.

2. Metoda neodređenih koeficijenata. Ovaj postupak se primenjuje kada je funkcija $f(x)$ u jednom od sledeća dva oblika:

$\boldsymbol{f(x) = e^{ax} P_m(x)}$ za $a \in \mathbb{R}$ i neki polinom $P_m(x)$ stepena m. Tada tražimo partikularno rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine:

$$L_n[y] = f(x)$$

u sledećem obliku:

$$y_p = x^s e^{ax} Q_m(x),$$

gde je $s \in \mathbb{N}_0$ višestrukost korena a u karakterističnoj jednačini odgovarajuće homogene jednačine i gde neodređeni koeficijenti polinoma $Q_m(x)$ postaju određeni zamenom očekivanog oblika $y = y_p$ u $L_n[y] = f(x)$.

$\boldsymbol{f(x) = e^{ax}\big(P_{m_1}(x) \cos bx + P_{m_2}(x) \sin bx\big)}$ za $a, b \in \mathbb{R}$ i neke polinome $P_{m_1}(x)$ i $P_{m_2}(x)$ stepena m_1 i m_2 respektivno. Tada tražimo partikularno rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$L_n[y] = f(x)$$

u sledećem obliku

$$y_p = x^s e^{ax}\big(Q_m(x) \cos bx + R_m(x) \sin bx\big), \quad (m = \max\{m_1, m_2\})$$

gde je $s \in \mathbb{N}_0$ višestrukost korena $z = a + bi$ u karakterističnoj jednačini odgovarajuće homogene jednačine i gde neodređeni koeficijenti polinoma $Q_m(x)$ i $R_m(x)$ postaju određeni zamenom očekivanog oblika $y = y_p$ u $L_n[y] = f(x)$.

Zadatak 10. *Rešiti nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima*:

(i)

$$L_3[y] = y''' - y'' + y' - y = x^2 + x,$$

(ii)

$$L_3[y] = y''' - y'' = x e^x,$$

(iii)

$$L_2[y] = y'' - y' = e^x + e^{2x} + x,$$

(iv)

$$L_2[y] = y'' + y' - 2y = (x^2 - 1)\, e^{2x},$$

(v)

$$L_2[y] = y'' + y = \sin x.$$

Rešenje. (i) Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$L_3[y] = y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_1 = 1$ odgovara partikularno rešenje

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$$

i karakterističnim korenima $\lambda_{2,3} = \pm\, i$ odgovaraju dva partikularna rešenja

$$y_2 = \cos x$$

i

$$y_3 = \sin x.$$

Funkcije $y_1 = e^x, y_2 = \cos x, y_3 = \sin x$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_3[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom

$$\boldsymbol{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$. Primetimo da iz zapisa nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$L_3[y] = y''' - y'' + y' - y = f(x) = x^2 + x = e^{\boldsymbol{0}\, x}\big(x^2 + x\big) = e^{\boldsymbol{a}\, x} P_2(x) \quad (m{=}2)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = 0}$$

koji nije koren karakteristične jednačine $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ i ima višestrukost

$$\boldsymbol{s = 0}.$$

Samim tim partikularno rešenje biramo u obliku

$$y_p = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\, x} \underbrace{\big(a_1 x^2 + b_1 x + c_1\big)}_{Q_2(x)} = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1),$$

sa neodređenim realnim koeficijentima $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y = y_p$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_3[y] = f(x) = x^2 + x$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned}
L_3[y_p] &= y_p''' - y_p'' + y_p' - y_p \\
&= (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)''' - (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)'' + (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)' - (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \\
&= 0 - 2a_1 + (2a_1 x + b_1) - (a_1 x^2 + b_1 x + c_1) \\
&= -a_1 x^2 + (2a_1 - b_1)\, x + (-2a_1 + b_1 - c_1) \\
&= f(x) = x^2 + x \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -1 \ \wedge \ b_1 = -3 \ \wedge \ c_1 = -1.
\end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_p = -x^2 - 3x - 1}.$$

Sveukupno, opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h = (-x^2 - 3x - 1) + c_1 e^x + c_2 \cos x + c_3 \sin x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$.

(ii) Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$L_3[y] = y''' - y'' = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = (\lambda - 1)\lambda^2 = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_1 = 1$ odgovara partikularno rešenje

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$$

i karakterističnom korenu $\lambda_{2,3} = 0$ odgovaraju dva partikularna rešenja

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = 1$$

i

$$y_3 = x e^{\lambda_2 x} = x.$$

Funkcije $y_1 = e^x, y_2 = 1, y_3 = x$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_3[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom

$$\boldsymbol{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 = c_1 e^x + c_2 + c_3 x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$. Primetimo da iz zapisa nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$L_3[y] = y''' - y'' = f(x) = x\, e^x = e^{\mathbf{1}\, x} x = e^{\boldsymbol{a}\, x} P_1(x) \quad (m{=}1)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = 1}$$

koji jeste koren karakteristične jednačine $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ i ima višestrukost

$$\boldsymbol{s = 1}.$$

Samim tim partikularno rešenje biramo u obliku

$$y_p = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\, x} \underbrace{(a_1 x + b_1)}_{Q_1(x)} = x\, e^x\, (a_1 x + b_1) = (a_1 x^2 + b_1 x) e^x,$$

sa neodređenim realnim koeficijentima $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y = y_p$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_3[y] = f(x) = x e^x$ odakle zaključujemo:

$$
\begin{aligned}
L_3[y_p] &= y_p''' - y_p'' = ((a_1x^2+b_1x)e^x)''' - ((a_1x^2+b_1x)e^x)'' \\
&= (a_1x^2e^x + b_1xe^x)''' - (a_1x^2e^x + b_1xe^x)'' \\
&= (a_12xe^x + a_1x^2e^x + b_1e^x + b_1xe^x)'' - (a_12xe^x + a_1x^2e^x + b_1e^x + b_1xe^x)' \\
&= (a_1x^2e^x + (2a_1+b_1)xe^x + +b_1e^x)'' - (a_1x^2e^x + (2a_1+b_1)xe^x + +b_1e^x)' \\
&= (a_12xe^x + a_1x^2e^x + (2a_1+b_1)e^x + (2a_1+b_1)xe^x + b_1e^x)' \\
&- (a_12xe^x + a_1x^2e^x + (2a_1+b_1)e^x + (2a_1+b_1)xe^x + b_1e^x) \\
&= (a_1x^2e^x + (4a_1+b_1)xe^x + (2a_1+2b_1)e^x)' \\
&- (a_1x^2e^x + (4a_1+b_1)xe^x + (2a_1+2b_1)e^x) \\
&= (a_12xe^x + a_1x^2e^x + (4a_1+b_1)e^x + (4a_1+b_1)xe^x + (2a_1+2b_1)e^x) \\
&- (a_1x^2e^x + (4a_1+b_1)xe^x + (2a_1+2b_1)e^x) \\
&= (a_1x^2e^x + (6a_1+b_1)xe^x + (6a_1+3b_1)e^x) - (a_1x^2e^x + (4a_1+b_1)xe^x + (2a_1+2b_1)e^x) \\
&= \Big((2a_1)xe^x + (4a_1+b_1)e^x\Big) \\
&= f(x) = xe^x \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = \frac{1}{2} \ \wedge \ b_1 = -2.
\end{aligned}
$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_p = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) x\, e^x}.$$

Sveukupno, opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) x\, e^x + c_1\, e^x + c_2 + c_3\, x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$.

(iii) Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y] = y'' - y' = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_1 = 0$ odgovara partikularno rešenje

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = 1$$

i karakterističnom korenu $\lambda_2 = 1$ odgovara partikularno rešenje

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^x.$$

Funkcije $y_1 = 1, y_2 = e^x$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_2[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom

$$\boldsymbol{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 + c_2 e^x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. Dalje koristimo Teoremu 1.23. Posmatrajmo tri linearne diferencijalne jednačine

$$L_2[y_1] = y_1'' - y_1' = f_1(x) = e^x,$$
$$L_2[y_2] = y_2'' - y_2' = f_2(x) = e^{2x},$$
$$L_2[y_3] = y_3'' - y_3' = f_3(x) = x.$$

1. Za linearnu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y_1] = y_1'' - y_1' = f_1(x) = e^x = e^{\mathbf{1}\,x} = e^{\boldsymbol{a}\,x} P_0(x)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = 1}$$

koji je višestrukosti $\boldsymbol{s = 1}$ za karakterističnu jednačinu $\lambda^2 - \lambda = 0$. Samim tim

$$y_{p_1} = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\,x} \underbrace{(a_1)}_{Q_0(x)} = a_1\, x\, e^x,$$

sa neodređenim realnim koeficijentom $a_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijent određujemo zamenom $y_1 = y_{p_1}$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y_1] = f_1(x) = e^x$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned} L_2[y_{p_1}] &= y_{p_1}'' - y_{p_1}' \\ &= (a_1 x e^x)'' - (a_1 x e^x)' \\ &= (a_1 e^x + a_1 x e^x)' - (a_1 e^x + a_1 x e^x) \\ &= a_1 e^x + a_1 e^x + a_1 x e^x - a_1 e^x - a_1 x e^x \\ &= a_1 e^x \\ &= f_1(x) = e^x \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 1. \end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_{p_1} = x\, e^x}.$$

2. Za linearnu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y_1] = y_1'' - y_1' = f_2(x) = e^{2x} = e^{\mathbf{2}\,x} = e^{\boldsymbol{a}\,x} P_0(x)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = 2}$$

koji je višestrukosti $\boldsymbol{s = 0}$ za karakterističnu jednačinu $\lambda^2 - \lambda = 0$. Samim tim

$$y_{p_2} = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\,x} \underbrace{(a_1)}_{Q_0(x)} = a_1\, e^{2x},$$

sa neodređenim realnim koeficijentom $a_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijent određujemo zamenom $y_2 = y_{p_2}$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y_2] = f_2(x) = e^{2x}$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned} L_2[y_{p_2}] &= y_{p_2}'' - y_{p_2}' \\ &= (a_1 e^{2x})'' - (a_1 e^{2x})' \\ &= 4a_1 e^{2x} - 2a_1 e^{2x} \\ &= 2a_1 e^{2x} \\ &= f_2(x) = e^{2x} \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = 1/2. \end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_{p_2} = \frac{1}{2} e^{2x}}.$$

3. Za linearnu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y_3] = y_3'' - y_3' = f_3(x) = x = e^{\boldsymbol{0}\,x}x = e^{\boldsymbol{a}\,x}P_1(x)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z\!=\!a\!=\!0}$$

koji je višestrukosti $\boldsymbol{s\!=\!1}$ za karakterističnu jednačinu $\lambda^2 - \lambda = 0$. Samim tim

$$y_{p_3} = x^{\boldsymbol{s}}e^{\boldsymbol{a}\,x}\underbrace{(a_1x + b_1)}_{Q_1(x)} = a_1x^2 + b_1x,$$

sa neodređenim realnim koeficijentima $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y_3 = y_{p_3}$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y_3] = f_3(x) = x$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned}
L_2[y_{p_3}] &= y_{p_3}'' - y_{p_3}' \\
&= (a_1x^2 + b_1x)'' - (a_1x^2 + b_1x)' \\
&= 2a_1 - 2a_1x - b_1 \\
&= (-2a_1)x + (2a_1 - b_1) \\
&= f_3(x) = x \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -\frac{1}{2} \;\wedge\; b_1 = -1.
\end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_{p_3} = -\frac{1}{2}x^2 - x}.$$

Sveukupno, opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} + y_h = \left(xe^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)\right) + c_1 + c_2e^x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$.

(iv) Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y] = y'' + y' - 2y = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2) = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_1 = 1$ odgovara partikularno rešenje

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^x$$

i karakterističnom korenu $\lambda_2 = -2$ odgovara partikularno rešenje

$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}.$$

Funkcije $y_1 = e^x, y_2 = e^{-2x}$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_2[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom

$$\boldsymbol{y_h = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2e^{-2x}},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. Primetimo da iz zapisa nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$L_2[y] = y'' + y' - 2y = f(x) = \big(x^2 - 1\big)\, e^{-2x} = e^{\boldsymbol{-2}\,x}\big(x^2 - 1\big) = e^{\boldsymbol{a}\,x} P_2(x) \quad (m{=}2)$$

formiramo broj

$$\boldsymbol{z = a = -2}$$

koji jeste koren karakteristične jednačine $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ i ima višestrukost

$$\boldsymbol{s = 1}.$$

Samim tim partikularno rešenje biramo u obliku

$$y_p = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\,x} \underbrace{\big(a_1 x^2 + b_1 x + c_1\big)}_{Q_2(x)} = x\, e^{-2x} \big(a_1 x^2 + b_1 x + c_1\big) = (a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x) e^{-2x},$$

sa neodređenim realnim koeficijentima $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y = y_p$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y] = f(x) = (x^2 - 1)\, e^{-2x}$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned}
L_2[y_p] &= y_p'' + y_p' - 2y_p \\
&= \big((a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big)'' + \big((a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big)' - 2\big((a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big) \\
&= \big((3a_1x^2{+}2b_1x{+}c_1)e^{-2x} - 2(a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big)' \\
&\quad + \big((3a_1x^2{+}2b_1x{+}c_1)e^{-2x} - 2(a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x)e^{-2x}\big) - 2\big(a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x\big)e^{-2x} \\
&= \big((-2a_1x^3 + (3a_1{-}2b_1)x^2 + (2b_1{-}2c_1)x + c_1)e^{-2x}\big)' \\
&\quad + \big(-2a_1x^3 + (3a_1{-}2b_1)x^2 + (2b_1{-}2c_1)x + c_1\big)e^{-2x} - 2\big(a_1x^3{+}b_1x^2{+}c_1x\big)e^{-2x} \\
&= \big(4a_1x^3 + (-12a_1{+}4b_1)x^2 + (6a_1{-}8b_1{+}4c_1)x + (2b_1 - 4c_1)\big)e^{-2x} \\
&\quad + \big(-2a_1x^3 + (3a_1{-}2b_1)x^2 + (2b_1{-}2c_1)x + c_1\big)e^{-2x} + \big(-2a_1x^3{-}2b_1x^2{-}2c_1x\big)e^{-2x} \\
&= \big(-9a_1x^2 + (6a_1{-}6b_1)x + (2b_1{-}3c_1)\big)e^{-2x} \\
&= f(x) = (x^2 - 1)\, e^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = -\frac{1}{9} \ \wedge\ b_1 = -\frac{1}{9} \ \wedge\ c = \frac{1}{27}.
\end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_p = \left(-\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{7}{27}\right) e^{-2x}}.$$

Sveukupno, opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h = \left(-\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{7}{27}\right) e^{-2x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2,3} \in \mathbb{R}$.

(v) Prvo rešimo homogenu diferencijalnu jednačinu

$$L_2[y] = y'' + y = 0.$$

Na osnovu karakteristične jednačine

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$$

karakterističnom korenu $\lambda_{1,2} = \pm\, i$ odgovaraju partikularna rešenja

$$y_1 = \cos x$$

i

$$y_2 = \sin x.$$

Funkcije $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$ predstavljaju fundamentalni sistem rešenja posmatrane homogene diferencijalne jednačine. Opšte rešenje homogene diferencijalne jednačine $L_2[y] = 0$ je dato sa linearnom kombinacijom

$$\boldsymbol{y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 \cos x + c_2 \sin x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. Primetimo da iz zapisa nehomogene linearne diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} L_2[y] = y'' + y \ &= \ f(x) = \sin 2x \\ &= \ e^{\boldsymbol{0}}\Big(0\cos \boldsymbol{2}x + 1\sin \boldsymbol{2}x\Big) = e^{\boldsymbol{a}}\Big(P_0^{(1)}(x)\cos \boldsymbol{b}x + P_0^{(2)}(x)\sin \boldsymbol{b}x\Big) \quad (m_1 = m_2 = 0) \end{aligned}$$

formiramo kompleksan broj

$$\boldsymbol{z = a + b\, i = 2\, i}$$

koji nije koren karakteristične jednačine $\lambda^2 + \lambda = 0$ i ima višestrukost

$$\boldsymbol{s = 0}.$$

Samim tim partikularno rešenje biramo u obliku

$$y_p = x^{\boldsymbol{s}} e^{\boldsymbol{a}\, x}\big(Q_0(x)\cos \boldsymbol{b}x + R_0(x)\sin \boldsymbol{b}x\big) = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x,$$

sa neodređenim realnim koeficijentima $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Koeficijente određujemo zamenom $y = y_p$ u polaznu diferencijalnu jednačinu $L_2[y] = f(x) = \sin 2x$ odakle zaključujemo:

$$\begin{aligned} L_2[y_p] &= y_p'' + y_p \\ &= \big(\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x\big)'' + \big(\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x\big) \\ &= \big(-4\alpha\cos 2x - 4\beta\sin 2x\big) + \big(\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x\big) \\ &= -3\alpha\cos 2x - 3\beta\sin 2x \\ &= f(x) = \sin 2x \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = 0 \ \wedge \ \beta = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Samim tim

$$\boldsymbol{y_p = -\frac{1}{3}\sin 2x}.$$

Sveukupno, opšte rešenje polazne nehomogene linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa funkcijom:

$$\boldsymbol{y = y_p + y_h = \left(-\frac{1}{3}\sin 2x\right) + c_1\cos x + c_2\sin x},$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. □

Zadatak 11. *U zavisnosti od realnog parametra $\kappa \in \mathbb{R}$ naći opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine*

$$L_2[y] = y'' + y - 2y = e^{\kappa\, x}.$$

Rešenje. Važi:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,x\,e^{x} + c_1\,e^{x} + c_2\,e^{-2x} & : \quad \kappa = 1, \\ -\dfrac{1}{3}\,x\,e^{x} + c_1\,e^{x} + c_2\,e^{-2x} & : \quad \kappa = -2, \\ \dfrac{1}{\kappa^2+\kappa-2}\,e^{\kappa x} + c_1\,e^{x} + c_2\,e^{-2x} & : \quad \kappa \in \mathbb{R} \backslash \{1,-2\}; \end{cases}$$

za proizvoljne realne konstante $c_{1,2} \in \mathbb{R}$. □