Elektrotehnički fakultet Univerziteta u Beogradu
II kolokvijum iz Fizike za Si, 28.11.2013. godine
Predmetni nastavnici: Predrag Marinković i Peđa Mihailović.
Trajanje ispita je 2 h.

1. U vodi gustine ρ_0 pluta flaša u vertikalnom položaju, poprečnog preseka uronjenog dela S, pri čemu je u ravnotežnom stanju u vodu uronjena dužina flaše l. Ubrzanje zemljine teže je g. Ako je tokom malih oscilacija flaše najveća brzina v_m, odrediti:
a) [20] period oscilovanja,
b) [20] amplitudu,
c) [20] najveću silu koja deluje na flašu tokom oscilacija,
d) [20] totalnu energiju ovog oscilatora.
e) [20] Flaša se premesti u drugi fluid gustine ρ_1 gde tone ka ravnotežnom položaju kritičnim amortizovanim kretanjem. Ako je otporna sila kretanju srazmerna prvom stepenu brzine, koliki je koeficijent srazmere?

2. Tanak prsten mase m radijusa R zavaren je za tanak prsten mase $m/2$ i radijusa $R/2$ u tački O tako da oba prstena leže u istoj ravni. Ako se u tački O zatim zavari tanka osovina bez mase normalno na ravan i ceo sistem postavi vertikalno i dovede u oscilatorno kretanje u vertikalnoj ravni oko osovine, odrediti:
a) [30] položaj centra mase sistema koga čine prstenovi,
b) [30] moment inercije sistema u odnosu na osu rotacije i
c) [40] period malih oscilacija ovog sistema.

3. Transverzalni harmonijski talas, $\psi(x,t) = \psi_0 \sin(20\pi t - 10\pi x - \pi/4)$, gde se su sve veličine u SI sistemu jedinica, prostire se po zategnutoj žici, koja je sa jedne strane pričvršćena za zid.
a) [10] Odrediti položaj i brzinu delića žice na koordinati $x = 1\,\mathrm{m}$ u trenutku $t = 1\,\mathrm{s}$ u funkciji ψ_0.
b) [10] Odrediti faznu brzinu talasa.
c) [20] Ako je zid na koordinati $x = 3\,\mathrm{m}$, odrediti fazu reflektovanog talasa na $0.5\,\mathrm{m}$ od zida u trenutku $t = 1\,\mathrm{s}$.
d) [20] Odrediti trenutnu i srednju snagu talasa ako je sila zatezanja žice F i podužna masa žice μ.
e) [20] Ako se i drugi kraj žice učvrsti i žica zategne silom F, frekvencija osnovnog harmonika je $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$. Odrediti frekvenciju osnovnog harmonika f_2 ako se sila zatezanja poveća 21 %.
f) [20] Osnovni harmonik, nakon zatezaznja žice, se snima mikrofonom koji detektuje frekvenciju zvuka $f_3 = 115\,\mathrm{Hz}$. Ako je brzina zvuka u vazduhu $c = 330\,\mathrm{ms}^{-1}$, kolika je brzina kretanja mikrofona prema žici?

4. Amplitude pomeraja prinudnih oscilacija (u ustaljenom režimu) pri frekvencijama prinudne sile $f_1 = 200\,\mathrm{Hz}$ i f_2 su međusobno jednake. Frekvencija koja odgovara rezonanciji pomeraja je $f_r = 316.228\,\mathrm{Hz}$.
a) [50] Odrediti frekvenciju f_2;
b) [50] Ako je sistem slabo amortizovan ($\alpha \to 0$), odrediti frekvenciju pri kojoj je maksimalna brzina tela koje se oscilatorno kreće najveća.

Rešenja

1. a) Kada flaša pliva zaronjena do dubine l u vodu, tada je sila potiska jednaka težini flaše, dnosno

$$Sl\rho_0 g = mg\,, \tag{1}$$

gde je m masa flaše. Odatle je $m = Sl\rho_0$. Ako se flaša potopi za rastojanje x u odnosnu na ravnotežni položaj, tada na nju deluje rezultantna sila

$$F_R(x) = mg - S(l+x)\rho_0 g = -S\rho_0 g x\,. \tag{2}$$

S obzirom na to da je sila linearno zvisna od x i restituciona, očekuje se prosto harmonijsko kretanje flaše. Jednačina kretanja je

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -S\rho_0 g x\,, \tag{3}$$

odnosno

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0\,, \tag{4}$$

gde je

$$\omega^2 = \frac{S\rho_0 g}{m} = \frac{S\rho_0 g}{Sl\rho_0} = \frac{g}{l}\,. \tag{5}$$

Period oscilovanja je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{6}$$

b) Flaša se kreće oscilatorno po zakonu $x(t) = A\sin\omega t$. Brzina kretanja flaše je

$$v(t) = \dot{x} = A\omega\cos\omega t = v_m\cos\omega t\,. \tag{7}$$

gde je $v_m = A\omega$. Amplituda je

$$A = \frac{v_m}{\omega} = v_m\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{8}$$

c) Sila koja deluje na flašu tokom oscilacija je

$$F = m\ddot{x} = -mA\omega^2\sin\omega t\,. \tag{9}$$

Maksimalna sila je

$$F_m = mA\omega^2 = S\rho_0 v_m\sqrt{lg}\,. \tag{10}$$

d) Totalna energija je

$$E_t = (1/2)mA^2\omega^2 = (1/2)mv_m^2 = (1/2)Sl\rho_0 v_m^2\,. \tag{11}$$

e) Ako se flaša potapa u tečnost gustine ρ_1, diferencijalna jednačina kretanja je (x je dubina potapanja)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - r\frac{dx}{dt} - kx\,. \tag{12}$$

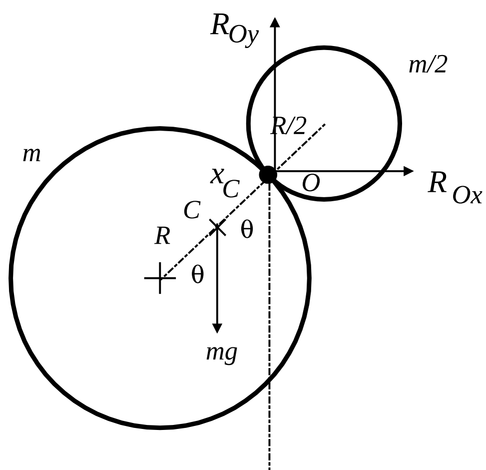
gde je $k = S\rho_1 g$. Kritično aperiodično kretanje nastaje onda kada je $r = \sqrt{4km}$, pa je

$$r = 2S\sqrt{l\rho_0\rho_1 g}\,. \tag{13}$$

2. a) Centar mase sistema nalazi se na pravoj koja spaja centre prstenova i prolazi kroz tačku O. Postavljen je na rastojanju x_C od tačke O (unutar većeg prstena) koje se određuje iz

$$mR-(m/2)(R/2)=(m+m/2)x_C\,, \tag{14}$$

odakle je $x_C = R/2$.



Slika 1: Slika uz zadatak 2. Sile u osloncu R_{Ox} i R_{Oy} ne utiču na kretanje.

b) Moment inercije sistema (primenom Štajnerove teoreme) je

$$\begin{aligned} I_O &= (mR^2 + mR^2) \\ &+[(m/2)(R/2)^2+(m/2)(R/2)^2]=\frac{9}{4}mR^2. \end{aligned} \tag{15}$$

c) Jednačina kretanja je

$$\frac{9}{4}mR^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{R}{2}\frac{3}{2}mg\sin\theta\,, \tag{16}$$

koja za male oscilacije postaje ($\sin\theta \approx \theta$)

$$\frac{9}{4}mR^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{R}{2}\frac{3}{2}mg\theta = 0\,, \tag{17}$$

odakle je

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0\,, \tag{18}$$

gde je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{3R}} = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{19}$$

Period oscilovanja je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{g}}\,. \tag{20}$$

3. a) Jednačina progresivnog transverzalnog talasa kroz zategnutu žicu je $\psi(x,t) = \psi_0 \sin(\omega t - kx + \phi_0)$. Poređenjem sledi da je $\omega = 20\pi\,[\mathrm{rad/s}]$, $k = 10\pi\,[1/\mathrm{m}]$ i $\phi_0 = -\pi/4\,[\mathrm{rad}]$. Tako je

$$\psi(x = 1\,\mathrm{m}, t = 1\,\mathrm{s}) = \psi_0 \sin(20\pi \cdot 1 - 10\pi \cdot 1 - \pi/4) = -\psi_0 \sin(\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_0\,. \tag{21}$$

Brzina delića žice je

$$v_\psi = \dot{\psi} = \omega\psi_0 \cos(\omega t - kx + \phi_0)\,, \tag{22}$$

odnosno

$$v_\psi(x = 1\,\mathrm{m}, t = 1\,\mathrm{s}) = \omega\psi_0 \cos(10\pi - \pi/4) = 20\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_0\,, \tag{23}$$

b) Fazna brzina je

$$v_f = c = \frac{\omega}{k} = 2\,\mathrm{m/s} \tag{24}$$

c) Talasna funkcija reflektovanog talasa je $\psi_r(x,t) = \psi_0 \sin(\omega t + kx - \pi/4 + \pi)$. Na mestu $x = 2.5\,\mathrm{m}$ i u trenutku vremena $t = 1\,\mathrm{s}$ faza je

$$\phi = \omega t + kx - \pi/4 + \pi = 20\pi + 25\pi - \pi/4 + \pi = 46\pi - \pi/4\,. \tag{25}$$

d) Trenutna snaga je ($F_\psi = -F\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$)

$$p = F_\psi v_\psi = Fk\omega\psi_0^2 \cos^2(\omega t - kx - \pi/4)\,. \tag{26}$$

Srednja snaga je

$$P_{sr} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2\psi_0^2\,. \tag{27}$$

e) Ako je sila zatezanja F, a dužina žice L, tada je $f_1 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$. Ako je sila zatezanja $1.21F$, tada je $f_2 = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{1.21F}{\mu}} = f_1\sqrt{1.21} = 1.1f_1 = 110\,\mathrm{Hz}$.

f) Zbog Doplerovog efekta važi $f_3 = \dfrac{c + v_L}{c}f_2$, odakle je $v_L = c\dfrac{f_3 - f_2}{f_2} = 15\,\mathrm{m/s}$.

4. a) Frekvencija rezonancije pomeraja je $f_r = \sqrt{\dfrac{f_1^2 + f_2^2}{2}}$. Do ovog izraza se dolazi zahtevajući da je $\dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\alpha^2\omega_1^2}} = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\alpha^2\omega_2^2}}$ i uzimajući u obzir da je $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$. Odatle je $f_2 = \sqrt{2f_r^2 - f_1^2} = 400\,\mathrm{Hz}$.

b) Maksimalna brzina tela koje osciluje je $v_m = \dfrac{\omega F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \approx \dfrac{\omega F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$. Najveća maksimalna brzina se dobije iz uslova $dv_m/d\omega = 0$. Odatle je $\omega_{r,v} = \omega_0$. Kako je $\omega_r \approx \omega_0$, sledi da je $\omega_{r,v} \approx \omega_r \approx 316\,\mathrm{Hz}$.