Neodređeni integrali

Ivana Jovović
ivana@etf.rs

Sadržaj

Neka je f funkcija definisana na intervalu (a, b).
Ako postoji funkcija F takva da važi

$$(\forall x \in (a, b))\ F'(x) = f(x),$$

onda kažemo da je F primitivna funkcija funkcije f na intervalu (a, b).
Neka je F proizvoljna primitivna funkcija funkcije f na intervalu (a, b).
Neodređeni integral funkcije f, u oznaci $\int f(x)dx$, definiše se

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in (a, b),\ C \in \mathbb{R}.$$

Neodređeni integral je skup (familija) svih primitivnih funkcija date funkcije na određenom intervalu.

Nalaženje integrala (integracija) je postupak inverzan diferenciranju:

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C,$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad df(x) = f'(x)dx.$$

$$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Linearnost integrala:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + C, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Tablica neodređenih integrala

$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1$

$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int a^x dx = \frac{1}{lna}a^x + C, a > 0, a \neq 1$

$\int sinxdx = -cosx + C$

$\int cosxdx = sinx + C$

$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$

$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

$\int shxdx = chx + C$

$\int chxdx = shx + C$

$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

$\int \frac{dx}{ch^2 x} = tghx + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

- $\varphi(x) = t$
  Ako funkcija φ ima inverznu funkciju ψ i ako su funkcije f, ψ i ψ' neprekidne, tada je

$$\int f(\varphi(x))dx = \int f(t)d\psi(t) + C = \int f(t)\psi'(t)dt + C.$$

  Smena $\varphi(x) = t$ se najčešće koristi kod integrala oblika $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) + C = \int f(t)dt + C.$$

- $x = \varphi(t)$
  Ako su funkcije f, φ i φ' neprekidne, tada je

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) + C = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + C.$$

Ako su u i v diferencijabilne funkcije promenljive x na intervalu (a, b), tada na tom intervalu važi

$$\int u(x)\, dv(x) = u(x)\, v(x) - \int v(x)\, du(x) + C.$$

Domaći zadatak

Naći sledeće integrale:

$i)$ $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx,$ $\left[x - 2ln|x| - \frac{1}{x} + C\right]$

$ii)$ $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx,$ $\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + C\right]$

$iii)$ $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}\, dx,$ $\left[\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C\right]$

$iv)$ $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\, dx,$ $\left[-\frac{2}{ln5}5^{-x} + \frac{1}{5ln2}2^{-x} + C\right]$

$v)$ $\int (1 + sinx + cosx)\, dx,$ $[x - cosx + sinx + C]$

$vi)$ $\int ctg^2 x\, dx,$ $[-ctgx - x + C]$

$vii)$ $\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx.$ $[x - arctgx + C]$

Naći sledeće integrale:

Zadatak

i) $\int (2x-5)^{100} dx$, *ii*) $\int \frac{dx}{1+cosx}$.

Domaći zadatak

i) $\int \frac{dx}{x-2}$, $[ln|x-2|+C]$

ii) $\int (2x-3)^{10}\, dx$, $\left[\frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C\right]$

iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$, $\left[-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C\right]$

iv) $\int \sqrt[3]{2-3x}\, dx$, $\left[-\frac{1}{4}(2-3x)^{\frac{4}{3}}+C\right]$

v) $\int e^{-5x+4}\, dx$, $\left[-\frac{1}{5}e^{-5x+4}+C\right]$

vi) $\int cos(7x)\, dx$, $\left[\frac{1}{7}sin(7x)+C\right]$

vii) $\int \frac{dx}{sin^2(3x+4)}$, $\left[-\frac{1}{3}ctg(3x+4)+C\right]$

viii) $\int \frac{dx}{1-cosx}$. $\left[-ctg\frac{x}{2}+C\right]$

Zadatak

Naći sledeće integrale:

$i)$ $\int x^2 \sqrt[5]{x^3+2}\, dx,$

$ii)$ $\int \frac{1}{x^2} cos \frac{1}{x}\, dx,$

$iii)$ $\int \frac{dx}{x\, lnx},$

$iv)$ $\int tgx\, dx,$

$v)$ $\int \frac{tgx+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}tgx}\, dx,$

$vi)$ $\int \frac{(sinx-cosx)^2}{sin2x}\, dx,$

$vii)$ $\int \frac{dx}{chx}.$

Domaći zadatak

Naći sledeće integrale:

$i)\ \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$, $\left[\frac{1}{2} ln(1+x^2)+C\right]$

$ii)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\left[-\sqrt{1-x^2}+C\right]$

$iii)\ \int \frac{ln^2 x\,dx}{x}$, $\left[\frac{1}{3} ln^3 x + C\right]$

$iv)\ \int x\, e^{-x^2} dx$, $\left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}+C\right]$

$v)\ \int \frac{sinx}{\sqrt{cos^3 x}}\, dx$, $\left[\frac{2}{\sqrt{cosx}}+C\right]$

$vi)\ \int \frac{sinx+cosx}{\sqrt[3]{sinx-cosx}}\, dx$, $\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-sin(2x)}+C\right]$

$vii)\ \int sin^2 x\, dx$, $\left[\frac{x}{2}-\frac{sin(2x)}{4}+C\right]$

$viii)\ \int cos^2 x\, dx$. $\left[\frac{x}{2}+\frac{sin(2x)}{4}+C\right]$

Zadatak

Naći sledeće integrale:

i) $\int x \cos x \, dx$,

ii) $\int x^3 e^{x^2} \, dx$,

iii) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x} \, dx$,

iv) $\int \arcsin^2 x \, dx$,

v) $\int \sin(bx) \, e^{ax} \, dx$,

vi) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx$.

Domaći zadatak

Naći sledeće integrale:

$i)$ $\int xsinx\,dx,$ $\quad [-xcosx + sinx + C]$

$ii)$ $\int x^2 sin^2 x\,dx,$ $\quad \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x}{4}cos(2x) - \frac{2x^2-1}{8}sin(2x) + C\right]$

$iii)$ $\int xe^x\,dx,$ $\quad [(x-1)e^x + C]$

$iv)$ $\int e^{\sqrt{x}}\,dx,$ $\quad \left[2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C\right]$

$v)$ $\int x^2 e^{-x}\,dx,$ $\quad \left[-(x^2+2x+2)e^{-x} + C\right]$

$vi)$ $\int arctgx\,dx,$ $\quad \left[xarctgx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C\right]$

$vii)$ $\int x^2 arccosx\,dx,$ $\quad \left[-\frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}x^3 arccosx + C\right]$

$viii)$ $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1+x}}\,dx,$ $\quad \left[2\sqrt{1+x}\,arcsinx + 4\sqrt{1-x} + C\right]$

$ix)$ $\int \frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx,$ $\quad \left[2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}\,arcsin\sqrt{x}) + C\right]$

$x)$ $\int lnx\,dx.$ $\quad [xlnx - x + C]$

Domaći zadatak

Naći sledeće integrale:

i) $\int \frac{x}{cos^2 x}\, dx$, $\quad [xtgx + ln|cosx| + C]$

ii) $\int \frac{arcsinx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$, $\quad \left[arcsinx \cdot tg(arcsinx) + ln\sqrt{1-x^2} + C\right]$

iii) $\int \frac{xe^{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, $\quad \left[\frac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2})e^{arcsinx} + C\right]$

iv) $\int \frac{xe^{arctgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$, $\quad \left[\frac{e^{arctgx}}{2\sqrt{1+x^2}}(x-1) + C\right]$

v) $\int sin(lnx)\, dx$, $\quad \left[\frac{x}{2}(sin(lnx) - cos(lnx)) + C\right]$

vi) $\int cos(lnx)\, dx$, $\quad \left[\frac{x}{2}(sin(lnx) + cos(lnx)) + C\right]$

vii) $\int \frac{ln(sinx)}{cos^2 x}\, dx$, $\quad [tgx \cdot ln(sinx) - x + C]$

viii) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx$, $\quad \left[\frac{e^x}{1+x} + C\right]$

ix) $\int ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx$. $\quad \left[xln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C\right]$

Zadatak

Naći integral $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.
I način: Podintegralna funkcija je definisana za $x \in [-1,1]$. Uvodimo smenu $x = sint, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-sin^2 t}\, d(sint) = \int \sqrt{cos^2 t}\, cost\, dt$$

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow cost \geq 0 \Longrightarrow \int \sqrt{cos^2 t}\, cost\, dt = \int cos^2 t\, dt$$

$$\int cos^2 t\, dt = \int \frac{1+cos2t}{2} dt = \int \frac{dt}{2} + \int \frac{cos2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} sin2t + C$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} sint\, cost + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} sint \sqrt{1-sin^2 t} + C$$

Funkcija $x = sint, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ima inverznu funkciju $t = arcsinx$.

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{2} sint \sqrt{1-sin^2 t} + C = \frac{arcsinx}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

II način:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{1-x^2}\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} & dv = dx \\ du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right\} \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= x\sqrt{1-x^2} - I + arcsinx
\end{aligned}
$$

$$
I = \frac{arcsinx}{2} + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + C
$$

Zadatak

Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Zadatak

Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala $I_n = \int \frac{dx}{sin^n x}$.

Domaći zadatak

Izvesti rekurentne formule za izračunavanje integrala:

i) $I_n = \int sin^n x\, dx$, $\left[I_n = -\frac{1}{n} sin^{n-1} x \cdot cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\right]$

ii) $I_n = \int cos^n x\, dx$, $\left[I_n = \frac{1}{n} cos^{n-1} x \cdot sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\right]$

iii) $I_n = \int \frac{dx}{cos^n x}$. $\left[I_n = \frac{sin x}{(n-1)cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}\right]$

Literatura

1. Neodređeni integrali – skripta

   autor: *Bojana Mihailović*

2. Matematika II – skripta

   autor: *Mirko Jovanović*

3. Matematička analiza, teorija i hiljadu zadataka,

   za studente tehnike, II izdanje

   autor: *Milan Merkle*