Linearna zavisnost vektora

Milica Jovalekić *Odsek Softversko inženjerstvo, Elektrotehnički fakultet, Beograd*

April 2020.

Linearna zavisnost vektora

Zadatak 1. *Ispitati linearnu zavisnost vektora $v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,2,1)$ i $v_3 = (0,4,8)$ u $\mathbb{R}^3$. Ako su dati vektori linearno zavisni, odrediti oblik te zavisnosti.*

Rešenje. Vektori $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ su linearno zavisni, ako postoje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq \mathbf{0}$ i $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \mathbf{0}$, gde je $\mathbf{0} = (0,0,0)$.

$$\begin{aligned}(0,0,0) &= \alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(3,2,1) + \alpha_3(0,4,8)\\ &= (\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (3\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_2) + (0, 4\alpha_3, 8\alpha_3)\\ &= (\alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 8\alpha_3)\end{aligned}$$

Rešavamo homogen sistem sa tri jednačine i tri nepoznate.

$$\begin{cases}\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0\\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0\\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 8\alpha_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0\\ -4\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0\\ -8\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0\\ -4\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0\\ 0 = 0\end{cases}$$

Zaključujemo da je rešenje: $\alpha_1 = -3t, \alpha_2 = t, \alpha_3 = t$, gde je $t \in \mathbb{R}$. Uzmimo, na primer, da je $t = 1$. Tako dobijamo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-3, 1, 1) \neq \mathbf{0}$, pa su vektori v_1, v_2, v_3 linearno zavisni. Važi $-3v_1 + v_2 + v_3 = \mathbf{0}$ i ta jednakost prestavlja traženi oblik linearne zavisnosti. □

Domaći zadatak 2. *Ispitati linearnu zavisnost vektora*
(a) $v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,5,7)$ i $v_3 = (5,9,13)$;
(b) $v_1 = (1,2,3), v_2 = (3,2,9)$ i $v_3 = (5,2,-1)$
u $\mathbb{R}^3$. Ako su dati vektori linearno zavisni, odrediti oblik te zavisnosti.

Zadatak 3. *Odrediti, ako postoji, vrednost parametra $k \in \mathbb{R}$ za koju su vektori $v_1 = (2,k,-4), v_2 = (0,k+2,-8)$ i $v_3 = (1,-1,k-1)$ linearno zavisni u $\mathbb{R}^3$. U slučaju da postoji takvo k, odrediti oblik te linarne zavisnosti.*

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
(0,0,0) &= \alpha_1(2,k,-4)+\alpha_2(0,k+2,-8)+\alpha_3(1,-1,k-1)\\
&= (2\alpha_1, k\alpha_1, -4\alpha_1)+(0,(k+2)\alpha_2,-8\alpha_2)+(\alpha_3,-\alpha_3,(k-1)\alpha_3)\\
&= (2\alpha_1+\alpha_3, k\alpha_1+(k+2)\alpha_2-\alpha_3, -4\alpha_1-8\alpha_2+(k-1)\alpha_3)
\end{aligned}
$$

Rešavamo homogen sistem sa tri jednačine, tri nepoznate i jednim parametrom.

$$
\begin{cases}
2\alpha_1+\alpha_3=0\\
k\alpha_1+(k+2)\alpha_2-\alpha_3=0\\
-4\alpha_1-8\alpha_2+(k-1)\alpha_3=0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\alpha_3=-2\alpha_1\\
(k+2)\alpha_1+(k+2)\alpha_2=0\\
-2(k+1)\alpha_1-8\alpha_2=0
\end{cases}
$$

Ako je $k=-2$, rešenje sistema je $\alpha_1=t, \alpha_2=\frac{1}{4}t, \alpha_3=-2t$, gde je $t\in\mathbb{R}$. Možemo da uzmemo, na primer, da je $t=4$. Dobijamo da je $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(4,1,-8)\neq\mathbf{0}$, pa su vektori v_1,v_2,v_3 linearno zavisni i oblik linearne zavisnosti je $4v_1+v_2-8v_3=\mathbf{0}$.
Ako je $k\neq-2$, dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$
\begin{cases}
\alpha_3=-2\alpha_1\\
\alpha_1+\alpha_2=0\\
-2(k+1)\alpha_1-8\alpha_2=0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\alpha_3=-2\alpha_1\\
\alpha_2=-\alpha_1\\
(-2(k+1)+8)\alpha_1=0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\alpha_3=-2\alpha_1\\
\alpha_2=-\alpha_1\\
2\alpha_1(3-k)=0
\end{cases}
$$

Ako je $k=3$ rešenje sistema je $\alpha_1=t, \alpha_2=-t, \alpha_3=-2t$, gde je $t\in\mathbb{R}$. Možemo da uzmemo, na primer, da je $t=1$. Dobijamo da je $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(1,-1,-2)\neq\mathbf{0}$, pa su vektori v_1,v_2,v_3 linearno zavisni i oblik linearne zavisnosti je $v_1-v_2-2v_3=\mathbf{0}$.
Dakle,
Ako je $k=-2$, vektori su linearno zavisni i važi $4v_1+v_2-8v_3=\mathbf{0}$.
Ako je $k=3$, vektori su linearno zavisni i važi $v_1-v_2-2v_3=\mathbf{0}$.
Ako je $k\in\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$, onda je rešenje sistema $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathbf{0}$, pa su vektori linearno nezavisni. □

Domaći zadatak 4. *Odrediti, ako postoji, vrednost parametra $k\in\mathbb{R}$ za koju su vektori $v_1=(1-k,2,6), v_2=(-1,1,3)$ i $v_3=(2,2,2)$ linearno zavisni u $\mathbb{R}^3$. U slučaju da postoji takvo k, odrediti oblik te linarne zavisnosti.*

Zadatak 5. *Odrediti, ako postoje, vrednosti parametara $a,b\in\mathbb{R}$ za koje su vektori $v_1=(a,b,3)$ i $v_2=(2,a-b,1)$ linearno zavisni u $\mathbb{R}^3$. U slučaju da postoje takvi a i b, odrediti oblik te linarne zavisnosti.*

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
(0,0,0) &= \alpha_1(a,b,3)+\alpha_2(2,a-b,1)\\
&= (a\alpha_1, b\alpha_1, 3\alpha_1)+(2\alpha_2,(a-b)\alpha_2,\alpha_2)\\
&= (a\alpha_1+2\alpha_2, b\alpha_1+(a-b)\alpha_2, 3\alpha_1+\alpha_2)
\end{aligned}
$$

Rešavamo homogen sistem sa tri jednačine, tri nepoznate i dva parametra.

$$\begin{cases} a\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ b\alpha_1 + (a-b)\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\alpha_1 - 6\alpha_1 = 0 \\ b\alpha_1 - 3(a-b)\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -3\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-6)\alpha_1 = 0 \\ (4b-3a)\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -3\alpha_1 \end{cases}$$

Vektori v_1 i v_2 su linearno zavisni ako postoje $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju prethodni sistem i za koje važi $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$. Iz poslednjeg oblika sistema, vidimo da je $\alpha_1 = t, \alpha_2 = -3t$, gde je $t \in \mathbb{R}$.
Ako je $a = 6, b = \frac{9}{2}$, onda možemo da uzmemo da je $t = 1$, pa je $\alpha_1 = 1$ i $\alpha_2 = -3$. Tada su vektori v_1 i v_2 linearno zavisni i važi $v_1 - 3v_2 = \mathbf{0}$.
Ako je $(a,b) \neq (6, \frac{9}{2})$, onda mora da važi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, pa su tada vektori v_1 i v_2 linearno nezavisni. □

Domaći zadatak 6. *Odrediti, ako postoje, vrednosti parametara $a, b \in \mathbb{R}$ za koje su vektori $v_1 = (a-1, 2, b)$ i $v_2 = (1, 1, b)$ linearno zavisni u $\mathbb{R}^3$. U slučaju da postoje takvi a i b, odrediti oblik te linarne zavisnosti.*

Zadatak 7. *Odrediti, ako postoji, vrednost parametra $k \in \mathbb{R}$ za koju su vektori $v_1 = (1, 3, -1, 0), v_2 = (4, k, -2, 1)$ i $v_3 = (2, 3, 0, 1)$ linearno zavisni u $\mathbb{R}^4$. U slučaju da postoji takvo k, odrediti oblik te linarne zavisnosti.*

Rešenje.

$$\begin{aligned} (0,0,0,0) &= \alpha_1(1,3,-1,0) + \alpha_2(4,k,-2,1) + \alpha_3(2,3,0,1) \\ &= (\alpha_1, 3\alpha_1, -\alpha_1, 0) + (4\alpha_2, k\alpha_2, -2\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, 0, \alpha_3) \\ &= (\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, 3\alpha_1 + k\alpha_2 + 3\alpha_3, -\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) \end{aligned}$$

Rešavamo homogen sistem sa četiri jednačine, tri nepoznate i jednim parametrom.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + k\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_2 + 4\alpha_2 - 2\alpha_2 = 0 \\ -6\alpha_2 + k\alpha_2 - 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_3 = -\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ (k-9)\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_3 = -\alpha_2 \end{cases}$$

Ako je $k \neq 9$, onda je $\alpha_2 = 0$, pa je i $\alpha_1 = 0$ i $\alpha_3 = 0$. Tada su vektori v_1, v_2 i v_3 linearno nezavisni.
Ako je $k = 9$, onda α_2 ne mora da bude 0. Uzmimo, na primer, da je $\alpha_2 = 1$. Tada je $\alpha_1 = -2$ i $\alpha_3 = -1$ i vektori v_1, v_2 i v_3 su linearno zavisni. Oblik linearne zavisnosti je $-2v_1 + v_2 - v_3 = \mathbf{0}$.

□

Domaći zadatak 8. *Odrediti, ako postoji, vrednost parametra $k \in \mathbb{R}$ za koju su vektori $v_1 = (1, 0, 1, 2), v_2 = (1, 2, 2, 4)$ i $v_3 = (0, 1, k, 1)$ linearno zavisni u $\mathbb{R}^4$. U slučaju da postoji takvo k, odrediti oblik te linarne zavisnosti.*

Zadatak 9. *Odrediti, ako postoji, vrednost parametra $k \in \mathbb{R}$ za koju su vektori $v_1 = (1,1,1,2), v_2 = (1,2,3,2), v_3 = (3,4,3,3)$ i $v_4 = (k,2,2,4)$ linearno zavisni u $\mathbb{R}^4$. U slučaju da postoji takvo k, odrediti oblik te linarne zavisnosti.*

Rešenje.

$$\begin{aligned}(0,0,0,0) &= \alpha_1(1,1,1,2) + \alpha_2(1,2,3,2) + \alpha_3(3,4,3,3) + \alpha_4(k,2,2,4)\\ &= (\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1,2\alpha_1) + (\alpha_2,2\alpha_2,3\alpha_2,2\alpha_2) + (3\alpha_3,4\alpha_3,3\alpha_3,3\alpha_3) + (k\alpha_4,2\alpha_4,2\alpha_4,4\alpha_4)\\ &= (\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+k\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4, 2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4)\end{aligned}$$

Rešavamo homogen sistem sa četiri jednačine, četiri nepoznate i jednim parametrom.

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+k\alpha_4=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4=0\\ \alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4=0\\ 2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+k\alpha_4=0\\ \alpha_2+\alpha_3+(2-k)\alpha_4=0\\ 2\alpha_2+(2-k)\alpha_4=0\\ -3\alpha_3+(4-2k)\alpha_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+k\alpha_4=0\\ \alpha_2+\alpha_3+(2-k)\alpha_4=0\\ -2\alpha_3+(k-2)\alpha_4=0\\ -3\alpha_3+(4-2k)\alpha_4=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+k\alpha_4=0\\ \alpha_2+\alpha_3+(2-k)\alpha_4=0\\ -2\alpha_3+(k-2)\alpha_4=0\\ (14-7k)\alpha_4=0\end{cases}$$

Ako je $k \neq 2$, onda je $\alpha_4 = 0$, pa je i $\alpha_3 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0$. Tada su vektori v_1, v_2, v_3 i v_4 linearno nezavisni.
Ako je $k = 2$, onda α_4 ne mora da bude 0, pa možemo da uzmemo, na primer, da je $\alpha_4 = 1$. Dalje, mozemo da uzmemo, na primer, da je i $\alpha_3 = 1$. Tada je $\alpha_2 = -1$ i $\alpha_1 = -4$. Zaključujemo da su tada vektori v_1, v_2, v_3 i v_4 linearno zavisni i važi $-4v_1 - v_2 + v_3 + v_4 = \mathbf{0}$. □

Domaći zadatak 10. *Odrediti, ako postoji, vrednost parametra $k \in \mathbb{R}$ za koju su vektori $v_1 = (1,2,k,-1), v_2 = (0,3,-2,1), v_3 = (2,3,2k,-3)$ i $v_4 = (3,-1,0,k-2)$ linearno zavisni u $\mathbb{R}^4$. U slučaju da postoji takvo k, odrediti oblik te linarne zavisnosti.*

Literatura

Zbirka zadataka iz algebre, drugi deo, grupa autora.