Linearna algebra

Ivana Jovović
ivana@etf.rs

Sadržaj

1 Vektorski prostor

1.1 Definicija i primeri

Definicija 1. *Uređenu trojku $(V,+,\cdot)$, gde je $V \neq \emptyset$, $+ : V \times V \to V$ binarna operacija na skupu V, $(+ : (u,v) \mapsto u+v)$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ spoljašnja operacija na skupu V, $(\cdot : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v)$, i $(\mathbb{F},+,\cdot)$ polje, nazivamo* ***vektorskim prostorom nad poljem $\mathbb{F}$*** *ako važi:*

- $(V,+)$ *je Abelova grupa;*
- $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall u,v \in V)\ \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$*;*
- $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in V)\ (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$*;*
- $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in V)\ (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$*;*
- $(\forall v \in V)\ 1 \cdot v = v$*, gde je* 1 *jedinični element polja* $\mathbb{F}$.

Elemente skupa V nazivamo ***vektorima***, dok elemente polja $\mathbb{F}$ nazivamo ***skalarima***. Binarnu operaciju $+ : V \times V \to V$ nazivamo ***sabiranje vektora***, dok spoljašnju operaciju $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ nazivamo ***množenje vektora skalarom***. Neutralni element za sabiranje vektora $\mathbf{0}$ nazivamo ***nula-vektor***. Inverzni element elementa $u \in V$ u odnosu na operaciju sabiranja vektora $-u$ nazivamo ***suprotni vektor*** vektora u.
Primetimo, da ovde koristimo svaku od oznaka $+$ i $\cdot$ za dve različite operacije. Npr. ako su $u, v \in V$, sa $u+v$ označavamo sabiranje vektora u i v u V, a ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, sa $\alpha + \beta$ označavamo sabiranje skalara α i β u $\mathbb{F}$. Iz konteksta će uvek biti jasno o kojoj se operaciji radi, te nema potrebe uvoditi nove oznake.

Primer 2. *Neka je $\mathbb{F}$ polje. Na skupu $V = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \,|\, x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{F}\}$, $n \in \mathbb{N}$, svih uređenih n-torki elemenata iz skupa $\mathbb{F}$, definišemo binarnu operaciju $+ : V \times V \to V$ sa*

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n) := (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$

pokoordinatno sabiranje i spoljašnju operaciju $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ sa

$$\lambda \cdot (x_1,x_2,\ldots,x_n) := (\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n).$$

Tada je $(V,+,\cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

Primer 3. *Neka je $\mathbb{F}$ polje. Skup svih matrica tipa $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$, $m,n \in \mathbb{N}$, u oznaci $\mathbb{F}^{m\times n}$, sa operacijama sabiranja matrica i množenja matrica elementima polja $\mathbb{F}$ jeste vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.*

1.2 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija 4. *Neka je $(V,+,\cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.*
Za vektore $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n \in V$ kažemo da su ***linearno zavisni*** *nad poljem $\mathbb{F}$, ako postoje skalari $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{F}$, od kojih je bar jeda različit od 0, takvi da važi*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n}_{\textit{linearna kombinacija vektora}} = \mathbf{0}.$$

Za vektore koji nisu linearno zavisni kažemo da su ***linearno nezavisni***. Za linearno nezavisne vektore važi implikacija

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \mathbf{0}.$$

Za skup vektora kažemo da je ***linearno zavisan***, odnosno ***linearno nezavisan*** ako su vektori koji ga obrazuju linearno zavisni odnosno nezavisni.

Teorema 5. *Neka je $(V,+,\cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka su $v_1,v_2,\ldots,v_n$ vektori iz V. Tada važi:*

1. *ako postoji i, $1 \le i \le n$, takvo da je $v_i = \mathbf{0}$, onda su vektori $v_1,v_2,\ldots,v_n$ linearno zavisni;*
2. *ako postoje i i j, $1 \le i < j \le n$, takvi da je $v_i = v_j$, onda su vektori $v_1,v_2,\ldots,v_n$ linearno zavisni;*
3. *ako je skup $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ linearno nezavisan, onda je i svaki njegov podskup takođe linearno nezavisan;*
4. *ako je skup $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ linearno zavisan, onda je i svaki njegov nadskup takođe linearno zavisan;*
5. *ako je skup $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ linearno nezavisan i ako za $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n \in \mathbb{F}$ i $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n \in \mathbb{F}$ važi*

   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n,$$

   onda je $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

6. *skup vektora* $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *je linearno zavisan ako i samo ako je za neko i,* $1 \le i \le n$*, vektor* v_i *linearna kombinacija ostalih vektora iz datog skupa.*

1.3 Potprostor vektorskog prostora

Neka je $(V,+,\cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je U neprazan podskup od V. Ako je $(U,+,\cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, gde su $+$ i $\cdot$ nasleđene operacije iz $(V,+,\cdot)$, onda kažemo da je U ***vektorski potprostor*** od V. Ako je $U \neq \{\mathbf{0}\}$ i $U \neq V$, onda kažemo da je U ***pravi vektorski potprostor*** od V.

Teorema 6. *Uređena trojka* $(U,+,\cdot)$*,* $\emptyset \neq U \subseteq V$*, je vektorski potprostor vektorskog prostora* $(V,+,\cdot)$ *nad poljem* $\mathbb{F}$*, ako i samo ako važi*

$$\begin{array}{l} (\forall u, v \in U)\; u+v \in U, \\ (\forall \alpha \in \mathbb{F})(\forall u \in U)\; \alpha \cdot u \in U. \end{array}$$

Teorema 7. *Uređena trojka* $(U,+,\cdot)$*,* $\emptyset \neq U \subseteq V$*, je vektorski potprostor vektorskog prostora* $(V,+,\cdot)$ *nad poljem* $\mathbb{F}$*, ako i samo ako važi*

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})(\forall u, v \in U)\; \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in U.$$

Teorema 8. *Neka je dat homogeni sistem, sa koeficijentima u polju* $\mathbb{R}$*, m linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih* $x_1, x_2, \dots, x_n$*:*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0, \end{array}$$

i neka je V skup svih rešenja datog sistema. Pokazati da je V vektorski potprostor vektorskog prostora kolona-matrica $\mathbb{R}^{n\times 1}$*.*

Dokaz:
Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \text{i} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

Dati sistem možemo zapisati u matričnom obliku $A \cdot X = \mathbf{0}$. Ovaj sistem uvek ima trivijalno rešenje, prema tome skup rešenja V je neprazan. Dalje, neka su X i Y dva proizvoljna rešenja datog homogenog sistema, dokažimo da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi da je i $\alpha X + \beta Y$ takođe rešenje datog sistema. Imamo da je

$$A \cdot (\alpha X + \beta Y) = A \cdot (\alpha X) + A \cdot (\beta Y) = \alpha (A \cdot X) + \beta (A \cdot Y) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \beta \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Prema tome, i $\alpha X + \beta Y$ je rešenje datog sistema.

1.4 Linearni omotač (lineal)

Definicija 9. *Neka je* $(V,+,\cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$*. Skup svih linearnih kombinacija vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$*, u oznaci*

$$\mathscr{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\},$$

nazivamo ***linearnim omotačem*** *ili* ***linealom*** *vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n$*. Kažemo da vektori* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *generišu ili razapinju* $\mathscr{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$*.*

Definicija 10. *Neka je* W *neprazan podskup od* V*. Skup* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *nazivamo* ***generatorskim skupom*** *skupa* W *ako važi* $W = \mathscr{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$*, t.j. ako se svaki vektor iz* W *može predstaviti kao linearna kombinacija vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n$*.*

Neka je U proizvoljan neprazan podskup od V. Skup svih linearnih kombinacija vektora iz U

$$\mathscr{L}(U) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \mid v_1, v_2, \ldots, v_n \in U, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}\},$$

nazivamo ***linearnim omotačem*** ili ***linealom*** skupa U. Skup U nazivamo ***generatorskim skupom*** skupa W ako važi $W = \mathscr{L}(U)$, t.j. ako se svaki vektor iz W može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz U.

Teorema 11. *Neka je* $(V,+,\cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i neka su* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$*. Tada je* $\mathscr{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *vektorski potprostor od* V*. Takođe, ako je* U *neprazan podskup od* V*, onda je* $\mathscr{L}(U)$ *vektorski potprostor od* V*.*

1.5 Baza i dimenzija vektorskog prostora

Definicija 12. *Skup* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *nazivamo* ***bazom*** *vektorskog prostora* $(V,+,\cdot)$ *nad poljem* $\mathbb{F}$ *ako je generatorski skup od* V *i ako su vektori* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *linearno nezavisni.*

Skup U nazivamo ***bazom*** vektorskog prostora $(V,+,\cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$ ako je linearno nezavisan generatorski skup od V.

Teorema 13. *Ako vektorski prostor* $(V,+,\cdot)$ *nad poljem* $\mathbb{F}$ *ima bazu koja ima* n *elementa, onda svaka druga baza od* V *ima* n *elemenata.*

Za vektorski prostor kažemo da je konačno-dimenzionalan ako ima konačnu bazu. Na osnovu prethodne teoreme, zaključujemo da su u konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru svake dve baze istobrojne.

Definicija 14. ***Dimenzija*** *konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora* V*, u oznaci* $\dim V$*, je broj elemenata baze.*

Teorema 15. *Neka je* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *baza vektorskog prostora* $(V,+,\cdot)$ *nad poljem* $\mathbb{F}$*. Tada se svaki vektor* u *iz* V *može predstaviti na jedinstven način kao linearna kombinacija vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n$*, tj. postoje jedinstveni skalari* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ *takvi da je* $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$*.*

Dimenzija vektorskog prostora $V = \{\mathbf{0}\}$ je jednaka 0.

Primer 16. *Dimenzija vektorskog prostora* $\mathbb{F}^n$*, svih uređenih n-torki nad poljem* $\mathbb{F}$*, je n, a jedna baza je* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$*, gde je* $e_1 = (1,0,\ldots,0)$*,* $e_2 = (0,1,\ldots,0)$*, …,* $e_n = (0,0,\ldots,1)$*. Svaki skup od n linearno nezavisnih vektora u prostoru* $\mathbb{R}^n$ *obrazuje bazu tog prostora. Prema tome, još jedna baza vektorskog prostora* $\mathbb{F}^n$ *je* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$*, gde je* $f_1 = (1,0,\ldots,0)$*,* $f_2 = (1,1,\ldots,0)$*, …,* $f_n = (1,1,\ldots,1)$*.*

1.6 Literatura

1. Matematika 1 – Algebra autori: *D. Cvetković, I. Lacković, M. Merkle, Z. Radosavljević, S. Simić, P. Vasić*

2. Linearna algebra autori: *M. Rašajski, B. Malešević, T. Lutovac, B. Mihailović, N. Cakić*

3. Zbirka zadataka iz algebre I deo autori: *P. Vasić, B. Iričanin, M. Jovanović, B. Malešević, T. Madžarević, B. Mihailović, Z. Radosavljević, S. Simić, D. Cvetković*

4. Zbirka zadataka iz algebre II deo autori: *P. Vasić, B. Iričanin, M. Jovanović, T. Madžarević, B. Mihailović, Z. Radosavljević, S. Simić, D. Cvetković*