Linearne diferencijalne jednačine višeg reda

Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda je diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = F(x),$$

gde su funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n, F$ definisane i neprekidne na nekom intervalu (a, b). Ako za slobodan član F važi da je $(\forall x \in (a, b))\, F(x) = 0$, odnosno ako je $F \equiv 0$, kažemo da je diferencijalna jednačina homogena, u protivnom je nehomogena. Svakoj nehomogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = F(x),$$

pridružujemo odgovarajuću homogenu jednačinu

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = 0.$$

Ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno nezavisna rešenja homogene diferencijalne jednačine, onda je $y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x)$ njeno opšte rešenje, gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

Liouvilleova formula: Ako je y_1 netrivijalno partikularno rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine II reda

$$y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_2(x)y(x) = 0,$$

onda je

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int f_1(x)\,d\,x}\, d\,x$$

takođe partikularno rešenje date jednačine linearno nezavisno od y_1.

Neka je y_h opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine i y_p jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine. Tada je opšte rešenje nehomogene jednačine dato sa $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Metoda varijacije konstanata: Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = 0.$$

Tada je opšte rešenje nehomogene jednačine

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = F(x)$$

dato sa

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ funkcije čije izvode nalazimo rešavanjem sistema jednačina:

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n(x) = 0\\
&C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n'(x) = 0\\
&\ldots\\
&C_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) = 0\\
&C_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\, y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = F(x).
\end{aligned}$$

Linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima je diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + f_1\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}\, y'(x) + f_n\, y(x) = 0,$$

gde su $f_1,\ f_2,\ \ldots\ ,\ f_n$ konstante.
Potražimo rešenje date jednačine u obliku $y(x) = e^{\lambda x}$. Kako je $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$ zamenom u datu jednačinu dobijamo algebarsku jednačinu

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

koju nazivamo karakterističnom jednačinom, koja je pridružena polaznoj diferencijalnoj jednačini.
Svakom korenu karakteristične jednačine odgovara jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine. Tako dobijena partikularna rešenja čine skup linearno nezavisnih funkcija (fundamentalni skup rešenja).

- Ako je λ prost realan koren karakteristične jednačine, onda je odgovarajuće partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y_p(x) = e^{\lambda x}$.

- Ako je λ realan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, onda su odgovarajuća partikularna rešenje diferencijalne jednačine $y_{p_1}(x) = e^{\lambda x}$, $y_{p_2}(x) = xe^{\lambda x}$, $\ldots$, $y_{p_k}(x) = x^{k-1}e^{\lambda x}$.

- Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ prost kompleksan koren karakteristične jednačine, onda je i $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ prost kompleksan koren karakteristične jednačine, a odgovarajuća partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1}(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $y_{p_2}(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

- Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleksan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, onda je i $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ kompleksan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, a odgovarajuća partikularna rešenja diferencijalne jednačine su

$$y_{p_1}(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{p_2}(x) = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, y_{p_k}(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_{p_{k+1}}(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{p_{k+2}}(x) = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, y_{p_{2k}}(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Metoda neodređenih koeficijenata:
Neka je data linearna nehomogena diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantim koeficijentima $y^{(n)}(x) + f_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}y'(x) + f_n y(x) = F(x)$, gde je nehomogeni deo $F(x)$ oblika $e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$.
Partikularno rešenje y_p date jednačine je oblika:

- $y_p(x) = e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right)$, ako $\alpha + i\beta$ nije koren karakteristične jednačine;

- $y_p(x) = x^k e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right)$, ako je $\alpha + i\beta$ koren karakteristične jednačine reda $k, k \geq 1$;

gde je $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.

Navedimo neke specijalne slučajeve ovog razmatranja:

1. Ako je nehomogeni deo $F(x) = P(x)$, onda je partikularno rešenje y_p oblika:

   - $y_p(x) = Q(x)$, ako 0 nije koren karakteristične jednačine;
   - $y_p(x) = x^k Q(x)$, ako je 0 koren karakteristične jednačine reda $k, k \geq 1$,

   $\deg Q = \deg P$;

2. Ako je nehomogeni deo $F(x) = A\, e^{\alpha x}$, onda je partikularno rešenje y_p oblika:

   - $y_p(x) = a\, e^{\alpha x}$, ako α nije koren karakteristične jednačine;
   - $y_p(x) = a x^k e^{\alpha x}$, ako je α koren karakteristične jednačine reda $k, k \geq 1$;

3. Ako je nehomogeni deo $F(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$, onda je partikularno rešenje y_p oblika:

   - $y_p(x) = Q(x)\, e^{\alpha x}$, ako α nije koren karakteristične jednačine;
   - $y_p(x) = x^k\, Q(x)\, e^{\alpha x}$, ako je α koren karakteristične jednačine reda $k, k \geq 1$,

   $\deg Q = \deg P$;

4. Ako je nehomogeni deo $F(x) = A\, \cos(\beta x) + B\, \sin(\beta x)$ ili $F(x) = A\, \cos(\beta x)$ ili $F(x) = B\, \sin(\beta x)$, onda je partikularno rešenje y_p oblika:

   - $y_p(x) = a\, \cos(\beta x) + b\, \sin(\beta x)$, ako $i\beta$ nije koren karakteristične jednačine;
   - $y_p(x) = x^k\, (a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x))$, ako je $i\beta$ koren karakteristične jednačine reda $k, k \geq 1$;

5. Ako je nehomogeni deo $F(x) = P_1(x)\, \cos \beta x + P_2(x)\, \sin \beta x$ ili $F(x) = P_1(x)\, \cos \beta x$ ili $F(x) = P_2(x)\, \sin \beta x$, onda je partikularno rešenje y_p oblika:

   - $y_p(x) = Q_1(x)\, \cos(\beta x) + Q_2(x)\, \sin(\beta x)$, ako $i\beta$ nije koren karakteristične jednačine;
   - $y_p(x) = x^k\, (Q_1(x)\, \cos(\beta x) + Q_2(x)\, \sin(\beta x))$, ako je $i\beta$ koren karakteristične jednačine reda $k, k \geq 1$,

   $\deg Q_1 = \deg Q_2 = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.

Ako je nehomogeni deo $F(x)$ oblika $F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x)$, za

$$F_i(x) = e^{\alpha_i x}\, (P_{i_1}(x) \cos \beta_i x + P_{i_2}(x) \sin \beta_i x)\,,$$

onda partikularno rešenje polazne jednačine dobijamo kao zbir partikularnih rešenja jednačina

$$y^{(n)}(x) + f_1\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}\, y'(x) + f_n\, y(x) = F_i(x).$$