Ekstremne vrednosti realnih funkcija
dve ili tri realne promenljive

Contents

1 Kratak teorijski pregled

1.1 Parcijalni izvodi prvog reda

$z = f(x,y)$

$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ parcijalni priraštaj po promenljivoj x

$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ parcijalni priraštaj po promenljivoj y

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ totalni priraštaj

$lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ parcijalni izvod prvog reda po promenljivoj x

$lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ parcijalni izvod prvog reda po promenljivoj y

$$\frac{\partial}{\partial x}z = \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x,y) = lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}z = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x,y) = lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

1.2 Parcijalni izvodi drugog reda

Diferencijal prvog reda funkcije $z = f(x,y)$ je

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Parcijalni izvodi drugog reda

$$\begin{array}{ll} z''_{xx} = (z'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} z\right) = \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} & z''_{xy} = (z'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} z\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ z''_{yy} = (z'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} z\right) = \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} & z''_{yx} = (z'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} z\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{array}$$

Diferencijal drugog reda funkcije $z = f(x,y)$ je

$$\begin{aligned} d^2 z &= z''_{xx} dx^2 + 2 z''_{xy} dx dy + z''_{yy} dy^2 \\ &= \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} dy^2 \end{aligned}$$

Ako su u nekoj tački M_0 parcijalni izvodi prvog reda funkcije $z = f(x,y)$ jednaki 0, onda tačku M_0 nazivamo stacionarnom tačkom.

1.3 Tačke lokalnog ekstrema

Za tačku $M_0(x_0, y_0)$ kažemo da je tačka lokalnog minimuma funkcije $z = f(x,y)$, ako važi:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

tj. ako je totalni priraštaj funkcije $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ veći ili jednak 0:

$$\Delta z_0 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \geq 0.$$

Za tačku $M_0(x_0, y_0)$ kažemo da je tačka lokalnog maksimuma funkcije $z = f(x,y)$, ako važi:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

tj. ako je totalni priraštaj funkcije $z = f(x,y)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$ manji ili jednak 0:

$$\Delta z_0 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \leq 0.$$

Tačke lokalnog minimuma i maksimuma se jednim imenom nazivaju tačke lokalnih ekstrema.
Ako je M_0 stacionarna tačka i ako je $d^2 f(M_0) > 0$, onda u tački M_0 funkcija ima lokalni minimum.

Ako je M_0 stacionarna tačka i ako je $d^2 f(M_0) < 0$, onda u tački M_0 funkcija ima lokalni maksimum.

Ako je M_0 stacionarna tačka i ako je $d^2 f(M_0) = 0$, onda su potrebna dodatna ispitivanja.

Označimo sa $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$ i $C = f''_{yy}(M_0)$.
Stacionarna tačka M_0 je tačka lokalnog minimuma ako je $AC - B^2 > 0$ i $A > 0$.
Stacionarna tačka M_0 je tačka lokalnog maksimuma ako je $AC - B^2 > 0$ i $A < 0$.
Stacionarna tačka M_0 nije tačka lokalnog ekstrema ako je $AC - B^2 < 0$.
Za stacionarnu tačku M_0 za koju je $AC - B^2 = 0$, potrebna su dodatna ispitivanja.
$d^2 f(M_0) > 0 \Leftrightarrow A > 0 \wedge AC - B^2 > 0 \quad d^2 f(M_0) < 0 \Leftrightarrow A < 0 \wedge AC - B^2 > 0$

2 Zadaci

2.1 Matematika II – zadaci, str. 271, zadatak 16

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 2$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 3$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & 2x + y - 2 = 0 & y = 2 - 2x & x = \frac{1}{3} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 & x + 2y - 3 = 0 & x + 2(2 - 2x) - 3 = 0 & y = \frac{4}{3} \end{array}$$

Postoji jedna stacionarna tačka $M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 2$$

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_0:

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} dy^2 \\ &= 2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 = (dx + dy)^2 + dx^2 + dy^2 > 0 \end{aligned}$$

Ili ispitujemo uslov u tački M_0:

$$A = 2 \qquad B = 1 \qquad C = 2$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{i} \quad A = 2 > 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ je tačka lokalnog minimuma.

2.2 Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I, str. 131, zadatak 1

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = ln(y - 2xy) + xy - x.$$

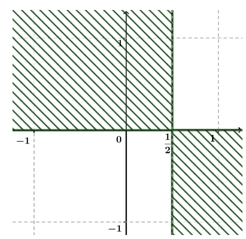
Rešenje.

Određujemo oblast definisanosti funkcije:

$$y - 2xy > 0$$

$$y(1 - 2x) > 0$$

$$(y > 0 \wedge x < \frac{1}{2}) \vee (y < 0 \wedge x > \frac{1}{2})$$



Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y-2xy}(-2y) + y - 1 = \frac{2}{2x-1} + y - 1 = \frac{3-2x-y+2xy}{2x-1}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y-2xy}(1-2x) + x = \frac{1}{y} + x = \frac{1+xy}{y}$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$3 - 2x - y + 2xy = 0 \qquad xy = -1 \qquad y = 1 - 2x$$

$$1 + xy = 0 \qquad y = 1 - 2x \qquad 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = 1, \qquad y_1 = 1 - 2 = -1$$

$$x_2 = -\tfrac{1}{2} \qquad y_2 = 1 + 1 = 2$$

Postoje dve stacionarne tačke $M_1\,(1,-1)$ i $M_2\left(-\frac{1}{2},2\right)$.
Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = -\frac{1}{y^2}$$

Ispitujemo da li je tačka $M_1\,(1,-1)$ tačka lokalnog ekstrema.

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_1:

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2}dy^2 \\ &= -4dx^2 + 2dxdy - dy^2 = -(dx-dy)^2 - 3dx^2 < 0 \end{aligned}$$

Ili ispitujemo uslov:

$$A = -4 \qquad B = 1 \qquad C = -1$$

$$AC - B^2 = -4 \cdot (-1) - 1^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \text{i} \quad A = -4 < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_1\,(1,-1)$ je tačka lokalnog maksimuma.

Ispitujemo da li je tačka $M_2\left(-\frac{1}{2},2\right)$ tačka lokalnog ekstrema.
Ispitujemo uslov:

$$A = -1 \qquad B = 1 \qquad C = -\frac{1}{4}$$

$$AC - B^2 = -1 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 1^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_2\left(-\frac{1}{2},2\right)$ nije tačka lokalnog ekstrema.

2.3 Zadaci i rešeni primeri iz matematičke analize za fakultete, str. 220, primer 1

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 3(x^2 + y^2 - 5)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 6(xy - 2)$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \qquad & x^2 + y^2 - 5 &= 0 \qquad & y &= \frac{2}{x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \qquad & xy - 2 &= 0 \qquad & x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x} \qquad & y &= \frac{2}{x} \\ x^4 - 5x^2 + 4 &= 0 \qquad & (x^2-1)(x^2-4) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \quad & x_2 &= -1 \quad & x_3 &= 2 \quad & x_4 &= -2 \\ y_1 &= 2 \quad & y_2 &= -2 \quad & y_3 &= 1 \quad & y_4 &= -1 \end{aligned}$$

Postoje četiri stacionarne tačke $M_1(1,2)$, $M_2(-1,-2)$, $M_3(2,1)$ i $M_4(-2,-1)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6y \qquad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 6x$$

Ispitujemo da li je tačka $M_1(1,2)$ tačka lokalnog ekstrema.
Ispitujemo uslov:
$$A = 6 \qquad B = 12 \qquad C = 6$$

$$AC - B^2 = 6 \cdot 6 - 12^2 = 36 - 144 = -108 < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_1(1,2)$ nije tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo da li je tačka $M_2(-1,-2)$ tačka lokalnog ekstrema.
Ispitujemo uslov:
$$A = -6 \qquad B = -12 \qquad C = -6$$

$$AC - B^2 = -6 \cdot (-6) - (-12)^2 = 36 - 144 = -108 < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_2(-1,-2)$ nije tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo da li je tačka $M_3(2,1)$ tačka lokalnog ekstrema.
Ispitujemo uslov:
$$A = 12 \qquad B = 6 \qquad C = 12$$

$$AC - B^2 = 12 \cdot 12 - 6^2 = 144 - 36 = 108 > 0 \quad \text{i} \quad A = 12 > 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_2\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ je tačka lokalnog minimuma.

Ispitujemo da li je tačka $M_4(-2,-1)$ tačka lokalnog ekstrema.
Ispitujemo uslov:
$$A = -12 \qquad B = -6 \qquad C = -12$$

$$AC - B^2 = -12 \cdot (-12) - (-6)^2 = 144 - 36 = 108 > 0 \quad \text{i} \quad A = -12 < 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_4(-2,-1)$ je tačka lokalnog maksimuma.

2.4 Matematika II – zadaci, str. 272, zadatak 17

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = (y-x)^2 + (y+2)^3.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(y-x)(-1) = 2(x-y)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-x) + 3(y+2)^2$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & 2(x-y) = 0 & x = y & x = -2 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 & 2(y-x) + 3(y+2)^2 = 0 & y = -2 & y = -2 \end{array}$$

Postoji jedna stacionarna tačka $M_0(-2,-2)$.
Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 2 + 6(y+2) = 6y + 14$$

Ispitujemo uslov u tački M_0:

$$A = 2 \qquad B = -2 \qquad C = 2$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$$

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_0:

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} dy^2 \\ &= 2dx^2 - 4dxdy + 2dy^2 = 2(dx - dy)^2 \end{aligned}$$

$$d^2 z = 0 \quad \text{za} \quad dx = dy$$

$$z = f(x,y) = (y-x)^2 + (y+2)^3$$

Određujemo totalni priraštaj u tački $M_0(-2,-2)$:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(-2+\Delta x, -2+\Delta y) - f(-2,-2) \\ &= \left[((-2+\Delta y) - (-2+\Delta x))^2 + ((-2+\Delta y)+2)^3\right] \\ &- \left[(-2-(-2))^2 + (-2+2)^3\right] \\ &= (\Delta y - \Delta x)^2 + \Delta y^3 \end{aligned}$$

$$\Delta y = \Delta x > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta z > 0$$

$$\Delta y = \Delta x < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta z < 0$$

Totalni priraštaj menja znak u tački $M_0(-2,-2)$.

Tačka $M_0(-2,-2)$ nije tačka lokalnog ekstrema.

2.5 Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I, str. 132, zadatak 2

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 & 4x^3 - 2x - 2y = 0 & x^3 = y^3 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 & 4y^3 - 2x - 2y = 0 & 2x^3 - x - y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} y = x & y = x \\ 2x^3 - 2x = 0 & x(x-1)(x+1) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0 & x_2 = 1 & x_3 = -1 \\ y_1 = 0 & y_2 = 1 & y_3 = -1 \end{array}$$

Postoje tri stacionarne tačke $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$ i $M_3(-1,-1)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = 12x^2 - 2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2 \quad \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = 12y^2 - 2$$

Ispitujemo da li je tačka $M_1(0,0)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = -2 \qquad B = -2 \qquad C = -2$$
$$AC - B^2 = -2 \cdot (-2) - (-2)^2 = 4 - 4 = 0$$
$$z = f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

Određujemo totalni priraštaj u tački $M_1(0,0)$:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) \\ &= \Delta x^4 + \Delta y^4 - \Delta x^2 - 2\Delta x \Delta y - \Delta y^2 \\ &= \Delta x^4 + \Delta y^4 - (\Delta y + \Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$\Delta y = -\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta z = 2\Delta y^4 > 0$$
$$\Delta y = \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta z = 2\Delta y^4 - 4\Delta y^2 = 2\Delta y^2(\Delta y^2 - 2) < 0$$

Totalni priraštaj menja znak u tački $M_1(0,0)$.

Tačka $M_1(0,0)$ nije tačka lokalnog ekstrema.
Ispitujemo da li je tačka $M_2(1,1)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = 10 \qquad B = -2 \qquad C = 10$$
$$AC - B^2 = 10 \cdot 10 - (-2)^2 = 100 - 4 = 96 > 00 \quad \text{i} \quad A = 10 > 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_2(1,1)$ je tačka lokalnog minimuma.

Ispitujemo da li je tačka $M_3(-1,-1)$ tačka lokalnog ekstrema.

Ispitujemo uslov:

$$A = 10 \qquad B = -2 \qquad C = 10$$
$$AC - B^2 = 10 \cdot 10 - (-2)^2 = 100 - 4 = 96 > 00 \quad \text{i} \quad A = 10 > 0$$

Zaključujemo: Tačka $M_3(-1,-1)$ je tačka lokalnog minimuma.

2.6 Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I, str. 133, zadatak 3

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$u = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 6y + 6z.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y + 4$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + 2x + 2z + 6$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4z + 2y + 6$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\begin{array}{rcl} x + y + 2 = 0 & x = -2 - y & z = -2 \\ x + 2y + z + 3 = 0 & y = -2z - 3 & y = 1 \\ y + 2z + 3 = 0 & -2 - 2z - 3 + z + 3 = 0 & x = -3 \end{array}$$

Postoji jedna stacionarna tačka $M_0(-3,1,-2)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} = 2 & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2 & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} = 4 & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2 & \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2} = 4 \end{array}$$

Ispitujemo da li je tačka $M_0(-3,1,-2)$ tačka lokalnog ekstrema.

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_0:

$$\begin{aligned} d^2 z &= \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2} dz^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dydz \\ &= 2dx^2 + 4dy^2 + 4dz^2 + 4dxdy + 4dydz \\ &= 2(dx+dy)^2 + 2(dy+dz)^2 + 2dz^2 > 0 \end{aligned}$$

Zaključujemo: Tačka $M_0(-3,1,-2)$ je tačka lokalnog minimuma.

2.7 Zadaci za vežbu

Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcije

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Rešenje.

Određujemo parcijalne izvode prvog reda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x + 2 = 2(x+1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y + 4 = 2(y+2) \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2z - 6 = 2(z-3) \end{aligned}$$

Određujemo stacionarne tačke:

$$\begin{array}{ll} x+1=0 & x=-1 \\ y+2=0 & y=-2 \\ z-3=0 & z=3 \end{array}$$

Postoji jedna stacionarna tačka $M_0(-1,-2,3)$.

Određujemo parcijalne izvode drugog reda:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2} = 2 & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} = 2 & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 & \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2} = 2 \end{array}$$

Ispitujemo da li je tačka $M_0(-3,1,-2)$ tačka lokalnog ekstrema.

Određujemo diferencijal drugog reda u tački M_0:

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{(\partial z)^2}dz^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz \\ &= 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 > 0 \end{aligned}$$

Zaključujemo: Tačka $M_0(-3,1,-2)$ je tačka lokalnog minimuma.
Odrediti tačke lokalnih ekstrema funkcija:

- $z = e^{2x}(x + y^2 + 2z)$,
- $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$,
- $z = (x-y)^2 + (y-1)^2$,
- $z = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$,
- $z = 3ln\frac{x}{6} + 2lny + ln(12 - x - y)$,
- $z = x - 2y + ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3arctg\frac{y}{x}$,
- $z = x^3 + y^3 - 3xy$,
- $z = x^2 + 6y^2 - 6x + 12y + 10$,
- $z = -2x^2 - 4y^2 + 4x + 2y - 4xy - 12$,
- $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$,
- $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

Literatura

1. Matematika II – zadaci autor: *Vesna Jevremović*
2. Zbirka rešenih zadataka iz matematičke analize I autori: *Momčilo Novaković, Biljana Rodić, Slavica Madić, Ilija Kovačević*
3. Zadaci i rešeni primeri iz matematičke analize za fakultete redaktor: *B. P. Demidovič* autori: *G. S. Baranenkov, B. P. Demidovič, V. A. Jefimenko, S. M. Kogan, G. L. Lunc, E. F. Poršneva, E. P. Syčeva, S. V. Frolov, R. J. Šostak, A. R. Janpoljskij*