Glava 3

VEKTORSKI PROSTORI I

LINEARNI OPERATORI

1 Vektorski prostori

1.1 Vektorski prostor, definicija, osnovna svojstva

Definicija 1.1. *Neka su dati neprazan skup V i polje $\mathbf{F} = (F, +_F, \cdot_F)$. Elemente skupa V nazivamo vektorima, a elemente skupa F nazivamo skalarima. Osim toga, neka je data operacija $+ : V \times V \to V$, koju nazivamo sabiranje vektora, i spoljašnja operacija $\cdot : F \times V \to V$, koju nazivamo množenje vektora skalarom, sa sledećim osobinama:*

(1) $(V, +)$ *je Abelova grupa, tj. osim zatvorenosti važi:*

(1.1) *asocijativnost:* $(\forall x, y, z)\, x + (y + z) = (x + y) + z$,

(1.2) *egzistencija neutralnog elementa:*
$(\exists e \in V)\, (\forall x \in V)\, x + e = e + x = x$,

(1.3) *egzistencija inverznih elemenata:*
$(\forall x \in V)\, (\exists y \in V)\, x + y = y + x = e$,
gde je e neutralni element za sabiranje vektora,

(1.4) komutativnost: $(\forall x, y \in V)\, x + y = y + x,$

(2) $(\forall \alpha \in F)\,(\forall x, y \in V)\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$

(3) $(\forall \alpha, \beta \in F)\,(\forall x \in V)\ (\alpha +_F \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$

(4) $(\forall \alpha, \beta \in F)\,(\forall x \in V)\ (\alpha \cdot_F \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x),$

(5) $(\forall x \in V)\ 1 \cdot x = x,$ *gde je* 1 *jedinični element za množenje u polju* $\mathbf{F}$.

Tada se algebarska struktura $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *naziva vektorski prostor* $\mathbf{V}$ *nad poljem* $\mathbf{F}$.

Najčešće ćemo koristiti kraću oznaku $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$. Ako je $\mathbf{F}$ polje realnih brojeva, odgovarajući vektorski prostor nazivamo *realnim*, a ako je $\mathbf{F}$ polje kompleksnih brojeva, odgovarajući vektorski prostor nazivamo *kompleksnim*.

U daljem tekstu ćemo umesto $+_F$ i $\cdot_F$ pisati kratko $+$ i $\cdot$, a iz konteksta će biti jasno na koje se operacije misli.

Neutralni element za sabiranje vektora naziva se *nula-vektor* i označava sa 0. Istu oznaku ćemo koristiti i za neutralni element za sabiranje u polju $\mathbf{F}$, a iz konteksta će se uvek videti na šta se koja oznaka odnosi.

Inverzni element $-x$ elementa $x \in V$ u odnosu na operaciju sabiranja vektora naziva se *suprotni vektor* vektora $x \in V$.

Razliku vektora $x, y \in V$, u oznaci $x - y$, definišemo sa $x + (-y)$. Sada ćemo navesti neke osnovne relacije koje važe u vektorskim prostorima.

Teorema 1.2. *Neka je* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F}, +, \cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbf{F}$. *Neka su* $x, y \in V$ *i* $\alpha, \beta \in F$. *Tada:*

(1) $0 \cdot x = 0,$

(2) $\alpha \cdot 0 = 0,$

(3) $-(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x$

(4) $(-1) \cdot x = -x,$

(5) $\alpha \cdot x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee x = 0.$

Dokaz. (1) $0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Sada dodamo $-(0 \cdot x)$ levoj i desnoj strani i dobijamo $0 \cdot x = 0$.

(2) $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$. Dodavanjem $-(\alpha \cdot 0)$ levoj i desnoj strani dobijamo $0 \cdot x = 0$.

(3) $\alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot 0 = 0$. Sada sledi da je $-(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$. $\alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$. Dakle, $-(\alpha \cdot x) = (-\alpha) \cdot x$.

(4) $(-1) \cdot x = 1 \cdot (-x) = -x$.

(5) Neka je $\alpha \neq 0$. Tada:

$$\alpha \cdot x = 0 \Rightarrow (\alpha^{-1}) \cdot (\alpha \cdot x) = 0 \Rightarrow (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = 0 \Rightarrow 1 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Sada, ako je $\alpha \cdot x = 0 \wedge x \neq 0$, ne može biti i $\alpha \neq 0$ po prethodno dokazanom. Dakle, $\alpha = 0$. Konačno, $\alpha \cdot x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee x = 0$. □

Primer 1.3. *Neka je dat skup*

$$R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \,|x_1, x_2, x_3 \in R\}.$$

Elemente tog skupa nazivaćemo vektorima. U tom skupu definišimo operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom na sledeći način:

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\alpha \cdot x = \alpha (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3),$$

za proizvoljne vektore $x, y \in R^3$ i skalar $\alpha \in R$.

Algebarska struktura $\mathbf{R}^3 = (R^3, \mathbf{R})$ sa ovako uvedenim operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom je vektorski prostor.

Rešenje. Pokažimo prvo da je $(R^3, +)$ Abelova grupa.

(1) *Zatvorenost*
Dokažimo da za proizvoljne vektore $x, y \in R^3$ važi $x + y \in R^3$.

Neka je $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$. Tada je

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

a kako u polju $(R, +, \cdot)$ važi zatvorenost za sabiranje, zaključujemo da

$$x_1 + y_1 \in R,\ x_2 + y_2 \in R \text{ i } x_3 + y_3 \in R,$$

odnosno

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = x + y \in R^3.$$

(2) *Asocijativnost*
Neka su $x, y, z \in R^3$ proizvoljni vektori.

Neka je $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ i $z = (z_1, z_2, z_3)$.

Dokažimo da važi:

$$(x + y) + z = x + (y + z)\,.$$

Zbog asocijativnosti sabiranja u polju $(R, +, \cdot)$ važi:

$$(x + y) + z = ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) + (z_1, z_2, z_3) =$$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) + (z_1, z_2, z_3) =$$

$$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3) =$$

$$= (x_1 + (y_1 + z_1)\,, x_2 + (y_2 + z_2)\,, x_3 + (y_3 + z_3)) =$$

$$= (x_1, x_2, x_3) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3) =$$

$$= (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3)) = x + (y + z)$$

(3) *Komutativnost*
Dokažimo da za proizvoljne vektore $x, y \in R^3$ važi $x + y = y + x$.

Neka je $x = (x_1, x_2, x_3)$ i $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Zbog komutativnosti sabiranja u polju $(R, +, \cdot)$ važi:

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) =$$

$$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) = (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3) = y + x$$

(4) *Egzistencija neutralnog elementa*

$\mathbf{0} = (0, 0, 0) \in R^3$ je neutralni element za sabiranje.

Dokažimo da za svako $x \in R^3$ važi $x+\mathbf{0}=\mathbf{0}+x=x$. Neka je $x=(x_1,x_2,x_3)$, tada je:

$$x+\mathbf{0}=(x_1,x_2,x_3)+(0,0,0)=(x_1+0,x_2+0,x_3+0)=(x_1,x_2,x_3)=x,$$

jer je 0 neutral za sabiranje u R.

(5) *Egzistencija inverznih elemenata*
Dokažimo da za svako $x \in R^3$ postoji $y \in R^3$ tako da važi $x+y=y+x=\mathbf{0}$.

Neka je $x=(x_1,x_2,x_3)$ i $y=(y_1,y_2,y_3)$. Tada iz

$$x+y=(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)=(0,0,0)$$

sledi $x_1+y_1=0$, $x_2+y_2=0$, $x_3+y_3=0$, pa je $y_1=-x_1$, $y_2=-x_2$ i $z_3=-x_3$, gde su $-x_1.-x_2,-x_3 \in R$ odgovarajući inverzni (suprotni) elementi elementima $x_1,x_2,x_3 \in R$.

Dakle,

$$y=(-x_1,-x_2,-x_3) \in R^3$$

je inverzni element elementu $x=(x_1,x_2,x_3)$ u odnosu na sabiranje vektora.

Sada iz (1), (2), (3), (4) i (5) sledi da je $(R^3,+)$ Abelova grupa.

Dokažimo sada ostale osobine vezane za množenje vektora skalarom.

(1) Dokažimo prvo da $(\forall \alpha \in R)\,(\forall x,y \in R^3)\ \alpha \cdot (x+y)=\alpha \cdot x+\alpha \cdot y$.

Neka je $x=(x_1,x_2,x_3)$ i $y=(y_1,y_2,y_3)$.

Tada iz distributivnosti koja važi u polju $(R,+,\cdot)$ sledi:

$$\alpha\,(x+y)=\alpha\,((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3))=\alpha\,(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)=$$

$$=(\alpha\,(x_1+y_1),\alpha\,(x_2+y_2),\alpha\,(x_3+y_3))=(\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2,\alpha x_3+\alpha y_3)=$$

$$=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)+(\alpha y_1,\alpha y_2,\alpha y_3)=\alpha\,(x_1,x_2,x_3)+\alpha\,(y_1,y_2,y_3)=\alpha x+\alpha y.$$

(2) Dokažimo sada da $(\forall \alpha,\beta \in R)\,(\forall x \in R^3)\ (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha \cdot x+\beta \cdot x$.

$$(\alpha+\beta)\,x=(\alpha+\beta)\,(x_1,x_2,x_3)=((\alpha+\beta)\,x_1,(\alpha+\beta)\,x_2,(\alpha+\beta)\,x_3)=$$
$$=(\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2,\alpha x_3+\beta x_3)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)+(\beta x_1,\beta x_2,\beta x_3)=$$
$$=\alpha\,(x_1,x_2,x_3)+\beta\,(x_1,x_2,x_3)=\alpha x+\beta x$$

(4) Dokažimo sada da je $(\forall\alpha,\beta\in R)\,(\forall x\in R^3)\ (\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$.

Zbog asocijativnosti množenja u $(R,+,\cdot)$ imamo:

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot x=(\alpha\cdot\beta)\cdot(x_1,x_2,x_3)=((\alpha\cdot\beta)\cdot x_1,(\alpha\cdot\beta)\cdot x_2,(\alpha\cdot\beta)\cdot x_3)=$$
$$=(\alpha\cdot(\beta\cdot x_1),\alpha\cdot(\beta\cdot x_2),\alpha\cdot(\beta\cdot x_3))=\alpha\cdot(\beta x_1,\beta x_2,\beta x_3)=$$
$$=\alpha\cdot(\beta\cdot(x_1,x_2,x_3))=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$$

(5) Sada dokažimo da $(\forall x\in R^3)\ 1\cdot x=x$.

$$1\cdot x=1\cdot(x_1,x_2,x_3)=(1\cdot x_1,1\cdot x_2,1\cdot x_3)=x.$$

Dakle, $\mathbf{R}^3=(R^3,\mathbf{R})$ je vektorski prostor.

Primer 1.4. *Neka je dat skup* $R^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\,|x_1,x_2,...,x_n\in R\}$, *čije ćemo elemente nazivati vektorima. U tom skupu definišimo operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom na sledeći način:*

$$x+y=(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n),$$
$$\alpha\cdot x=\alpha\,(x_1,x_2,...,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n),$$

za proizvoljne vektore $x,y\in R^n$ *i skalar* $\alpha\in R$. *Algebarska struktura* $\mathbf{R}^n=(R^n,\mathbf{R})$ *sa ovako uvedenim operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom je vektorski prostor.*

Dokaz je analogan dokazu u prvom primeru.

Primer 1.5. *Neka je* $\mathbf{F}=(F,+,\cdot)$ *proizvoljno polje i neka je dat skup*

$$F^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\,|x_1,x_2,...,x_n\in F\},$$

Scanned with CamScanner

čije ćemo elemente nazivati vektorima. U tom skupu definišimo operacije sabiranja vektora i množenja vektora skalarom na sledeći način:

$$x + y = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot x = \alpha (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),$$

za proizvoljne vektore $x, y \in F^n$ i skalar $\alpha \in F$.

Algebarska struktura $\mathbf{F}^n = (F^n, \mathbf{F})$ sa ovako uvedenim operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom je vektorski prostor.

Dokaz je analogan dokazu u prvom primeru.

Primer 1.6. *Neka je dat skup matrica dimenzija $m \times n$ nad poljem $\mathbf{F}$:*

$$F^{m\times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} | a_{ij} \in F, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n \right\}.$$

Elemente ovog skupa nazivamo vektorima. Definišimo u ovom skupu sabiranje vektora i množenje vektora skalarom.

$$\mathsf{A} + \mathsf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \cdot \mathsf{A} = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Slično kao u prethodnom, lako se pokazuje da je struktura

$$\mathbf{F}^{m\times n} = \left(F^{m\times n}, \mathbf{F}\right),$$

sa ovako uvedenim operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom, vektorski prostor. Primetimo da je nula-vektor matrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

dimenzija $m \times n$.

Primer 1.7. *Neka je dat skup svih realnih polinoma stepena manjeg ili jednakog n $(n \in N)$. Elementi tog skupa su vektori.*

$$P_n = \left\{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \,|a_0, a_1, \dots, a_n \in R\right\}.$$

Definišimo sabiranje vektora i množenje vektora skalarom. Neka su

$$Q_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \ i$$
$$Q_2(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

dva proizvoljna polinoma iz ovog skupa i $c \in R$ proizvoljan skalar.

$$Q_1(x) + Q_2(x) =$$

$$= \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right) + \left(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0\right) =$$

$$= (a_n + b_n)\, x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})\, x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)\, x + (a_0 + b_0)$$

$$c \cdot Q_1(x) = c \cdot \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\right) =$$

$$= (c \cdot a_n)\, x^n + (c \cdot a_{n-1})\, x^{n-1} + \dots + (c \cdot a_1)\, x + c \cdot a_0$$

Lako se dokazuje da je $\mathbf{P}_n = (P_n, \mathbf{R})$ *vektorski prostor. Primetna je jasna analogija sa prostorom* $\mathbf{R}^{n+1}$*, koji možemo predstaviti kao*

$$R^{n+1} = \{(a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0) \, | a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in R\}.$$

Primer 1.8. *Neka je* D *neprazan skup i* $\mathbf{F} = (F, +, \cdot)$ *proizvoljno polje. Neka je* F^D *skup svih funkcija koje slikaju skup* D *u skup* F*. Ovaj skup sa operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom je vektorski prostor nad poljem* $\mathbf{F}$*. Navedene operacije definišu se na sledeći način:*

$$(\forall x \in D) \, (f + g) \, (x) = f \, (x) + g \, (x),$$
$$(\forall x \in D) \, (c \cdot f) \, (x) = c \cdot f \, (x),$$

gde su f *i* g *proizvoljne funkcije iz* F^D*, a* $c \in R$ *proizvoljan skalar.*

Primer 1.9. *Skup svih realnih neprekidnih funkcija na intervalu* $[a, b]$*, u oznaci* $C\,[a, b]$*, čini vektorski prostor nad poljem* $\mathbf{R}$*, sa operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom definisanim na sledeći način:*

$$(\forall f, g \in C\,[a, b]) \, (\forall x \in [a, b]) \, (f + g) \, (x) = f \, (x) + g \, (x),$$
$$(\forall f \in C\,[a, b]) \, (\forall c \in R) \, (\forall x \in [a, b]) \, (c \cdot f) \, (x) = c \cdot f \, (x).$$

Ako su f *i* g *neprekidne funkcije na intervalu* $[a, b]$*, onda su i funkcije* $f + g$ *i* $c \cdot f$ *(*$c \in R$*) takođe neprekidne na* $[a, b]$*. .*

Primer 1.10. *Skup svih realnih nizova* $\{a_n\}_{n \in N}$*, u oznaci* l_p*, za koje važi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < \infty$*, sa operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom definisanih na sledeći način:* $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$*,* $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$ *čini vektorski prostor nad poljem* $\mathbf{R}$*.*

Primer 1.11. *Skup svih realnih integrabilnih funkcija definisanih na intervalu* $[a, b]$ *, u oznaci* $L_p\,[a, b]$*, za koje važi*

$$\int\limits_a^b |f\,(x)|^p dx < +\infty,$$

sa operacijama sabiranja vektora i množenja vektora skalarom definisanih na sledeći način:

$$(\forall f, g \in L_p\,[a, b]) \, (\forall x \in [a, b]) \, (f + g) \, (x) = f \, (x) + g \, (x),$$
$$(\forall f \in L_p\,[a, b]) \, (\forall c \in R) \, (\forall x \in [a, b]) \, (c \cdot f) \, (x) = c \cdot f \, (x).$$

čini vektorski prostor nad poljem $\mathbf{R}$*.*

1.2 Potprostori vektorskih prostora

Definicija 1.12. *Neka je dat vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$. *Neka je* U *neprazan podskup skupa* V. *Ako je* $\mathbf{U} = (U, \mathbf{F})$ *vektorski prostor u odnosu na operacije nasleđene iz* $\mathbf{V}$, *kažemo da je* $\mathbf{U}$ *vektorski potprostor vektorskog prostora* $\mathbf{V}$. *Ako je* $U \neq \{0\}$ *i* $U \neq V$, *kažemo da je potprostor pravi.*

Teorema 1.13. $\mathbf{U} = (U, \mathbf{F})$ *je potprostor vektorskog prostora* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$, *gde je* U *neprazan podskup skupa* V, *ako i samo ako važe uslovi:*

(1) $(\forall x, y \in U)\, x + y \in U$

(2) $(\forall x \in U)\, (\forall \alpha \in F)\, \alpha x \in U$.

Dokaz. Ako je $\mathbf{U}$ potprostor vektorskog prostora $\mathbf{V}$, onda je očigledno da važe uslovi 1) i 2). Sada pretpostavimo da važe uslovi 1) i 2), tj.

$$(\forall x, y \in U)\, x + y \in U \text{ i } (\forall x \in U)\, (\forall \alpha \in F)\, \alpha x \in U.$$

Pokažimo sada da je $\mathbf{U} = (U, \mathbf{F})$ vektorski prostor.

Dokažimo prvo da je $(U, +)$ Abelova grupa. Zatvorenost važi zbog uslova 1). Asocijativnost i komutativnost važe na nadskupu V, pa važe i na U. Po uslovu 2) $0 \cdot x \in U$, tj. neutralni element za sabiranje pripada skupu U, tj. $0 \in U$. Slično, $(-1) \cdot x \in U$, odnosno $-x \in U$, pa, zaista, suprotni vektor svakog vektora iz U takođe pripada U. Dakle, $(U, +)$ jeste Abelova grupa.

Osobine 2), 3), 4) i 5) iz definicije vektorskog prostora važe na skupu V, pa, samim tim, važe i na njegovom podskupu U. Na ovaj način dokazano je da je $\mathbf{U} = (U, \mathbf{F})$ vektorski prostor, a kako je $U \subseteq V$, zaključujemo da je $\mathbf{U}$ potrostor prostora $\mathbf{V}$. $\square$

Napomena 1.14. *Uslovi 1) i 2) iz prethodne teoreme ekvivalentni su uslovu*

$$(\forall x, y \in U)\, (\forall \alpha, \beta \in F)\, \alpha x + \beta y \in U.$$

Teorema 1.15. $\mathbf{U} = (U, \mathbf{F})$ *je potprostor vektorskog prostora* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$, *gde je* U *neprazan podskup skupa* V, *ako i samo ako važi:*

$$(\forall x, y \in U)\,(\forall \alpha, \beta \in F)\, \alpha x + \beta y \in U.$$

Napomena 1.16. *Ova teorema se najčešće koristi u dokazivanju da je neka struktura potprostor datog vektorskog prostora. Takođe, može se koristiti i da se na jednostavniji način pokaže da je neka struktura vektorski prostor, dokazivanjem da je potprostor nekog poznatog vektorskog prostora.*

Primer 1.17. *Posmatrajmo vektorski prostor* $\mathbf{M}_3$ *realnih kvadratnih matrica reda* 3. *Neka je* U *podskup skupa realnih kvadratnih matrica reda* 3 *definisan sa*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}.$$

U je neprazan podskup skupa M_3.

Pokažimo da $(\forall x, y \in U)\,(\forall \alpha, \beta \in R)\, \alpha x + \beta y \in U$.

Rešenje.

$$\alpha x + \beta y = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_2 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha c_1 + \beta b_2 \\ \alpha a_1 + \beta a_2 & \alpha b_1 + \beta b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in U,$$

jer $\alpha a_1 + \beta a_2 \in R$, $\alpha b_1 + \beta b_2 \in R$ i $\alpha c_1 + \beta c_2 \in R$ zbog osobina polja.

Dakle, $(U, \mathbf{R})$ je vektorski potprostor prostora $\mathbf{M}_3$ realnih kvadratnih matrica reda 3.

Napomena 1.18. *Da je zadatak bio da se dokaže da je*

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in R \right\}$$

sa odgovarajućim operacijama, vektorski prostor, moglo se upravo ovako dokazivati, tj. da je potprostor poznatog vektorskog prostora $\mathbf{M}_3$.

Primer 1.19. *Na sličan način kao u prethodnom primeru može se dokazati da trougaone matrice (gornje ili donje), dijagonalne matrice (sve nad datim poljem* $\mathbf{F}$ *i dimenzija* $n \times n$*) obrazuju potprostore vektorskog prostora svih kvadratnih matrica reda* n *nad poljem* $\mathbf{F}$ *(uz odgovarajuće operacije sabiranja matrica i množenja matrica elementima polja* $\mathbf{F}$*).*

Primer 1.20. *Neka je dat homogen sistem linearnih jednačina sa* m *jednačina i* n *nepoznatih:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Napišimo taj sistem u matričnom obliku: $AX = \mathbf{0}$, *gde je*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathsf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathsf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Označimo sa $V \subset F^n$ *skup rešenja ovog sistema. Ovaj skup je neprazan, jer homogen sistem uvek ima bar trivijalno rešenje, tj.* $\mathsf{0} \in V$.

Dokažimo da je $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *potprostor prostora* $(F^n, \mathbf{F})$.

Rešenje. Neka su X i Y dva proizvoljna rešenja ovog sistema i neka su α i β dva proivoljna skalara iz datog polja. Dokažimo da $\alpha\mathsf{X} + \beta\mathsf{Y}$ pripada skupu rešenja V, tj. dokažimo da važi $\mathsf{A} \cdot (\alpha X + \beta Y) = \mathbf{0}$. Kako su X i Y rešenja ovog sistema, važi $\mathsf{A}\mathsf{X} = 0$ i $\mathsf{A}\mathsf{Y} = 0$. Na osnovu poznatih osobina koje važe za množenje matrica i množenje matrica skalarom imamo:

$$\mathsf{A}(\alpha\mathsf{X} + \beta\mathsf{Y}) = \mathsf{A}\cdot(\alpha\mathsf{X}) + \mathsf{A}\cdot(\beta\mathsf{Y}) = \alpha\mathsf{A}\mathsf{X} + \beta\mathsf{A}\mathsf{Y} = \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 0 = 0,$$

tj. $\alpha\mathsf{X} + \beta\mathsf{Y}$ je takođe rešenje ovog sistema. Na osnovu Teoreme 1.15. zaključujemo da je zaista $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ potprostor prostora $\mathbf{F}^n = (F^n, \mathbf{F})$. Ovim smo dokazali i da je prostor rešenja homogenog sistema linearnih jednačina vektorski prostor nad datim poljem. (Pogledati poglavlje o sistemima linearnih jednačina.)

Napomena. Rešenja nehomogenog sistema linearnih jednačina nad poljem $\mathbf{F}$ ne obrazuju vektorski prostor.

Primer 1.21. *Posmatrajmo vektorski prostor* $\mathbf{V}$ *svih realnih funkcija,* $V = R^R$.

Skup svih parnih funkcija

$$U_p = \left\{ f \in R^R \,|\, (\forall x \in R)\, f(-x) = f(x) \right\}$$

u odnosu na nasleđene osobine sabiranja i množenja funkcija realnim brojevima, obrazuje potprostor vektorskog prostora $\mathbf{V}$.

Rešenje. Dokažimo da važi

$$(\forall f, g \in U_n)\,(\forall \alpha, \beta \in R)\, \alpha f + \beta g \in U_n.$$

Zaista, za svako $x \in R$ važi:

$$(\alpha f + \beta g)(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = (\alpha f + \beta g)(x),$$

tj.

$$\alpha f + \beta g \in U_p.$$

Slično se može pokazati i za skup neparnih funkcija

$$U_n = \left\{ f \in R^R \,|\, (\forall x \in R)\, f(-x) = -f(x) \right\}.$$

1.3 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

Definicija 1.22. *Neka je dat vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$. *Izraz*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n,$$

gde su $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ *i* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$ *naziva se linearna kombinacija vektora* $x_1, x_2, ..., x_n$.

Definicija 1.23. *Neka je dat vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$. *Za vektore* $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ *kažemo da su linearno zavisni ako postoje skalari* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$, *od kojih je bar jedan različit od nule, tako da važi*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0.$$

Vektori koji nisu linearno zavisni nazivaju se linearno nezavisnim.

Dakle, vektori $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ su linearno nezavisni ako i samo ako, za proizvoljne skalare $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$,

$$\text{iz } \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0 \text{ sledi } \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Kaže se da je *skup vektora linearno zavisan* ili *nezavisan* ako su vektori iz tog skupa linearno zavisni ili nezavisni.

Teorema 1.24. *U vektorskom prostoru* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *važe sledeća tvđenja:*

(1) Ako je neki od vektora $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ *nula vektor, skup vektora je linearno zavisan.*

(2) Ako su neki od vektora $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ *međusobno jednaki, skup vektora je linearno zavisan.*

(3) Ako je skup vektora $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ *linearno nezavisan, onda je i svaki njegov podskup, takođe linearno nezavisan.*

(4) Ako je skup vektora $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ *linearno zavisan, onda je i svaki njegov nadskup takođe linearno zavisan.*

(5) Ako je skup vektora $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ linearno nezavisan, i ako su $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$ i $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in F$ takvi da važi

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n,$$

tada je $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$.

(6) Skup vektora je linearno zavisan ako i samo ako je neki od vektora linearna kombinacija ostalih.

Dokaz. (1) Neka je, na primer, $x_1 = 0$. Tada za

$$\alpha_1 = 1 \text{ i } \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$$

važi

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0,$$

tj. vektori $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ su linearno zavisni.

(2) Neka je, na primer, $x_1 = x_2$. Tada za

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1 \text{ i } \alpha_3 = \alpha_4 = ... = \alpha_n = 0$$

važi

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0,$$

tj. vektori $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ su linearno zavisni.

(3) Neka je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = 0$, $m < n$. Tada je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m + 0 \cdot x_{m+1} + 0 \cdot x_{m+2} + ... + 0 \cdot x_n = 0.$$

Kako su vektori $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ linearno nezavisni, sledi da je

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0,$$

tj. vektori $x_1, x_2, ..., x_m$ su takođe linearno nezavisni.

(4) Vektori $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ su linearno zavisni, pa postoje skalari

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F,$$

od kojih je bar neki različit od nule, takvi da je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0.$$

Posmatrajmo sad linearnu kombinaciju vektora

$$x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m \in V.$$

Iz prethodne pretpostavke sledi da postoje skalari, koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + ... + 0 \cdot x_m = 0,$$

tj. vektori $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_m \in V$ su linearno zavisni.

(5) Neka je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n.$$

Odavde sledi da je

$$(\alpha_1 - \beta_1)\, x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\, x_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n)\, x_n = 0.$$

Kako su vektori $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ linearno nezavisni, sledi da je

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0,\ \alpha_2 - \beta_2 = 0, ...,\ \alpha_n - \beta_n = 0,$$

tj. $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, ...,$ $\alpha_n = \beta_n$.

(6) Neka su vektori $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ linearno zavisni.

Tada postoji $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tako da je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0$$

i $\alpha_i \neq 0$. Odatle sledi da se vektor x_i može napisati na sledeći način:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\alpha_1{}^{-1} \cdot \alpha_j\right) x_j,$$

tj. kao linearna kombinacija preostalih vektora.

Obrnuto, ako se neki vektor može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih, na primer,

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \beta_j x_j.$$

Tada je

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots \beta_{i-1} x_{i-1} + x_i + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n = 0,$$

tj. vektori $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ su linearno zavisni. □

Primer 1.25. *Dati su vektori u* $\mathbf{R}^3$*:* $x_1 = (1,0,5)$*,* $x_2 = (2,-1,2)$ *i* $x_3 = (0,3,0)$*. Ispitati njihovi linearnu zavisnost.*

Rešenje.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,0,5) + \alpha_2 (2,-1,2) + \alpha_3 (0,3,0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2, -\alpha_2 + 3\alpha_3, 5\alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0,0)$$

Ovo je ekvivalentno sistemu:

$$\begin{array}{cccl} \alpha_1 & +2\alpha_2 & & =0 \\ & -\alpha_2 & +3\alpha_3 & =0 \\ 5\alpha_1 & +2\alpha_2 & & =0 \end{array}$$

Lako se vidi da ovaj sistem ima samo trivijalno rešenje, tj. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, pa su vektori x_1, x_2i x_3 linearno nezavisni.

Primer 1.26. *U vektorskom prostoru realnih matrica dimenzije* 2×3 *dati su vektori*

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \; i \; x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ispitati njihovi linearnu zavisnost.

Rešenje.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 & 3\alpha_2 + 3\alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovo je ekvivalentno sistemu:

$$\begin{array}{rrrl} \alpha_1 & -\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_1 & -\alpha_2 & +3\alpha_3 & = 0 \\ & 3\alpha_3 & +3\alpha_3 & = 0 \end{array}$$

Rešenje ovog sistema je

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-2t, -t, t),\ t \in R.$$

Dakle, vektori x_1, x_2 i x_3 su linearno zavisni.

Na primer, za $t = -1$, dobijamo $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$, ili $x_3 = 2x_1 + x_2$, tj. svaki od vektora se može izraziti kao linearna kombinacija preostala dva.

1.4 Linearni omotač (lineal)

Definicija 1.27. *Neka je dat vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *i neka je* $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. *Skup svih linearnih kombinacija vektora iz* U

$$L(U) = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \,|x_1, ..., x_n \in U, \alpha_1, ..., \alpha_n \in F, n \in N\},$$

naziva se linearni omotač ili lineal skupa U. *Kažemo da skup vektora* U *generiše ili razapinje* $L(U)$. *Ako je* $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, *umesto* $L(U)$ *možemo koristiti oznaku* $L(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definicija 1.28. *Neka je dat vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *i neka je* $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. *Ako se svaki vektor iz skupa* $V_1 \subset V$ *može izraziti kao linearna kombinacija vektora iz skupa* U, *kažemo da je skup* U *generatorski skup za skup* V_1. *Dakle,* U *je generatorski skup za* $L(U)$.

Teorema 1.29. *Neka je dat vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *i neka je* $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. $\mathbf{L(U)} = (L(U), \mathbf{F})$ *je potprostor vektorskog prostora* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$.

Dokaz. Dokazaćemo da za proizvoljne vektore $x, y \in L(U)$ i proizvoljne skalare $\alpha, \beta \in F$ važi $\alpha x + \beta y \in L(U)$. Ako je $x, y \in L(U)$, onda važi

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \text{ i } y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_m x_m,$$

gde su $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in U$ (ovi vektori ne moraju biti svi međusobno različiti). Sada imamo da je $\alpha x + \beta y \in L(U)$, jer je

$$\alpha x + \beta y = (\alpha\alpha_1) x_1 + (\alpha\alpha_2) x_2 + ... + (\alpha\alpha_n) x_n + (\beta\beta_1) y_1 + ... + (\beta\beta_m) y_m,$$

tj. $\alpha x + \beta y$ je linearna kombinacija vektora iz skupa U. Po Teoremi 1.15. dokazali smo da je $(L(U), \mathbf{F})$ potprostor vektorskog prostora $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$. $\square$

Teorema 1.30. *Neka je dat vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *i neka je* $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *linearno nezavisan skup vektora u* V, *tada za skup vektora* $W = \{y_1, ..., y_n, y_{n+1}\}$, $y_1, y_2, ..., y_n, y_{n+1} \in L(U)$ *važi da je linearno zavisan.*

(Dokazuje se indukcijom.)

Primer 1.31. *Posmatrajmo vektorski prostor kvadratnih matrica reda 2 nad poljem* $\mathbf{R}$. *Dati su vektori (matrice)*

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ispitati da li matrice $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *i* $\mathsf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ *pripadaju linearnom omotaču nad vektorima* A, B *i* C, *tj. da li* $\mathsf{M}, \mathsf{N} \in L(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C})$.

Rešenje. Formirajmo linearnu kombinaciju vektora A, B i C i rešimo odgovarajući sistem linearnih jednačina.

$$\mathsf{M} = \alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B} + \gamma\mathsf{C} \Leftrightarrow \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobijamo sistem: $\alpha = 2$, $\gamma = 1$, $-\alpha + \beta + 2\gamma = 0$. Rešenje ovog sistema je: $\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = 1$, pa imamo da je $\mathsf{M} = 2\mathsf{A} + \mathsf{C}$, tj. M je linearna kombinacija vektora A, B i C, pa sledi da $\mathsf{M} \in L(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C})$.

$$\mathsf{N} = \alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B} + \gamma\mathsf{C} \Leftrightarrow \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odgovarajući sistem je $\alpha = 1$, $\gamma = 5$, $0 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = 3$, $-\alpha + \beta + 2\gamma = 0$. Ovaj sistem je očigledno protivrečan, pa vektor N nije linearna kombinacija vektora A, B i C, pa sledi da $\mathsf{N} \notin L(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C})$.

Primer 1.32. *Posmatrajmo vektorski prostor* $\mathbf{R}^4 = (R^4, \mathbf{R})$ *i u njemu vektore* $x = (1, 0, 1, 2)$, $y = (2, 1, 0, 0)$, $z = (8, 3, 2, 4)$, $u = (1, 1, -1, -2)$ *i* $v = (1, -1, 3, 6)$.

Rešenje. Dokazaćemo da je linearni omotač nad vektorima x, y i z isto što i linearni omotač nad vektorima u i v. Dovoljno je dokazati da $x, y, z \in L(u, v)$ i $u, v \in L(x, y, z)$.

Dakle, treba dokazati da se vektori x, y, z mogu prikazati kao linearne kombinacije vektora u i v, i da se vektori u i v mogu prikazati kao linearne kombinacije vektora x, y, z.

Odredimo prvo skalare $\alpha, \beta \in R$ takve da je $x = \alpha u + \beta v$.

$$x = \alpha u + \beta v \Leftrightarrow \alpha (1, 1, -1, -2) + \beta (1, -1, 3, 6) = (1, 0, 1, 2).$$

Ovo je ekvivalentno sistemu

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + 3\beta = 1 \\ -2\alpha + 6\beta = 2 \end{cases}$$

Lako se dobija da je rešenje $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Dakle, $x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$, odnosno $x \in L(u, v)$.

Sistem se slično postavlja i za ostale vektore.

Na primer iz

$$y = \alpha u + \beta v \Leftrightarrow \alpha (1, 1, -1, -2) + \beta (1, -1, 3, 6) = (2, 1, 0, 0)$$

dobijamo sistem:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + 3\beta = 0 \\ -2\alpha + 6\beta = 0 \end{cases},$$

čije je rešenje $\alpha = \frac{3}{2}$ i $\beta = \frac{1}{2}$.

Slično se i za z dobija $z = \frac{11}{2}u + \frac{5}{2}v$.

Sa druge strane dobijamo $v = y - x$ i $v = 3x - y$.

Iz svega prethodnog sledi zaključak da je $L(x, y, z) = L(u, v)$.

Primetimo da su vektori x, y i z linearno zavisni ($z = 2x + 3y$), pa je prostor $L(x, y, z)$ dvodimenzionalan.

(O dimenziji vektorskog prostora biće reči u sledećem delu.)

1.5 Baza i dimenzija vektorskog prostora

Baza vektorskog prostora

Definicija 1.33. *Neka je dat vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *i neka je* $B \subset V$ *skup linearno nezavisnih vektora. Ako je* $V = L(B)$, *kažemo da je* B *baza vektorskog prostora* $\mathbf{V}$.

Drugim rečima, linearno nezavisan skup vektora koji generiše ceo skup V naziva se baza prostora $\mathbf{V}$.

Teorema 1.34. *Baza* B *vektorskog prostora* $\mathbf{V}$ *je minimalan generatorski skup prostora* $\mathbf{V}$, *tj. nijedan njegov pravi podskup ne generiše* $\mathbf{V}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoji skup B_1, pravi podskup skupa B, takav da je $L(B_1) = V$. Za vektor $b \in B \backslash B_1$ važi da se može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz B_1, a to znači da bi skup $B_1 \cup \{b\}$ bio linearno zavisan, samim tim i skup B, što je suprotno pretpostavci. Dakle, nijedan pravi podskup baze B vektorskog prostora $\mathbf{V}$ ne generiše ceo prostor. □

Teorema 1.35. *Svaki pravi nadskup baze* B *vektorskog prostora* $\mathbf{V}$ *je linearno zavisan skup.*

Dokaz. Neka je B_1 pravi nadskup skupa B, tj. $B \subseteq B_1 \subseteq V$ i neka je b_1 proizvoljan vektor iz skupa B_1 koji ne pripada B, $b_1 \in B_1 \backslash B$. Za vektor b_1 važi da se može predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze B (jer to važi za svaki vektor iz V), a to znači da je skup B_1 linearno zavisan skup. □

Teorema 1.36. *Ako vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *ima jednu* n*-točlanu bazu* $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, *tada se i svaka druga baza ovog prostora sastoji od tačno* n *vektora.*

Dokaz. Posmatrajmo skup $W = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$.

(1) Neka je $m > n$. Kako je $L(B) = V$, na osnovu Teoreme 1.30. sledi da je skup $\{y_1, y_2, ..., y_{n+1}\}$ linearno zavisan, pa samim tim i skup W. Dakle, W ne može biti baza.

(2) Neka je $m < n$ i neka je $W = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ baza prostora $\mathbf{V}$. Tada bi skup $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bio linearno zavisan, što je suprotno pretpostavci. □

Primer 1.37. *U vektorskom prostoru* $\mathbf{R}^3 = (R^3, R)$ *(standardna) baza je*

$$B = \{e_1, e_2, e_3\}, \text{ gde je } e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0) \text{ i } e_3 = (0,0,1).$$

Rešenje. Proverimo prvo da li su dati vektori linearno nezavisni. Formirajmo njihovu linearnu kombinaciju i rešimo odgovarajući sistem linearnih jednačina.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,0) + \alpha_3 (0,0,1) = (0,0,0)$$

Direktno se vidi da mora biti $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ i $\alpha_3 = 0$, tj. vektori e_1, e_2, e_3 su linearno zavisni. Pokažimo sada da oni generišu ceo prostor $\mathbf{R}^3$, tj. pokažimo da se svaki vektor iz tog prostora može predstaviti kao linearna kombinacija vektora e_1, e_2, e_3.

Zaista, neka je $v = (v_1, v_2, v_3)$ proizvoljan vektor iz R^3, tada je

$$v = v_1 (1,0,0) + v_2 (0,1,0) + v_3 (0,0,1),$$

tj. $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$.

Dakle, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ je baza prostora $\mathbf{R}^3$.

Primer 1.38. *U vektorskom prostoru* $\mathbf{R}^n = (R^n, R)$ *standardna baza je* $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, *gde su vektori* $e_1, e_2, ..., e_n$ *dati sa:*

$$e_1 = (1,0,0,...,0),\ e_2 = (0,1,0,...,0), ...,\ e_n = (0,0,...,,0,1).$$

Rešenje. Dokazuje se slično kao u slučaju $n = 3$.

Napomena 1.39. *Istu standardnu bazu ima i prostor* $\mathbf{F}^n = (F^n, \mathbf{F})$, *gde je* $\mathbf{F}$ *proizvoljno polje.*

Primer 1.40. *U vektorskom prostoru realnih matrica dimenzija* 2×3, $\mathbf{R}^{2\times3} = (R^{2\times3}, R)$, *standardna baza je* $B = \{\mathsf{E}_{11}, \mathsf{E}_{12}, \mathsf{E}_{13}, \mathsf{E}_{21}, \mathsf{E}_{22}, \mathsf{E}_{23}\}$, *gde su vektori dati sa:*

$$\mathsf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathsf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathsf{E}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathsf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ i\ \mathsf{E}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Lako se vidi da su ovi vektori linearni nezavisni. Takođe, ovi vektori generišu (razapinju) ceo prostor, jer se proizvoljan vektor može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz skupa B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = a_{11}\mathsf{E}_{11} + a_{12}\mathsf{E}_{12} + a_{13}\mathsf{E}_{13} + a_{21}\mathsf{E}_{21} + a_{22}\mathsf{E}_{22} + a_{23}\mathsf{E}_{23}.$$

Primer 1.41. *Standardna baza prostora matrica* $\mathbf{F}^{m\times n} = (F^{m\times n}, \mathbf{F})$ *je*

$$B = \{\mathsf{E}_{ij}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}},$$

gde su vektori E_{ij} *matrice date dimenzije u kojima su na svim mestima nule osim na mestu* ij.

Primer 1.42. *Standardna baza prostora polinoma stepena ne većeg od* n *je* $B = \{x^n, x^{n-1}, ..., x^2, x, 1\}$.

Rešenje. Lako se vidi da su ovi vektori linearno nezavisni i očigledno je svaki polinom stepena manjeg ili jednakog n jednak linearnoj kombinaciji ovih vektora, tj. skup vektora B generiše ceo prostor. Primetimo da je broj elemenata u bazi ovog prostora jednak $n+1$, što je dimenzija ovog prostora. O pojmu dimenzije biće reči u sledećem delu.

Primer 1.43. *Pokažimo sada da vektorski prostor može imati i neku drugu bazu osim standardne. Posmatrajmo prostor* $\mathbf{R}^2 = (R^2, \mathbf{R})$. *Pokažimo da je* $B = \{b_1, b_2\}$, *gde je* $b_1 = (1,5)$ *i* $b_2 = (-1,2)$ *jedna baza ovog prostora.*

Rešenje. Proverimo prvo linearnu nezavisnost vektora.

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 (1,5) + \alpha_2 (-1,2) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 - \alpha_2, 5\alpha_1 + 2\alpha_2) = (0,0)$$

Dobijamo homogen sistem

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 5\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases},$$

za koji se lako vidi da ima samo trivijalno rešenje:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

pa zaključujemo da su vektori b_1 i b_2 linearno nezavisni.

Pokažimo sada da ova dva vektora generišu ceo prostor $\mathbf{R}^2$, tj. da se svaki vektor $v = (v_1, v_2)$ tog prostora može predstaviti kao linearna kombinacija vektora b_1 i b_2.

$$v = (v_1, v_2) = \alpha_1 (1,5) + \alpha_2 (-1,2) = (\alpha_1 - \alpha_2, 5\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Sada rešavamo (po α_1 i α_2) sistem:

$$\begin{cases} v_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ v_2 = 5\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{cases}.$$

Dobija se:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tfrac{2}{7} v_1 + \tfrac{1}{7} v_2 \\ \alpha_2 &= -\tfrac{5}{7} v_1 + \tfrac{1}{7} v_2 \end{aligned}$$

(Na primer, za vektor $(1,1)$ važi $(1,1) = \frac{3}{7} b_1 - \frac{4}{7} b_2$.)

Ovim smo dokazali da je $B = \{b_1, b_2\}$ zaista baza prostora $\mathbf{R}^2$.

Dimenzija vektorskog prostora

Utvrdili smo da sve baze konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora imaju isti broj elemenata, pa ima smisla sledeća definicija.

Definicija 1.44. *Neka vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$, $V \neq \{0\}$, *ima bazu sa* n *elemenata. Tada kažemo da je vektorski prostor* $\mathbf{V}$ *n-dimenzionalan i pišemo* $\dim \mathbf{V} = n$. *Ako je* $V = \{0\}$, *kažemo da je* $\dim \mathbf{V} = 0$.

Teorema 1.45. *Ako je* $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *jedna baza n-dimenzionalanog vektorskog prostora* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$, *tada se svaki vektor* $v \in V$ *može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze, tj. postoje skalari* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$ *takvi da je*

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

Dokaz. Kako je $V = L(B)$, svaki vektor se može predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze, tj. postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in F$ takvi da je

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

Pretpostavimo sada da se vektor v može predstaviti i na drugi način kao linearna kombinacija vektora baze, tj. da postoje skalari $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in F$ takvi da je

$$v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n.$$

Sada imamo

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_n x_n,$$

odnosno $(\alpha_1 - \beta_1) x_1 + (\alpha_2 - \beta_2) x_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n) x_n = 0$.

Kako su vektori baze $x_1, x_2, ..., x_n$ linearno nezavisni, sledi da je

$$(\forall i \in \{1, 2, ..., n\})\, \alpha_i - \beta_i = 0, \text{ tj. } (\forall i \in \{1, 2, ..., n\})\, \alpha_i = \beta_i.$$

Dakle, svaki vektor $v \in V$ se može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija vektora baze. $\square$

Teorema 1.46. *Neka je dat n-dimenzionalni vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$. *Tada je svaki skup od* $n+1$ *vektora prostora* $\mathbf{V}$ *linearno zavisan.*

Dokaz. Neka je $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ jedna baza prostora $\mathbf{V}$. Tada je $V = L(U)$. Prema teoremi 1.30., svaki skup od $n+1$ vektora iz $\mathbf{V}$ je linearno zavisan. □

Posledica ovog tvđenja je da je u vektorskom prostoru $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ dimenzije n svaki skup od m vektora, $m > n$, linearno zavisan.

Teorema 1.47. *Neka je dat n-dimenzionalni vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$. *Tada je svaki linearno nezavisan skup od* n *vektora baza prostora* $\mathbf{V}$.

Dokaz. Neka je dat linearno nezavisan skup vektora $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ iz prostora $\mathbf{V}$.

Treba dokazati da U generiše V, tj. da važi $L(U) = V$. Svakako važi $L(U) \subset V$.

Dokažimo da ne može biti $L(U) \neq V$. Pretpostavimo da je $L(U) \neq V$. Tada postoji $y \in V \backslash L(U)$, tj. vektor y se ne može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz U, a to znači da je skup $U_1 = \{x_1, x_2, ..., x_n, y\}$ linearno nezavisan, što je nemoguće zbog prethodne teoreme.

Dakle, $L(U) = V$, U je linearno nezavisan skup, pa zaključujemo da je U baza prostora $\mathbf{V}$. □

Teorema 1.48. *Neka je dat n-dimenzionalni vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$. *Tada nijedan skup od* m *vektora* $(1 \leq m < n)$ *iz* $\mathbf{V}$ *ne generiše (ne razapinje)* $\mathbf{V}$.

Dokaz. Ako bi skup $U = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ generisao $\mathbf{V}$, to bi značilo da je $L(U) = V$, pa bi svaka $(m+1)$-torka vektora iz $\mathbf{V}$ bila linearno zavisna, a onda i svaka n-torka, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je prostor n-dimenzionalan. □

Teorema 1.49. *Neka je dat n-dimenzionalni vektorski prostor* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$. *Tada je svaki skup od* n *vektora iz* $\mathbf{V}$ *koji generiše (razapinje)* $\mathbf{V}$ *jedna baza* *prostora* **V**.

Dokaz. Neka je dat skup $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ koji generiše **V**, tj. važi $L(U) = V$. Treba dokazati da je skup U linearno nezavisan.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup U linearno zavisan.

Ako je $n = 1$, tada je $x_1 = 0$, pa je $V = \{0\}$, tj. $\dim V = 0$, što je kontradikcija.

Ako je $n > 1$, tada se jedan od vektora iz tog skupa, recimo x_1, može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih vektora iz skupa. Tada bi važilo $V = L(x_2, x_3, ..., x_n)$, pa bi dimenzija prostora **V** bila manja od n, što je kontradikcija.

Dakle, skup U je linearno nezavisan, generiše **V**, pa predstavlja bazu tog prostora. □

Teorema 1.50. *Neka je* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *n-dimenzionalni vektorski prostor. Neka je dat linearno nezavisan skup vektora* $U = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $m < n$. *Tada postoje vektori* $y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_n$ *takvi da je skup*

$$B = \{x_1, ..., x_m, y_{m+1}, ..., y_n\}$$

baza vektorskog prostora **V**.

Dokaz. Skup $U = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ generiše skup $L(U)$. Dakle, vektori iz $V \backslash L(U)$ nisu linearne kombinacije vektora iz U.

Neka je vektor y_{m+1} iz skupa $V \backslash L(U)$, tada je skup

$$U_1 = \{x_1, x_2, ..., x_m, y_{m+1}\}$$

linearno nezavisan. Uzmimo sada vektor y_{m+2} iz skupa $V \backslash L(U_1)$, tada je skup

$$U_2 = \{x_1, x_2, ..., x_m, y_{m+1}, y_{m+2}\}$$

linearno nezavisan.

Primenjujući isti postupak dolazimo do linearno nezavisnog skupa sa n elemenata $\{x_1, x_2, ..., x_m, y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_n\}$, pa je to jedna baza vektorskog prostora **V**.□

Primer 1.51. *Dimenzija prostora* $\mathbf{F}^n = (F^n, \mathbf{F})$ *je* n. *Posebno, dimenzija prostora* $\mathbf{R}^3 = (R^3, \mathbf{R})$ *je* 3.

Primer 1.52. *Dimenzija prostora polinoma stepena ne većeg od* n *nad poljem* $\mathbf{F}$ *je* $n+1$. *(Baza je* $B = \{x^n, x^{n-1}, ..., x^2, x, 1\}$.*)*

Primer 1.53. *Dimenzija prostora matrica dimenzija* $m \times n$ *nad poljem* $\mathbf{F}$ *je* $m \cdot n$.

Rešenje. Jednu bazu čine vektori E_{ij}, $(i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n)$, gde su E_{ij} matrice dimenzija $m \times n$ takve da su u njima na svakom mestu nule, osim na poziciji (i, j), gde se nalazi jedinica.

Primer 1.54. *Bilo koji skup od četiri ili više vektora u prostoru* $\mathbf{R}^3$ *je linearno zavisan. Na primer, vektori* $(1,2,3), (0,2,7), (9,2,0), (8,2,44)$ *iz* $\mathbf{R}^3$ *su linearno zavisni.*

Primer 1.55. *Neka su dati vektori* $x_1 = (0,1,2)$ *i* $x_2 = (1,0,3)$ *prostoru* $\mathbf{R}^3$. *Ova dva vektora su linearno nezavisna.*

Rešenje. Odredimo još jedan vektor x_3 tako da dobijemo bazu $B = \{x_1, x_2, x_3\}$. Linearni omotač nad datim vektorima je

$$L(\{x_1, x_2\}) = \{\alpha x_1 + \beta x_2 \,|\, \alpha, \beta \in R\},$$

tj.

$$L(\{x_1, x_2\}) = \{(\alpha, \beta, 2\alpha + 3\beta) \,|\, \alpha, \beta \in R\}.$$

Vektor $x_3 = (2, 3, 10)$ ne pripada $L(\{x_1, x_2\})$, pa su vektori x_1, x_2 i x_3 tri linearno nezavisna vektora u (trodimenzionalnom) prostoru $\mathbf{R}^3$, pa oni određuju jednu bazu tog prostora.

Primer 1.56. *Matrica je simetrična ako važi* $\mathsf{A} = \mathsf{A}^T$. *Pokažimo da je prostor simetričnih (kvadratnih) matrica reda 2 nad poljem* $\mathbf{F}$ *trodimenzionalan.*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{bmatrix} : a_1, a_2, b \in F \right\}.$$

Rešenje. Jednostavno se proverava da vektori

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

određuju jednu bazu ovog prostora (linearno su nezavisni i generišu ceo prostor), pa zaključujemo da je dimenzija prostora jednaka 3.

Naravno, lako možemo uočiti i opštiji rezultat. Dakle, ako je dat prostor svih simetričnih matrica reda n, njegova dimenzija je jednaka broju elemenata iznad dijagonale i na samoj dijagonali, što je ukupno jednako $\frac{n(n+1)}{2}$.

Koordinate vektora

Definicija 1.57. *Neka je* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *n-dimenzionalni vektorski prostor sa bazom* $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Neka je vektor* $v \in V$ *predstavljen kao linearna kombinacija vektora baze:* $v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$. *Tada skalare* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$ *nazivamo* <u>*koordinatama*</u> *vektora* v *u bazi* B.

Podrazumevamo da vektori baze čine uređenu n-torku, isto kao i skalari $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$ koji predstavljaju koordinate.

Koordinate vektora u datoj bazi se najčešće pišu kao uređena n-torka, ali se mogu pisati u vidu matrice vrste ili matrice kolone, na primer:

$$(\alpha_1, ..., \alpha_n), \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \end{bmatrix} \text{ ili } \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Teorema 1.58. *Neka je* $\mathbf{V} = (V, \mathbf{F})$ *n-dimenzionalni vektorski prostor sa bazom* $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. *Neka su dati vektori* $a, b \in V$ *svojim koordinatama* $\alpha_1, ..., \alpha_n \in F$ *i* $\beta_1, ..., \beta_n \in F$ *u datoj bazi. Tada su koordinate vektora* $a + b$ *u datoj bazi jednake*

$$\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n \in F,$$

a koordinate vektora $\alpha \cdot a$ *su*

$$\alpha \cdot \alpha_1, \alpha \cdot \alpha_2, ..., \alpha \cdot \alpha_n \in F.$$

Primer 1.59. *Posmatrajmo prostor* $\mathbf{R}^2$. *Jedna baza tog prostora je, recimo,* $B = \{b_1, b_2\}$, *gde je* $b_1 = (1, -1)$ *i* $b_2 = (2, 1)$. *(Prostor je dimenzije 2, pa je baza dvočlana, a* b_1 *i* b_2 *su, očigledno, linearno nezavisni.) Dat je vektor* v *svojim koordinatama u toj bazi:* $[\gamma_1, \gamma_2] = [-1, 1]$. *Odrediti koordinate tog vektora u standardnoj bazi* $\{e_1, e_2\}$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

Rešenje. $v = -1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 = -(1, -1) + (2, 1) = (1, 2) = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$

Koordinate vektora v u standardnoj bazi su $[1, 2]$.

Primer 1.60. *Posmatrajmo vektorski prostor realnih polinoma stepena manjeg ili jednakog 2. Odredimo koordinate vektora $v = 3x^2 + 2x - 5$ u bazi*

$$B = \left\{2x^2 + x, x^2 + 1, 2\right\}.$$

Rešenje. Očigledno, koordinate ovog vektora u standardnoj bazi $\{x^2, x, 1\}$ su

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Utvrdimo prvo da je B zaista baza. Kako je prostor trodimenzionalan, dovoljno je dokazati da su ova tri vektora linearno nezavisna. Formirajmo linearnu kombinaciju vektora baze i rešimo odgovarajući sistem.

$$a_1\left(2x^2 + x\right) + a_2\left(x^2 + 1\right) + a_3 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow (2a_1 + a_2)\, x^2 + a_1 x + a_2 + 2a_3 = 0,$$

što je ekvivalentno sistemu

$$2a_1 + a_2 = 0,\ a_1 = 0,\ a_2 + 2a_3 = 0.$$

Ovaj sistem, očigledno, ima samo trivijalno rešenje $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, pa zaključujemo da su vektori $b_1 = 2x^2 + x$, $b_2 = x^2 + 1$ i $b_3 = 2$ linearno nezavisni.

Dakle, B je zaista baza datog vektorskog prostora. Odredimo sada koordinate vektora v u ovoj bazi.

$$\alpha\left(2x^2 + x\right) + \beta\left(x^2 + 1\right) + \gamma \cdot 2 = 3x^3 + 2x - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + \beta)\, x^2 + \alpha x + \beta + 2\gamma = 3x^3 + 2x - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 3, \alpha = 2, \beta + 2\gamma = -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -2$$

Sada,

$$v = 2 \cdot \left(2x^2 + x\right) + (-1) \cdot \left(x^2 + 1\right) + (-2) \cdot 2,$$

tj.

$$v = 2 \cdot b_1 + (-1) \cdot b_2 + (-2) \cdot b_3,$$

odnosno koordinate vektora v u bazi B su $[2, -1, -2]$.