

## Neodređeni integral

### Osnovni metodi integracije:

- 1) Tablica neodređenih integrala
- 2) Teorema o linearnosti integrala
- 3) Metod smene promenjlive
- 4) Metod parcijalne integracije
- 5) Metod rekurentnih formula
- 6) Svođenje kvadratnog trinoma na kanonski oblik
- 7) Metod neodređenih koeficijenata

## Tablica neodređenih integrala

- 1)  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
- 2)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$
- 3)  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$
- 4)  $\int e^x dx = e^x + C$
- 5)  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C_1$
- 6)  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C_1 \quad (|x| < 1)$
- 7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C = \begin{cases} \operatorname{arsh} x + C & \text{za } x > 0 \\ \operatorname{arch} x + C & \text{za } x < 0 \end{cases}$
- 8)  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C = \begin{cases} \operatorname{arth} x + C, & \text{za } |x| < 1 \\ \operatorname{arcth} x + C, & \text{za } |x| > 1 \end{cases}$
- 9)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- 10)  $\int \cos x dx = \sin x + C$
- 11)  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
- 12)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
- 13)  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
- 14)  $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
- 15)  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
- 16)  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

Pogodnom smenom, na osnovu tabličnih integrala mogu se izvesti i sledeći integrali:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$5) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$6) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C$$

# Integracija nekih posebnih klasa funkcija

## I Integracija racionalnih funkcija

## II Integracija nekih iracionalnih funkcija

1. Integral  $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$  se rešava metodom neodređenih koeficijenata:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = Q_{n-1}(x) \cdot \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

( $P_n(x)$  je polinom  $n$ -tog stepena,  $Q_{n-1}(x)$  je polinom  $n-1$  stepena sa neodređenim koeficijentima, a  $\lambda$  je takođe neodređeni koeficijent)

Primer:  $\int x^2 \sqrt{x^2+4} dx$

2. U integrale koji sadrže izraze:  $\sqrt{a^2-x^2}$ ,  $\sqrt{x^2-a^2}$ ,  $\sqrt{a^2+x^2}$ , često je pogodno uvesti trigonometrijsku smenu:

- izraz  $\sqrt{a^2-x^2}$  se pojednostavljuje smenom  $x = a \sin t$ ;
- izraz  $\sqrt{a^2+x^2}$  se pojednostavljuje smenom  $x = a \operatorname{tg} t$ ;
- izraz  $\sqrt{x^2-a^2}$  se pojednostavljuje smenom  $x = \frac{a}{\cos t}$ .

Primeri: 1)  $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$     2)  $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$     3)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$

3. Integral  $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx$  svodi se na integral

racionalne funkcije smenom  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^{NZS}(q_1, q_2, \dots, q_k)$ .

Primeri: 1)  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ , 2)  $\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}} dx$ , 3)  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$  4)  $\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} dx$

## III Integracija trigonometrijskih funkcija

Integral oblika  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , gde je  $R(\sin x, \cos x)$  racionalna funkcija po  $\sin x$  i  $\cos x$ , svodi se na integral racionalne funkcije na sledeći način:

1) ako je  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$  uvodi se smena  $t = \operatorname{tg} x$ ,

$$\text{i tada je } dx = \frac{dt}{1+t^2}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

2) ako je  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  uvodi se smena  $t = \sin x$

$$\text{i tada je } \cos x = \sqrt{1-t^2}, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

3) ako je  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$  uvodi se smena  $t = \cos x$

$$\text{i tada je } \sin x = \sqrt{1-t^2}, dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

4) Smena  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , pri čemu je:  $x = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ , može se uvek primeniti, ali često dovodi do komplikovanih racionalnih funkcija.

Primeri:

1)  $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$     2)  $\int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sin^2 x + 1} dx$     3)  $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$     4)  $\int \frac{1}{2 \sin x + \cos x - 5} dx$