Linearne diferencijalne jednačine višeg reda

Ivana Jovović
ivana@etf.rs

Sadržaj

1 Homogene linearne diferencijalne jednačine **2**
1.1 Homogene linearne diferencijalne jednačine II reda 4

2 Nehomogene linearne diferencijalne jednačine **6**

3 Linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima **7**

4 Literatura **12**

Definicija 1. *Diferencijalnu jednačinu*

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = F(x),$$

*gde su funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n, F$ definisane i neprekidne na nekom intervalu (a,b), konačnom ili beskonačnom, nazivamo **linearnom diferencijalnom jednačinom n-tog reda**.*

Funkciju F nazivamo ***slobodnim članom*** date diferencijalne jednačine. Ako za slobodan član F važi da je $F \equiv 0$, odnosno ako je $(\forall x \in (a,b))\, F(x) = 0$, kažemo da je diferencijalna jednačina ***homogena***, u protivnom je ***nehomogena***. Svakoj nehomogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = F(x),$$

pridružujemo odgovarajuću homogenu jednačinu

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = 0.$$

Ako su koeficijenti $f_1, f_2, \ldots, f_n$ realne konstante, datu diferencijalnu jednačinu nazivamo ***linearnom diferencijalnom jednačinom n-tog reda sa konstantnim koeficijentima***.
Prvo ćemo se detaljnije baviti homogenim linearnim diferencijalnim jednačinama.

1 Homogene linearne diferencijalne jednačine

Homogena linerana diferencijalna jednačina uvek ima rešenje $y \equiv 0$, koje nazivamo ***trivijalnim rešenjem***.

Teorema 1. *Jedino rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda koje zadovoljava početne uslove $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$ za proizvoljno $x_0 \in (a,b)$ je trivijalno rešenje $y \equiv 0$.*

Teorema 2. *Ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda, onda je i $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ njeno rešenje, gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.*

Definicija 2. *Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda. Tada determinantu*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

*nazivamo **vronskijanom** ili **determinantom Vronskog**.*

Skup rešenja $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ za koji važi $W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) \neq 0$ nazivamo ***fundamentalnim sistemom rešenja***.

Definicija 3. *Funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ definisane na intervalu (a,b) nazivaju se **linearno zavisnim** ako postoje konstante $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$, takve da za svako $x \in (a,b)$ važi $\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$.*
*Ako ovakve konstante ne postoje, tj. ako iz činjenice da za svako $x \in (a,b)$ važi $\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$, sledi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, kažemo da su funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ **linearno nezavisne**.*

Primer 1. *Funkcije $\varphi_1(x) = \cos(2x)$, $\varphi_2(x) = \cos^2 x$, $\varphi_3(x) = \sin^2 x$ i $\varphi_4(x) = 1$ su linearno zavisne.*

Rešenje. Pokažimo da postoje konstante $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ koje nisu sve jednake nula takve da je

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \alpha_3 \varphi_3(x) + \alpha_4 \varphi_4(x) = 0.$$

Imamo da je

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \alpha_3 \varphi_3(x) + \alpha_4 \varphi_4(x) = \\ & \alpha_1 \cos(2x) + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \sin^2 x + \alpha_4 1 = \\ & \alpha_1 (\cos^2 x - \sin^2 x) + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \sin^2 x + \alpha_4 (\cos^2 x + \sin^2 x) = \\ & (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) \cos^2 x + (-\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) \sin^2 x = 0, \end{aligned}$$

tj. dobijamo homogeni sistem

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4 &= 0\\ -\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4 &= 0. \end{aligned}$$

Jedno netrivijalno rešenje datog sistema je npr. $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=1$. Važi da je $\cos(2x)-2\cos^2 x+1=0$. □

Teorema 3. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1° $(\forall x\in(a,b))\,W(y_1,y_2,\dots,y_n;x)=0$;

2° $(\exists x_0\in(a,b))\,W(y_1,y_2,\dots,y_n;x_0)=0$;

3° *rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda* $y_1,y_2,\dots,y_n$ *su linearno zavisne funkcije.*

Teorema 4. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1° $(\exists x_0\in(a,b))\,W(y_1,y_2,\dots,y_n;x_0)\neq 0$;

2° $(\forall x\in(a,b))\,W(y_1,y_2,\dots,y_n;x)\neq 0$;

3° *rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda* $y_1,y_2,\dots,y_n$ *su linearno nezavisne funkcije.*

Primer 2. *Pokazati da su* $y_1=e^{-x}$ *i* $y_2=e^{x^2}$ *dva linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine* $(2x+1)y''-(4x^2+1)y'-2(2x^2+x+1)y=0$.

Rešenje. Dokažimo prvo da su $y_1=e^{-x}$ i $y_2=e^{x^2}$ rešenja date jednačine. Imamo da je $y_1=e^{-x}$, $y_1'=-e^{-x}$ i $y_1''=e^{-x}$.

Zamenom u jednačinu $(2x+1)y''-(4x^2+1)y'-2(2x^2+x+1)y=0$ dobijamo

$$\begin{aligned} &(2x+1)e^{-x}+(4x^2+1)e^{-x}-2(2x^2+x+1)e^{-x}=\\ &(2x+1+4x^2+1-4x^2-2x-2)e^{-x}\equiv 0. \end{aligned}$$

Za funkciju $y_1=e^{x^2}$, važi $y_1'=2xe^{x^2}$ i $y_1''=(2+4x^2)e^{x^2}$. Zamenom u polaznu diferencijalnu jednačinu imamo

$$\begin{aligned} &(2x+1)(2+4x^2)e^{x^2}-(4x^2+1)2xe^{x^2}-2(2x^2+x+1)e^{x^2}=\\ &2(2x+1+4x^3+2x^2-4x^3-x-2x^2-x-1)e^{x^2}\equiv 0. \end{aligned}$$

Pokažimo koristeći prethodnu teoremu da su ova dva rešenja linearno nezavisna. Na intervalima $(-\infty,-\frac{1}{2})$ i $(-\frac{1}{2},+\infty)$ data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$y''-\frac{4x^2+1}{2x+1}\,y'-2\,\frac{2x^2+x+1}{2x+1}\,y=0.$$

Za svako x iz intervala $(-\infty,-\frac{1}{2})$ ili $(-\frac{1}{2},+\infty)$ važi

$$W(y_1,y_2;x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x^2}\\ -e^{-x} & 2xe^{x^2}\end{vmatrix}=(2x+1)e^{x^2-x}\neq 0.$$

$\square$

Trivijalno rešenje $y \equiv 0$ je linearno zavisno sa bilo kojim skupom rešenja.
Neka su y_1 i y_2 dva netrivijalna linearno zavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine $y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_2(x)y(x) = 0$, $x \in (a,b)$. Tada postoje konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, takve da za svako $x \in (a,b)$ važi da je $C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) = 0$. Imamo da je $(\forall x \in (a,b))\ \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = -\frac{C_2}{C_1} =$ const. Sa druge strane,

$$W(y_1,\, y_2; x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0$$

implicira $(\forall x \in (a,b))\ \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} = \frac{y_2'(x)}{y_2(x)}$, tj. $\int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\,dx = \int \frac{y_2'(x)}{y_2(x)}\,dx$, odnosno $\ln|y_1(x)| = \ln|y_2(x)| + \ln|k|$, ili $y_1(x) = k\,y_2(x)$, što daje $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$.

Teorema 5. *Ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda, onda je $y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) + \ldots + C_n\,y_n(x)$ njeno opšte rešenje.*

1.1 Homogene linearne diferencijalne jednačine II reda

Razmotrimo sada detaljnije homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu II reda

$$y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_2(x)y(x) = 0.$$

Smenom $y(x) = e^{\int z(x)\,dx}$ data jednačina se svodi na Rikatijevu diferencijalnu jednačinu prvog reda. Zaista, ako je $y(x) = e^{\int z(x)\,dx}$ imamo

$$y'(x) = z(x)\,e^{\int z(x)\,dx} \ \text{ i } \ y(x) = (z'(x) + z^2(x))e^{\int z(x)\,dx}.$$

Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo

$$(z'(x) + z^2(x))e^{\int z(x)\,dx} + f_1(x)z(x)\,e^{\int z(x)\,dx} + f_2(x)e^{\int z(x)\,dx} = 0,$$

tj.

$$z'(x) = -z^2(x) - f_1(x)z(x) - f_2(x).$$

Za nalaženje opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine II reda dovoljno je poznavati samo jedno njeno partikularno rešenje.

Teorema 6 (LIOUVILLEova formula)**.** *Ako je y_1 netrivijalno partikularno rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine II reda $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$, onda je $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int f_1(x)\,dx}\,dx$ takođe partikularno rešenje date jednačine linearno nezavisno od y_1.*

Dokaz. Neka je y_1 netrivijalno rešenje date homogene linearne diferencijalne jednačine II reda. Potražimo drugo rešenje u obliku $y_2(x) = z(x)\,y_1(x)$, gde je z funkcija koju treba odrediti. Zamenom y_2 i odgovarajućih izvoda

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= z'(x)\,y_1(x) + z(x)\,y_1'(x) \\ y_2''(x) &= z''(x)\,y_1(x) + 2z'(x)\,y_1'(x) + z(x)\,y_1''(x), \end{aligned}$$

u polaznu jednačinu, dobijamo

$$z''(x)\,y_1(x)+2z'(x)\,y_1'(x)+z(x)\,y_1''(x)+f_1(x)\,(z'(x)\,y_1(x)+z(x)\,y_1'(x))+f_2(x)\,z(x)\,y_1(x)=0,$$

odnosno

$$y_1(x)\,z''(x) + (2\,y_1'(x) + f_1(x)\,y_1(x))\,z'(x) + (y_1''(x) + f_1(x)\,y_1'(x) + f_2(x)\,y_1(x))\,z(x) = 0.$$

Kako je y_1 rešenje polazne jednačine imamo $y_1(x)\,z''(x)+(2\,y_1'(x)+f_1(x)\,y_1(x))\,z'(x) = 0$, tj. $z''(x) = -\frac{2\,y_1'(x)+f_1(x)\,y_1(x)}{y_1(x)}\,z'(x)$. Dalje, kako je $z''(x) = \frac{d\,z'(x)}{d\,x}$ dobijamo diferencijalnu jednačinu koji razdvaja promenljive $\frac{d\,z'(x)}{z'(x)} = -\frac{2\,y_1'(x)+f_1(x)\,y_1(x)}{y_1(x)}\,d\,x$, čije je opšte rešenje $\int\frac{d\,z'(x)}{z'(x)} = -2\int\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}dx - \int f_1(x)dx$, odnosno $\ln|z'(x)| = -2\ln|y_1(x)| - \int f_1(x)dx$, tj. $z'(x) = \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int f_1(x)\,d\,x}$.

Opšte rešenje ove jednačine je $z(x) = \int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int f_1(x)\,d\,x}\,d\,x$. Vraćenjem smene $y_2(x) = z(x)\,y_1(x) = y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int f_1(x)\,d\,x}\,d\,x$. Kako $\frac{y_2}{y_1}$ nije konstanta, zaključujemo da su y_1 i y_2 linearno nezavisna rešenja. □

Primer 3. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$x^2(x^2-1)y'' - (x^2-2)(xy'-y) = 0,\ x \in (1,+\infty)$$

ako se zna da je jedno partikularno rešenje oblika $y_1(x) = a\,x + b$.

Rešenje. Za funkciju $y_1(x) = a\,x+b$ važi $y_1'(x) = a$ i $y_1''(x) = 0$. Zamenom funkcije y_1 i njenih izvoda u datu diferencijalnu jednačinu dobijamo $a\,x-(a\,x+b) = 0$, odakle sledi da je $b = 0$ i za $a = 1$ dobijamo jedno partikularno rešenje $y_1(x) = x$. Drugo linearno nezavisno rešenje dobijalmo primenom LIOUVILLEove formule na jednačinu $y'' - \frac{x^2-2)}{x(x^2-1)}y' + \frac{x^2-2)}{x^2x^2-1)}y = 0$. Imamo

$$\begin{aligned} y_2 &= x\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{x^2-2}{x(x^2-1)}\,d\,x}d\,x = x\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{2x^2-2-x^2}{x(x^2-1)}\,d\,x}d\,x = x\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{2d\,x}{x}-\int\frac{xd\,x}{x^2-1}}d\,x \\ &= x\int\frac{1}{x^2}e^{\ln\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}d\,x = x\int\frac{d\,x}{\sqrt{x^2-1}} = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}). \end{aligned}$$

Opšte rešenje date jednačine je $y(x) = C_1y_1(x)+C_2y_2(x) = C_1x+C_2x\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.
□

2 Nehomogene linearne diferencijalne jednačine

Teorema 7. *Neka je y_h opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine i y_p jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine. Tada je opšte rešenje nehomogene jednačine dato sa $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.*

Teorema 8 (Metoda varijacije konstanata)**.** *Neka su $y_1, y_2, \dots, y_n$ linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine. Tada je opšte rešenje odgovarajuće nehomogene jednačine dato sa $y(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) + \dots + C_n(x)\,y_n(x)$, gde su $C_1, C_2, \dots, C_n$ funkcije čije izvode nalazimo rešavanjem sistema:*

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) + \dots + C_n'(x)\,y_n(x) = 0\\
&C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + \dots + C_n'(x)\,y_n'(x) = 0\\
&\dots\\
&C_1'(x)\,y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\,y_2^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'(x)\,y_n^{(n-2)}(x) = 0\\
&C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x) = F(x).
\end{aligned}$$

Primer 4. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine*

$$x\,(1-x)\,y'' + (2x^2-1)\,y' + 2\,(1-2x)\,y = 2\,x^2\,(x-1)^2, \;\; x \in (1,+\infty),$$

ako se zna da je jedno partikularno rešenje odogovarajuće homogene jednačine oblika $y_1 = a\,e^{bx}$.

Rešenje. Za funkciju $y_1(x) = a\,e^{bx}$ važi $y_1'(x) = a\,b\,e^{bx}$ i $y_1''(x) = a\,b^2\,e^{bx}$. Zamenom funkcije y_1 i njenih izvoda u datu diferencijalnu jednačinu

$$x\,(1-x)\,y'' + (2x^2-1)\,y' + 2\,(1-2x)\,y = 0$$

dobijamo

$$a\,b^2\,x\,(1-x)\,e^{bx} + a\,b\,(2x^2-1)\,e^{bx} + 2\,a\,(1-2x)\,e^{bx} = 0,$$

odnosno $(2b-b^2)x^2 + (b^2-4)x + 2 - b = 0$, odakle sledi da je $b = 2$ i za $a = 1$ dobijamo jedno partikularno rešenje $y_1(x) = e^{2x}$. Drugo linearno nezavisno rešenje dobijalmo primenom LIOUVILLEove formule na jednačinu

$$y'' - \frac{2x^2-1}{x\,(x-1)}\,y' + 2\,\frac{2x-1}{x\,(x-1)}\,y = 0.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
y_2 &= e^{2x}\int \tfrac{1}{e^{4x}} e^{\int \frac{2x^2-1}{x(x-1)}\,dx} dx = e^{2x}\int \tfrac{1}{e^{4x}} e^{\int \frac{2x^2-2x+2x-1}{x^2-x}\,dx} dx = e^{2x}\int \tfrac{1}{e^{4x}} e^{\int 2\,dx + \int \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx} dx\\
&= e^{2x}\int (x^2-x)e^{-2x}\,dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = x^2-x, & dv = e^{-2x}\,dx, \\ du = (2x-1)\,dx, & v = -\tfrac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right\}\\
&= e^{2x}\left(-\tfrac{x^2-x}{2}e^{-2x} + \int \tfrac{2x-1}{2}e^{-2x}\,dx\right) = \left\{ \begin{array}{cc} u = \frac{2x-1}{2} & dv = e^{-2x}\,dx, \\ du =, dx, & v = -\tfrac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right\}\\
&= -\tfrac{x^2-x}{2} + e^{2x}\left(-\tfrac{2x-1}{4}e^{-2x} + \int \tfrac{1}{2}e^{-2x}\,dx\right) = -\tfrac{x^2-x}{2} - \tfrac{2x-1}{4} - \tfrac{1}{4} = -\tfrac{x^2}{2},
\end{aligned}$$

Opšte rešenje homogene jednačine je

$$y(x) = C_1 y_1(x) - 2C_2 y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x^2.$$

Odredimo sada rešenje nehomogene jednačine $y'' - \frac{2x^2-1}{x(x-1)} y' + 2\frac{2x-1}{x(x-1)} y = 2x(1-x)$ korišćenjem metode neodređenih koeficijenata. Rešavamo sistem

$$\begin{aligned} &C_1'(x)\, e^{2x} + C_2'(x)\, x^2 = 0 \\ &2C_1'(x)\, e^{2x} + 2C_2'(x)\, x = 2x(1-x). \end{aligned}$$

Dobijamo da je $(x-x^2)C_2'(x) = x(1-x)$, tj. $C_2'(x) = 1$ i $C_1'(x) = -x^2 e^{-2x}$. Sledi da je $C_2(x) = \int dx = x + D_2$ i

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int x^2 e^{-2x}\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2, & dv = e^{-2x}\, dx, \\ du = 2x\, dx, & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2} e^{-2x} - \int x e^{-2x}\, dx \\ &= \left\{ \begin{matrix} u = x & dv = e^{-2x}\, dx, \\ du = dx, & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{matrix} \right\} = \frac{x^2+x}{2} e^{-2x} - \int \frac{1}{2} e^{-2x}\, dx \\ &= \frac{x^2+x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + D_1 = \frac{2x^2+2x+1}{4} e^{-2x} + D_1. \end{aligned}$$

Opšte rešenje nehomogene jednačine je

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) - 2C_2(x) y_2(x) = D_1 e^{2x} + D_2 x^2 + \frac{2x^2+2x+1}{4} + x^3.$$

□

3 Linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima je diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + f_1\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}\, y'(x) + f_n\, y(x) = 0,$$

gde su $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ konstante.
Potražimo rešenje date jednačine u obliku $y(x) = e^{\lambda x}$. Kako je $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$ zamenom u datu jednačinu dobijamo algebarsku jednačinu

$$\lambda^n + f_1 \lambda^{n-1} + \ldots + f_{n-1} \lambda + f_n = 0,$$

koju nazivamo ***karakterističnom jednačinom***, koja je pridružena polaznoj diferencijalnoj jednačini.
Svakom korenu karakteristične jednačine odgovara jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine. Tako dobijena partikularna rešenja čine skup linearno nezavisnih funkcija (fundamentalni sistem rešenja).

- Ako je λ prost realan koren karakteristične jednačine, onda je odgovarajuće partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y_p(x) = e^{\lambda x}$.
- Ako je λ realan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, onda su odgovarajuća partikularna rešenje diferencijalne jednačine

$$y_{p_1}(x) = e^{\lambda x},\, y_{p_2}(x) = x\,e^{\lambda x},\, \ldots,\, y_{p_k}(x) = x^{k-1}\,e^{\lambda x}.$$

- Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ prost kompleksan koren karakteristične jednačine, onda je i $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ prost kompleksan koren karakteristične jednačine, a odgovarajuća partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1}(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $y_{p_2}(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$.
- Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleksan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, onda je i $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ kompleksan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, a odgovarajuća partikularna rešenja diferencijalne jednačine su

$$y_{p_1}(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{p_2}(x) = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, y_{p_k}(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$y_{p_{k+1}}(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{p_{k+2}}(x) = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, y_{p_{2k}}(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Primer 5. *Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:*

i) $y'' - 2y' + y = 0$;

ii) $y'' + y = 0$;

iii) $y'' + a\,y = 0$;

iv) $y''' + 3y'' + 9y - 13y = 0$;

v) $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Rešenje.

i) Pridružena karakteristična jednačina je $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$. Data jednačina ima jedan realan koren reda dva, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1} = e^x$ i $y_{p_2} = xe^x$. Opšte rešenje date jednačine je

$$y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

ii) Pridružena karakteristična jednačina je $\lambda^2 + 1 = 0$. Data jednačina ima konjugovano kompleksne korene $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1} = \sin x$ i $y_{p_2} = \cos x$. Opšte rešenje date jednačine je $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

iii) Razmotrimo sledeća tri slučaja.

1° Neka je $a = 0$. Data diferencijalna jednačina se svodi na jednačinu $y'' = 0$. Pridružena karakteristična jednačina je $\lambda^2 = 0$. Data jednačina ima jedan realan koren reda dva, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1} = 1$ i $y_{p_2} = x$. Opšte rešenje jednačine je $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 + C_2 x$.

2° Neka je $a < 0$. Tada postoji $b > 0$ takvo da je $a = -b^2$. Diferencijalna jednačina glasi $y'' - b^2 y = 0$, a pridružena karakteristična $\lambda^2 - b^2 = 0$. Njena rešenja su realni i različiti koreni $\lambda_1 = b$ i $\lambda_2 = -b$. Partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1} = e^{bx}$ i $y_{p_2} = e^{-bx}$, dok je opšte rešenje date jednačine $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx}$.

3° Neka je $a > 0$. Tada postoji $b > 0$ takvo da je $a = b^2$. Diferencijalna jednačina glasi $y' + b^2 y = 0$, a pridružena karakteristična $\lambda^2 + b^2 = 0$. Njena rešenja su konjugovano kompleksni brojevi $\lambda_1 = bi$ i $\lambda_2 = -bi$. Partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1} = \cos(bx)$ i $y_{p_2} = \sin(bx)$, dok je opšte rešenje date jednačine $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)$.

iv) Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0$. Jedan koren ove jednačine je $\lambda_1 = 1$. Koristeći Hornerovu šemu

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & 9 & -13 \\ \hline & 1 & 4 & 13 & 0 \end{array}$$

dobijamo da su druga dva korena koreni jednačine

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 + 9 = (\lambda + 2)^2 + 3^2 = 0,$$

tj. $\lambda_2 = -2 + 3i$ i $\lambda_3 = -2 - 3i$. Partikularna rešenja polazne jednačine su $y_{p_1} = x$, $y_{p_2} = e^{-2x}\cos(3x)$ i $y_{p_3} = e^{-2x}\sin(3x)$. Opšte rešenje je

$$y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} + C_3 y_{p_3} = C_1 x + C_2 e^{-2x}\cos(3x) + C_3 e^{-2x}\sin(3x).$$

v) U ovom primeru karakteristična jednačina je

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = \\ &\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 + 2(2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0 \end{aligned}.$$

Njeni koreni reda dva su $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i$ i $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1} = e^{-x}\cos x$, $y_{p_2} = xe^{-x}\cos x$, $y_{p_3} = e^{-x}\sin x$ i $y_{p_4} = xe^{-x}\sin x$. Opšte rešenje diferencijalne jednačine je

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} + C_3 y_{p_3} + C_4 y_{p_4} \\ &= C_1 e^{-x}\cos x + C_2 x e^{-x}\cos x + C_3 e^{-x}\sin x + C_4 x e^{-x}\sin x. \end{aligned}$$

Primer 6. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + y = tg\, x$.*

Rešenje. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je $y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Primenimo metodu varijacije konstanata. Rešavamo sistem

$$\begin{aligned} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x &= 0 \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x &= \mathrm{tg}\, x. \end{aligned}$$

Imamo da je $C_1'(x) = \sin x$ i $C_2'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$. Važi da je $C_1(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x + D_1$ i

$$\begin{aligned} C_2(x) &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos x\, dx = -\int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \cos x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt = t + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + D_2 = \sin x + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + D_2. \end{aligned}$$

Opšte rešenje nehomogene jednačine je

$$\begin{aligned} y &= (-\cos x + D_1) \sin x + \left(\sin x + \tfrac{1}{2} \ln\left|\tfrac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + D_2\right) \cos x \\ &= D_1 \sin x + D_2 \cos x + \tfrac{\cos x}{2} \ln\left|\tfrac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|. \end{aligned}$$

□

Primer 7. *Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y'' + y = e^x + \sin x \cos(3x)$.

Rešenje. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je $y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Razmotrimo sada nehomogenu diferencijalnu jednačinu $y'' + y = e^x$. Kako je nehomogeni deo u obliku $F(x) = e^{\alpha x} (P_1(x) \cos(\beta x) + P_2(x) \sin(\beta x))$ primenjujemo metod neodređenih koeficijenata. Ispitujemo da li je $\lambda = 1$ koren pridružene karakteristične jednačine $\lambda^2 + 1 = 0$. Pošto nije, partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_1} = A e^x$. Važi da je $y_{p_1} = A e^x$, $y_{p_1}' = A e^x$ i $y_{p_1}'' = A e^x$. Zamenom funkcije y_{p_1} i njenog drugog izvoda u jednačinu $y'' + y = e^x$ dobijamo $2A e^x = e^x$, tj. $A = \frac{1}{2}$.

Nadalje, rešavamo diferencijalnu jednačinu $y'' + y = \sin x \cos(2x)$. Nehomogeni deo, transformacijom proizvoda trigonometrijskih funkcija u razliku, možemo zapisati kao $\sin x \cos(2x) = \frac{1}{2} (\sin(3x) - \sin x)$. Tražimo partikularna rešenja diferencijalnih jednačina $y'' + y = \frac{1}{2} \sin(3x)$ i $y'' + y = -\frac{1}{2} \sin x$. Kako $\lambda = 3i$ nije rešenje karakteristične jednačine imamo da je partikularno rešenje prve jednačine oblika

$$y_{p_2} = B \cos(3x) + C \sin(3x).$$

Odgovarajući izvodi su

$$y_{p_2}' = -3B \sin(3x) + 3C \cos(3x) \text{ i } y_{p_2}'' = -9B \cos(3x) - 9C \sin(3x).$$

Zamenom u diferencijalnu jednačinu $y'' + y = \frac{1}{2} \sin(3x)$ dobijamo

$$-9B \cos(3x) - 9C \sin(3x) + B \cos(3x) + C \sin(3x) = \frac{1}{2} \sin(3x),$$

tj. $-8B \cos(3x) - 8C \sin(3x) = \frac{1}{2} \sin(3x)$. Za konstante B i C važi $B = 0$ i $C = -\frac{1}{16}$, a za partikularno rešenje y_{p_2} imamo $y_{p_2} = -\frac{1}{16} \sin(3x)$.

Partikularno rešenje diferencijalne jednačinu $y'' + y = -\frac{1}{2} \sin x$ tražimo u obliku $y_{p_3} = x(D \cos x + E \sin x)$, jer je $\lambda = i$ rešenje karakteristične jednačine $\lambda^2 + 1 = 0$. Odgovarajući izvodi su $y_{p_2}' = D \cos x + E \sin x - xD \sin x + xE \cos x$ i

$$y_{p_2}'' = -D \sin x + E \cos x - D \sin x + E \cos x - xD \cos x - xE \sin x.$$

Zamenom u diferencijalnu jednačinu $y''+y=-\frac{1}{2}\sin x$ dobijamo

$$-2D\,\sin x+2E\,\cos x-xD\,\cos x-xE\,\sin x+xD\,\cos x+xE\,\sin x=-\frac{1}{2}\sin x.$$

Za konstante D i E važi $D=\frac{1}{4}$ i $E=0$, a za partikularno rešenje y_{p_3} imamo $y_{p_3}=\frac{x}{4}\cos x$. Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y=y_h+y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}=C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{16}\sin(3x)+\frac{x}{4}\cos x.$$

□

Primer 8. *Za razne vrednosti realnog parametra a odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine* $y''+ay=e^{-x}+x^2$.

Rešenje. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je

$$y_h=\begin{cases} C_1\,e^{\sqrt{-a}x}+C_2\,e^{-\sqrt{-a}x}, & a<0,\\ C_1+C_2x, & a=0,\\ C_1\,\cos(\sqrt{a}x)+C_2\,\sin(\sqrt{a}x), & a>0.\end{cases}$$

Odredimo prvo partikularno rešenje nehomogene jednačine $y''+ay=e^{-x}$ u zavisnosti od vrednosti realnog parametra a. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine je $\lambda^2+a=0$. Za $a=-1$, $\lambda=-1$ jeste prost koren ove jednačine, prema tome partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_1}=xA\,e^{-x}$.

Imamo izvode $y'_{p_1}=(1-x)Ae^{-x}$ i $y''_{p_1}=(x-2)A\,e^{-x}$. Zamenom u jednačinu $y''-y=e^{-x}$ dobijamo $(x-2)A\,e^{-x}-xA\,e^{-x}=e^{-x}$, tj. da je $A=-\frac{1}{2}$ i $y_{p_1}=-\frac{x}{2}e^{-x}$. Ako je $a\neq-1$, onda $\lambda=-1$ nije koren karakteristične jednačine. Partikularno rešenje je oblika $y_{p_1}=B\,e^{-x}$. Za izvode imamo $y'_{p_1}=-B\,e^{-x}$ i $y''_{p_1}=B\,e^{-x}$. Dobijamo jednakost $B\,e^{-x}+aB\,e^{-x}=e^{-x}$, odakle sledi $B=\frac{1}{1+a}$ i $y_{p_1}=\frac{1}{1+a}e^{-x}$.
Razmotrimo sada oblik partikularno rešenje nehomogene jednačine $y''+ay=x^2$ u zavisnosti od vrednosti realnog parametra a. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine je $\lambda^2+a=0$. Za $a=0$, $\lambda=0$ jeste koren reda 2 ove jednačine, prema tome partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_2}=x^2\,(Cx^2+Dx+E)$. Odgovarajući izvodi su $y'_{p_2}=4Cx^3+3Dx^2+2Ex$ i $y''_{p_2}=12Cx^2+6Dx+2E$.

Zamenom u jednačinu $y''=x^2$ dobijamo $12Cx^2+6Dx+2E=x^2$, tj. da je $C=\frac{1}{12}$, $D=E=0$ i $y_{p_2}=\frac{1}{12}x^4$. Ako je $a\neq 0$, onda $\lambda=0$ nije koren karakteristične jednačine. Partikularno rešenje je oblika $y_{p_2}=Fx^2+Gx+H$. Za izvode imamo $y'_{p_2}=2Fx+G$ i $y''_{p_2}=2F$. Dobijamo jednakost $2F+a(Fx^2+Gx+H)=x^2$, odakle sledi $F=\frac{1}{a}$, $G=0$, $H=-\frac{2}{a^2}$ i $y_{p_2}=\frac{1}{a}x^2-\frac{2}{a^2}$.

Opšte rešenje nehomogene jednačine je

$$
\begin{aligned}
y &= y_h + y_{p_1} + y_{p_2} \\
&= \begin{cases}
C_1\, e^{\sqrt{-a}\,x} + C_2\, e^{-\sqrt{-a}\,x} + \frac{1}{1+a}\, e^{-x} + \frac{1}{a}\, x^2 - \frac{2}{a^2}, & a < 0 \wedge a \neq 1, \\
C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-x} - \frac{x}{2}\, e^{-x} - x^2 - 2, & a = -1, \\
C_1 + C_2\, x + e^{-x} + \frac{1}{12}\, x^4, & a = 0, \\
C_1\, \cos(\sqrt{a}\,x) + C_2\, \sin(\sqrt{a}\,x) + \frac{1}{1+a}\, e^{-x} + \frac{1}{a}\, x^2 - \frac{2}{a^2}, & a > 0.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

□

4 Literatura

.

[1] Milan Merkle, Matematička analiza, teorija i hiljadu zadataka, za studente tehnike, Akademska misao, Beograd.

[2] Jelena Katić, Maša Đorić, Analiza 3, Matematički fakultet, Beograd.

[3] Svetlana Janković, Julka Knežević–Miljanović, Diferencijalne jednačine 1, Matematički fakultet, Beograd.

[4] Radoje Šćepanović, Julka Knežević–Miljanović, Ljubomir Protić, Diferencijalne jednačine, Matematički fakultet, Beograd.

[5] Milorad Bertolino, Diferencijalne jednačine, Zavod za udžbenike, Beograd.

[6] Pavle Miličić, Momčilo Ušćumlić, Zbirka zadataka iz više matematike II, Građevinska knjiga, Beograd.

[7] Frank Ayres, JR, Differential Equation, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York.