Linearna algebra

Ivana Jovović
ivana@etf.rs

Sadržaj

Definicija

Uređenu trojku $(V,+,\cdot)$, *gde je* $V \neq \emptyset$, $+ : V \times V \to V$ *binarna operacija na skupu* V, $(+ : (u,v) \mapsto u+v)$, $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ *spoljašnja operacija na skupu* V, $(\cdot : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v)$, *i* $(\mathbb{F},+,\cdot)$ *polje, nazivamo* ***vektorskim prostorom nad poljem*** $\mathbb{F}$ *ako važi:*

- $(V,+)$ *je Abelova grupa;*
- $(\forall \lambda \in \mathbb{F})(\forall u,v \in V)\ \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$;
- $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in V)\ (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$;
- $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F})(\forall v \in V)\ (\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$;
- $(\forall v \in V)\ 1 \cdot v = v$, *gde je* 1 *jedinični element polja* $\mathbb{F}$.

Elemente skupa V nazivamo ***vektorima***, dok elemente polja $\mathbb{F}$ nazivamo ***skalarima***. Binarnu operaciju $+ : V \times V \to V$ nazivamo ***sabiranje vektora***, dok spoljašnju operaciju $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ nazivamo ***množenje vektora skalarom***. Neutralni element za sabiranje vektora $\mathbf{0}$ nazivamo ***nula-vektor***. Inverzni element elementa $u \in V$ u odnosu na operaciju sabiranja vektora $-u$ nazivamo ***suprotni vektor*** vektora u.
Primetimo, da ovde koristimo svaku od oznaka $+$ i $\cdot$ za dve različite operacije. Npr. ako su $u, v \in V$, sa $u + v$ označavamo sabiranje vektora u i v u V, a ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, sa $\alpha + \beta$ označavamo sabiranje skalara α i β u $\mathbb{F}$. Iz konteksta će uvek biti jasno o kojoj se operaciji radi, te nema potrebe uvoditi nove oznake.

Primer

Neka je $\mathbb{F}$ *polje. Na skupu* $V=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{F}\}$, $n\in\mathbb{N}$, *svih uređenih n-torki elemenata iz skupa* $\mathbb{F}$, *definišemo binarnu operaciju* $+:V\times V\to V$ *sa*

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n):=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$

pokoordinatno sabiranje i spoljašnju operaciju $\cdot:\mathbb{F}\times V\to V$ *sa*

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n):=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n).$$

Tada je $(V,+,\cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$.

Primer

Neka je $\mathbb{F}$ *polje. Skup svih matrica tipa* $m\times n$ *nad poljem* $\mathbb{F}$, $m,n\in\mathbb{N}$, *u oznaci* $\mathbb{F}^{m\times n}$, *sa operacijama sabiranja matrica i množenja matrica elementima polja* $\mathbb{F}$ *jeste vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$.

Definicija

Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Za vektore $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ kažemo da su ***linearno zavisni*** *nad poljem $\mathbb{F}$, ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, od kojih je bar jeda različit od 0, takvi da važi*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n}_{\textit{linearna kombinacija vektora}} = \mathbf{0}.$$

Za vektore koji nisu linearno zavisni kažemo da su ***linearno nezavisni***. Za linearno nezavisne vektore važi implikacija

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \mathbf{0}.$$

Za skup vektora kažemo da je ***linearno zavisan***, odnosno ***linearno nezavisan*** ako su vektori koji ga obrazuju linearno zavisni odnosno nezavisni.

Primer

Za koje vrednosti realnih parametra a i b su vektori $u = (a, b, 3)$ *i* $v = (2, a-b, 1)$ *linearno zavisni u vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^3$*?*

Rešenje.

Vektori $u, v \in \mathbb{R}^3$ su linearno zavisni ako postoje realni brojeve α i β, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, za koje važi $\alpha u + \beta v = \mathbf{0}$, odnosno $\alpha(a, b, 3) + \beta(2, a-b, 1) = \mathbf{0}$, tj. $(a\alpha, b\alpha, 3\alpha) + (2\beta, (a-b)\beta, \beta) = \mathbf{0}$ ili $(a\alpha + 2\beta, b\alpha + (a-b)\beta, 3\alpha + \beta) = \mathbf{0}$. Poslednja jednakost je ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} a\alpha + 2\beta &= 0 \\ b\alpha + (a-b)\beta &= 0 \\ 3\alpha + \beta &= 0. \end{aligned}$$

Vektori $(a, b, 3)$ i $(2, a-b, 1)$ su linearno zavisni ako dati homogeni sistem ima netrivijalno rešenje. Iz treće jednačine dobijamo da je $\beta = -3\alpha$. Zamenom $\beta = -3\alpha$ u prvu jednačinu dobijamo da je $a = 6$, a drugu $4b - 3a = 0$, tj. da je $b = \frac{9}{2}$. $\square$

Primer

Za koje vrednosti realnog parametra k su vektori $u=(2,k,-4)$, $v=(0,k+2,-8)$ i $w=(1,-1,k-1)$ linearno zavisni u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$?

Rešenje.

Vektori $u,v,w\in\mathbb{R}^3$ su linearno zavisni ako postoje realni brojeve α, β i γ, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0$, za koje važi $\alpha u+\beta v+\gamma w=\mathbf{0}$, odnosno $\alpha(2,k,-4)+\beta(0,k+2,-8)+\gamma(1,-1,k-1)=\mathbf{0}$, tj. $(2\alpha,k\alpha,-4\alpha)+(0,(k+2)\beta,-8\beta)+(\gamma,-\gamma,(k-1)\gamma)=\mathbf{0}$ ili $(2\alpha+\gamma,k\alpha+(k+2)\beta-\gamma,-4\alpha-8\beta+(k-1)\gamma)=\mathbf{0}$. Poslednja jednakost je ekvivalentna sistemu

$$\begin{aligned} 2\alpha+\gamma &= 0\\ k\alpha+(k+2)\beta-\gamma &= 0\\ -4\alpha-8\beta+(k-1)\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Vektori u, v i w su linearno zavisni ako dati homogeni sistem ima netrivijalno rešenje, t.j. ako je determinanta matrice sistema jednaka nuli.

Za determinantu matrice sistema važi

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ k & k+2 & -1 \\ -4 & -8 & k-1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= 2(k+2)(k-1)-8k+4(k+2)-16 \\ &= (k+2)(2k-2)-8(k+2)+4(k+2) \\ &= (k+2)(2k-6) = 2(k+2)(k-3). \end{aligned}$$

Prema tome, za $k=-2$ ili $k=3$ vektori u, v i w su linearno zavisni. Za $k=3$ imamo da je $u=(2,3,-4)$, $v=(0,5,-8)$ i $w=(1,-1,2)$. Lako se može zaključiti da je $u=2w+v$. Ovu vezu između vektora u, v i w dobijamo iz jednačine $\alpha v+\beta u+\gamma w=\mathbf{0}$, odnosno nalaženjem netrivijalnog rešenja sistema

$$\begin{aligned} 2\alpha+\gamma &= 0 \\ 3\alpha+5\beta-\gamma &= 0 \\ -4\alpha-8\beta+2\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Iz prve jednačine dobijamo da je $\gamma=-2\alpha$, što zamenom u drugu i treću jednačinu daje $\beta=-\alpha$. Skup svih rešenja homogenog sistema je $\{(t,-t,-2t) \mid t\in\mathbb{R}\}$. Za proizvoljno t različito od nule dobijamo linearnu zavisnost vektora u, v i w. $\square$

Sledeći primer ilustruje važnost polja nad kojim razmatramo dati vektorski prostor.

Primer

Pokazati da su vektori $u = (2+i, 1+2i)$ i $v = (1-2i, 2-i)$ vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$ linearno nezavisni, ako vektorski prostora $\mathbb{C}^2$ razmatramo nad poljem $\mathbb{R}$, i da su linearno zavisni ako vektorski prostora $\mathbb{C}^2$ razmatramo nad poljem $\mathbb{C}$.

Rešenje.

Vektori u i v su linearno nezavisni nad poljem $\mathbb{R}$ ako za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi implikacija $\alpha u + \beta v = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta$. Jednačina $\alpha(2+i, 1+2i) + \beta(1-2i, 2-i) = \mathbf{0}$, odnosno $((2+i)\alpha, (1+2i)\alpha) + ((1-2i)\beta, (2-i)\beta) = \mathbf{0}$, tj. $((2+i)\alpha + (1-2i)\beta, (1+2i)\alpha + (2-i)\beta) = \mathbf{0}$ ili $((2\alpha+\beta) + (\alpha-2\beta)i, ((\alpha+2\beta) + (2\alpha-\beta)i) = \mathbf{0}$ je ekvivalentna sistemu

$$\begin{array}{rclcrcl} 2\alpha+\beta & = & 0 & \quad & \alpha-2\beta & = & 0 \\ \alpha+2\beta & = & 0 & \quad & 2\alpha-\beta & = & 0, \end{array}$$

a dati sistem ima jedino trivijalno rešenje.
Vektori u i v su linearno zavisni nad poljem $\mathbb{C}$ ako postoje brojevi $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, koji nisu istovremeno jednaki 0, za koje važi $\alpha u+\beta v=\mathbf{0}$. Jednačina $\alpha(2+i,1+2i)+\beta(1-2i,2-i)=\mathbf{0}$, tj. $((2+i)\alpha+(1-2i)\beta,(1+2i)\alpha+(2-i)\beta)=\mathbf{0}$ je ekvivalentna sistemu

$$\begin{array}{rcl} (2+i)\alpha+(1-2i)\beta & = & 0 \\ (1+2i)\alpha+(2-i)\beta & = & 0, \end{array}$$

čija je determinanta matrice sistema $\left|\begin{array}{cc} 2+i & 1-2i \\ 1+2i & 2-i \end{array}\right|=$ $(2+i)(2-i)-(1+2i)(1-2i)=(4+1)-(1+4)=0$. Prema tome, sistem ima netrivijalno rešenje i vektori su linearno zavisni. $\square$

Teorema

Neka je $(V,+,\cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *i neka su* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *vektori iz* V. *Tada važi:*

1. *ako postoji i,* $1 \le i \le n$*, takvo da je* $v_i = \mathbf{0}$*, onda su vektori* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *linearno zavisni;*
2. *ako postoje i i j,* $1 \le i < j \le n$*, takvi da je* $v_i = v_j$*, onda su vektori* $v_1, v_2, \dots, v_n$ *linearno zavisni;*
3. *ako je skup* $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *linearno nezavisan, onda je i svaki njegov podskup takođe linearno nezavisan;*
4. *ako je skup* $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *linearno zavisan, onda je i svaki njegov nadskup takođe linearno zavisan;*
5. *ako je skup* $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *linearno nezavisan i ako za* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{F}$ *važi*
$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n,$$
onda je $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.
6. *skup vektora* $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *je linearno zavisan ako i samo ako je za neko i,* $1 \le i \le n$*, vektor* v_i *linearna kombinacija ostalih vektora iz datog skupa.*

Neka je $(V, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je U neprazan podskup od V. Ako je $(U, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, gde su $+$ i $\cdot$ nasleđene operacije iz $(V, +, \cdot)$, onda kažemo da je U ***vektorski potprostor*** od V. Ako je $U \neq \{\mathbf{0}\}$ i $U \neq V$, onda kažemo da je U ***pravi vektorski potprostor*** od V.

Teorema

Uređena trojka $(U, +, \cdot)$, $\emptyset \neq U \subseteq V$, je vektorski potprostor vektorskog prostora $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$, ako i samo ako važi

$$(\forall u, v \in U)\ u + v \in U,$$
$$(\forall \alpha \in \mathbb{F})(\forall u \in U)\ \alpha \cdot u \in U.$$

Teorema

Uređena trojka $(U, +, \cdot)$, $\emptyset \neq U \subseteq V$, je vektorski potprostor vektorskog prostora $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$, ako i samo ako važi

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F})(\forall u, v \in U)\ \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in U.$$

Primer

Ispitati da li je $V = \{(0,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ *vektorski potprostor vektorskog prostora* $\mathbb{R}^3$.

Rešenje.

Na osnovu prethodne teoreme treba pokazati da je $V \neq \emptyset$ i da je

$$(\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R})(\forall (0,x,y),(0,z,w) \in V)\ \alpha(0,x,y)+\beta(0,z,w) \in V.$$

Očigledno je $V \neq \emptyset$. Važi

$$\begin{aligned} \alpha(0,x,y)+\beta(0,z,w) &= (0,\alpha x,\alpha y)+(0,\beta z,\beta w) \\ &= (0,\alpha x+\beta z,\alpha y+\beta w). \end{aligned}$$

Kako su $\alpha,\beta,x,y,z,w \in \mathbb{R}$ imamo da je $\alpha x+\beta z,\alpha y+\beta w \in \mathbb{R}$, pa je prema tome $(0,\alpha x+\beta z,\alpha y+\beta w) \in V$. $\square$

Primer

Odrediti skup V svih matrica permutabilnih u odnosu na operaciju množenja matrica sa matricom $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$*. Zatim pokazati da je V vektorski potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$, gde je $\mathbb{R}^{2\times 2}$ skup svih kvadratnih matrica nad poljem $\mathbb{R}$.*

Rešenje.

Može se pokazati da je $V = \left\{ X \,\middle|\, X = \begin{bmatrix} x & y \\ 3y & x \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$.
Pokažimo da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i svako $X, Z \in V$ važi $\alpha X + \beta Z \in V$. Imamo da je

$$\alpha X + \beta Z = \alpha \begin{bmatrix} x & y \\ 3y & x \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} z & w \\ 3w & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x + \beta z & \alpha y + \beta w \\ 3(\alpha y + \beta w) & \alpha x + \beta z \end{bmatrix}.$$

Odakle zaključujemo da je $\alpha X + \beta Z \in V$. $\square$

Teorema

Neka je dat homogeni sistem, sa koeficijentima u polju $\mathbb{R}$, *m linearnih algebarskih jednačina sa n nepoznatih* $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0, \end{array}$$

i neka je V *skup svih rešenja datog sistema. Pokazati da je* V *vektorski potprostor vektorskog prostora kolona-matrica* $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Dokaz

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \text{i} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

Dati sistem možemo zapisati u matričnom obliku $A\cdot X = \mathbf{0}$. Ovaj sistem uvek ima trivijalno rešenje, prema tome skup rešenja V je neprazan. Dalje, neka su X i Y dva proizvoljna rešenja datog homogenog sistema, dokažimo da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ važi da je i $\alpha X + \beta Y$ takođe rešenje datog sistema. Imamo da je

$$A\cdot(\alpha X+\beta Y)=A\cdot(\alpha X)+A\cdot(\beta Y)=\alpha(A\cdot X)+\beta(A\cdot Y)=\alpha\cdot\mathbf{0}+\beta\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Prema tome, i $\alpha X + \beta Y$ je rešenje datog sistema.

Definicija

Neka je $(V,+,\cdot)$ *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{F}$. *Skup svih linearnih kombinacija vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, *u oznaci*

$$\mathscr{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\},$$

nazivamo ***linearnim omotačem*** *ili* ***linealom*** *vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n$. *Kažemo da vektori* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *generišu ili razapinju* $\mathscr{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Definicija

Neka je W *neprazan podskup od* V. *Skup* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *nazivamo* ***generatorskim skupom*** *skupa* W *ako važi* $W = \mathscr{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, *t.j. ako se svaki vektor iz* W *može predstaviti kao linearna kombinacija vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Neka je U proizvoljan neprazan podskup od V. Skup svih linearnih kombinacija vektora iz U

$$\mathscr{L}(U)=\{\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n \,|\, v_1,v_2,\ldots,v_n\in U, \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}, n\in\mathbb{N}\},$$

nazivamo ***linearnim omotačem*** ili ***linealom*** skupa U. Skup U nazivamo ***generatorskim skupom*** skupa W ako važi $W=\mathscr{L}(U)$, t.j. ako se svaki vektor iz W može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz U.

Teorema

Neka je $(V,+,\cdot)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka su $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$. Tada je $\mathscr{L}(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ vektorski potprostor od V. Takođe, ako je U neprazan podskup od V, onda je $\mathscr{L}(U)$ vektorski potprostor od V.

Primer

Neka su dati vektori $u = (1,1,1)$ *i* $v = (2,3,0)$ *vektorskog prostora* $\mathbb{R}^3$. *Odrediti lineal vektora* u *i* v.

Rešenje.

Lineal $\mathscr{L}(u,v)$ je skup svih linearnih kombinacija vektora u i v, tj.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(u,v) &= \{\alpha u + \beta v \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha(1,1,1) + \beta(2,3,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \alpha) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

$\square$

Definicija

Skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nazivamo ***bazom*** *vektorskog prostora $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$ ako je generatorski skup od V i ako su vektori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linearno nezavisni.*

Skup U nazivamo ***bazom*** vektorskog prostora $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$ ako je linearno nezavisan generatorski skup od V.

Teorema

Ako vektorski prostor $(V, +, \cdot)$ nad poljem $\mathbb{F}$ ima bazu koja ima n elementa, onda svaka druga baza od V ima n elemenata.

Za vektorski prostor kažemo da je konačno-dimenzionalan ako ima konačnu bazu. Na osnovu prethodne teoreme, zaključujemo da su u konačno-dimenzionalnom vektorskom prostoru svake dve baze istobrojne.

Definicija

Dimenzija *konačno-dimenzionalnog vektorskog prostora V, u oznaci $\dim V$, je broj elemenata baze.*

Teorema

Neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *baza vektorskog prostora* $(V, +, \cdot)$ *nad poljem* $\mathbb{F}$. *Tada se svaki vektor u iz* V *može predstaviti na jedinstven način kao linearna kombinacija vektora* $v_1, v_2, \ldots, v_n$, *tj. postoje jedinstveni skalari* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ *takvi da je* $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Dimenzija vektorskog prostora $V = \{\mathbf{0}\}$ je jednaka 0.

Primer

Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{F}^n$, *svih uređenih n-torki nad poljem* $\mathbb{F}$, *je n, a jedna baza je* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, *gde je* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$. *Svaki skup od n linearno nezavisnih vektora u prostoru* $\mathbb{R}^n$ *obrazuje bazu tog prostora. Prema tome, još jedna baza vektorskog prostora* $\mathbb{F}^n$ *je* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, *gde je* $f_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $f_2 = (1, 1, \ldots, 0)$, ..., $f_n = (1, 1, \ldots, 1)$.

Primer

Dimenzija vektorskog prostora $V = \{(0,x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ *nad poljem* $\mathbb{R}$ *je* 2*, a jedna baza je* $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Primer

Dimenzija vektorskog prostora $V = \left\{ X \;\middle|\; X = \begin{bmatrix} x & y \\ 3y & x \end{bmatrix}, x,y \in \mathbb{R} \right\}$ *nad poljem* $\mathbb{R}$ *je* 2*, a jedna baza je* $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Primer

Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$*, svih uređenih parova kompleksnih brojeva, nad poljem* $\mathbb{C}$*, je* 2*, a jedna baza je* $\{(1,0),(0,1)\}$*, dok je dimenzija ovog vektorskog prostora nad poljem* $\mathbb{R}$ *jednaka* 4*, sa jednom bazom* $\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\}$.

Primer

Dokazati da je skup $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$*, gde je* $v_1 = (1, 1, 2, 1)$*,* $v_2 = (1, -1, 0, 1)$*,* $v_3 = (0, 0, -1, 1)$ *i* $v_4 = (1, 2, 2, 0)$*, jedna baza vektorskog prostora* $\mathbb{R}^4$*. Predstaviti vektor* $u = (1, 1, 1, 1)$ *u ovoj bazi.*

Rešenje.

Dimenzija vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ je 4. Na osnovu prethodne teoreme, skup od četiri linearno nezavisna vektora iz $\mathbb{R}^4$ je baza tog vektorskog prostora. Prema tome, dovoljno je pokazati da su vektori v_1, v_2, v_3 i v_4 linearno nezavisni, tj. da važi implikacija $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Važi

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 =$
$\alpha_1(1, 1, 2, 1) + \alpha_2(1, -1, 0, 1) + \alpha_3(0, 0, -1, 1) + \alpha_4(1, 2, 2, 0) =$
$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_4, 2\alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \mathbf{0}.$

Prethodna jednačina je ekvivalentna sistemu

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1+\alpha_2 \qquad + \ \ \alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_1-\alpha_2 \qquad +2\alpha_4 & = & 0 \\ 2\alpha_1 \qquad -\alpha_3+2\alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \qquad\quad & = & 0. \end{array}$$

Vektori v_1, v_2, v_3 i v_4 su linearno nezavisni ako i samo ako dati homogen sistem ima jedinstveno rešenje, tj. ako i samo ako je determinanta sistema različita od 0. Imamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\cdot(1+1) = -4 \neq 0.$$

Kako je skup $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$, svaki vektor iz $\mathbb{R}^4$ se može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija vektora v_1, v_2, v_3 i v_4. Prema tome, postoje jedinstveni realni brojevi β_1, β_2, β_3 i β_4 takvi da važi $u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \beta_4 v_4$, odnosno $(1,1,1,1) = \beta_1(1,1,2,1) + \beta_2(1,-1,0,1) + \beta_3(0,0,-1,1) + \beta_4(1,2,2,0) = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_4, \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_4, 2\beta_1 - \beta_3 + 2\beta_4, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$.
Prethodna jednačina je ekvivalentna sistemu

$$\begin{array}{rcl} \beta_1 + \beta_2 + \beta_4 & = & 1 \\ \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_4 & = & 1 \\ 2\beta_1 - \beta_3 + 2\beta_4 & = & 1 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & = & 1. \end{array} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{rcl} \beta_1 + \beta_2 + \beta_4 & = & 1 \\ \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_4 & = & 1 \\ \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 & = & 0 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 & = & 1. \end{array}$$

Rešenje datog sistema je $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\square$

Literatura

1. Matematika 1 – Algebra
   autori: *D. Cvetković, I. Lacković, M. Merkle, Z. Radosavljević, S. Simić, P. Vasić*
2. Linearna algebra
   autori: *M. Rašajski, B. Malešević, T. Lutovac, B. Mihailović, N. Cakić*
3. Zbirka zadataka iz algebre I deo
   autori: *P. Vasić, B. Iričanin, M. Jovanović, B. Malešević, T. Madžarević, B. Mihailović, Z. Radosavljević, S. Simić, D. Cvetković*
4. Zbirka zadataka iz algebre II deo
   autori: *P. Vasić, B. Iričanin, M. Jovanović, T. Madžarević, B. Mihailović, Z. Radosavljević, S. Simić, D. Cvetković*