Neodređeni integrali

Smena promenljive i parcijalna integracija

Contents

1 Kratak teorijski pregled

1.1 Definicija neodređenog integrala

Neka je f funkcija definisana na intervalu (a,b).
Ako postoji funkcija F takva da važi

$$(\forall x \in (a,b))\, F'(x) = f(x),$$

onda kažemo da je F primitivna funkcija funkcije f na intervalu (a,b).

Neka je F proizvoljna primitivna funkcija funkcije f na intervalu (a,b).
Neodređeni integral funkcije f, u oznaci $\int f(x)dx$, definiše se

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in (a,b),\ C \in \mathbb{R}.$$

Neodređeni integral je skup (familija) svih primitivnih funkcija date funkcije na određenom intervalu.

Nalaženje integrala (integracija) je postupak inverzan diferenciranju:

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C,$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad df(x) = f'(x)dx.$$

$$d\int f(x)dx = d(F(x)+C) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Linearnost integrala:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx + C, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1.2 Tablica neodređenih integrala

Tablica neodređenih integrala

$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = ln\|x\| + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{1}{lna} a^x + C, a > 0, a \neq 1$
$\int sinx dx = -cosx + C$	$\int cosx dx = sinx + C$
$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$	$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$
$\int shx dx = chx + C$	$\int chx dx = shx + C$
$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = tghx + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = ln\|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\| + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} ln \left\| \frac{x-1}{x+1} \right\| + C$

1.3 Smena promenljive u neodređenom integralu

- $\varphi(x) = t$ Ako funkcija φ ima inverznu funkciju ψ i ako su funkcije f, ψ i ψ' neprekidne, tada je

$$\int f(\varphi(x))dx = \int f(t)d\psi(t) + C = \int f(t)\psi'(t)dt + C.$$

  Smena $\varphi(x) = t$ se najčešće koristi kod integrala oblika $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) + C = \int f(t)dt + C.$$

- $x = \varphi(t)$ Ako su funkcije f, φ i φ' neprekidne, tada je

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) + C = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt + C.$$

1.4 Metoda parcijalne integracije

Ako su u i v diferencijabilne funkcije promenljive x na intervalu (a,b), tada na tom intervalu važi

$$\int u(x)\ dv(x) = u(x)\ v(x) - \int v(x)\ du(x) + C.$$

2 Zadaci

2.1 Jednostavni zadaci za vežbu

Domaći zadatak 1. Naći sledeće integrale:

$i)\ \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx,$ $\left[x - 2ln|x| - \frac{1}{x} + C\right]$

$ii)\ \int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx,$ $\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} + C\right]$

$iii)\ \int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}\, dx,$ $\left[\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C\right]$

$iv)\ \int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\, dx,$ $\left[-\frac{2}{ln5}5^{-x} + \frac{1}{5ln2}2^{-x} + C\right]$

$v)\ \int (1 + sinx + cosx)\, dx,$ $[x - cosx + sinx + C]$

$vi)\ \int ctg^2 x\, dx,$ $[-ctgx - x + C]$

$vii)\ \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx.$ $[x - arctgx + C]$

2.2 Smena promenljive u neodređenom integralu

Zadatak 2. Naći sledeće integrale:

$i)\ \int (2x-5)^{100} dx,$ $ii)\ \int \frac{dx}{1+cosx}.$

Domaći zadatak 3. Naći sledeće integrale:

$i)\ \int \frac{dx}{x-2},$ $[ln|x-2| + C]$

$ii)\ \int (2x-3)^{10}\, dx,$ $\left[\frac{1}{22}(2x-3)^{11} + C\right]$

$iii)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}},$ $\left[-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C\right]$

$iv)\ \int \sqrt[3]{2-3x}\, dx,$ $\left[-\frac{1}{4}(2-3x)^{\frac{4}{3}} + C\right]$

$v)\ \int e^{-5x+4}\, dx,$ $\left[-\frac{1}{5}e^{-5x+4} + C\right]$

$vi)\ \int cos(7x)\, dx,$ $\left[\frac{1}{7}sin(7x) + C\right]$

$vii)\ \int \frac{dx}{sin^2(3x+4)},$ $\left[-\frac{1}{3}ctg(3x+4) + C\right]$

$viii)\ \int \frac{dx}{1-cosx}.$ $\left[-ctg\frac{x}{2} + C\right]$

Zadatak 4. Naći sledeće integrale:

$i)\ \int x^2 \sqrt[5]{x^3+2}\, dx,$

$ii)\ \int \frac{1}{x^2} cos\frac{1}{x}\, dx,$

$iii)$ $\int \frac{dx}{x\, lnx}$,

$iv)$ $\int tgx\, dx$,

$v)$ $\int \frac{tgx+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}tgx}\, dx$,

$vi)$ $\int \frac{(sinx-cosx)^2}{sin2x}\, dx$,

$vii)$ $\int \frac{dx}{chx}$.

Domaći zadatak 5. Naći sledeće integrale:

$i)$ $\int \frac{x\, dx}{1+x^2}$, $\left[\frac{1}{2} ln(1+x^2)+C\right]$

$ii)$ $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\left[-\sqrt{1-x^2}+C\right]$

$iii)$ $\int \frac{ln^2 x\, dx}{x}$, $\left[\frac{1}{3} ln^3 x+C\right]$

$iv)$ $\int x\, e^{-x^2} dx$, $\left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}+C\right]$

$v)$ $\int \frac{sinx}{\sqrt{cos^3 x}}\, dx$, $\left[\frac{2}{\sqrt{cosx}}+C\right]$

$vi)$ $\int \frac{sinx+cosx}{\sqrt[3]{sinx-cosx}}\, dx$, $\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-sin(2x)}+C\right]$

$vii)$ $\int sin^2 x\, dx$, $\left[\frac{x}{2}-\frac{sin(2x)}{4}+C\right]$

$viii)$ $\int cos^2 x\, dx$. $\left[\frac{x}{2}+\frac{sin(2x)}{4}+C\right]$

2.3 Metoda parcijalne integracije

Zadatak 6. Naći sledeće integrale:

$i)$ $\int x cosx\, dx$,

$ii)$ $\int x^3 e^{x^2}\, dx$,

$iii)$ $\int arctg\sqrt{x}\, dx$,

$iv)$ $\int arcsin^2 x\, dx$,

$v)$ $\int sin(bx)\, e^{ax}\, dx$,

$vi)$ $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$.

Domaći zadatak 7. Naći sledeće integrale:

$i)$ $\int xsinx\, dx$, $[-xcosx+sinx+C]$

ii) $\int x^2 sin^2 x\, dx,$ $\left[\frac{x^3}{6} - \frac{x}{4}cos(2x) - \frac{2x^2-1}{8}sin(2x) + C\right]$

iii) $\int xe^x\, dx,$ $[(x-1)e^x + C]$

iv) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx,$ $\left[2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C\right]$

v) $\int x^2 e^{-x}\, dx,$ $\left[-(x^2+2x+2)e^{-x} + C\right]$

vi) $\int arctgx\, dx,$ $\left[xarctgx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C\right]$

vii) $\int x^2 arccosx\, dx,$ $\left[-\frac{1}{9}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}x^3 arccosx + C\right]$

viii) $\int \frac{arcsinx}{\sqrt{1+x}}\, dx,$ $\left[2\sqrt{1+x}arcsinx + 4\sqrt{1-x} + C\right]$

ix) $\int \frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx,$ $\left[2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x}arcsin\sqrt{x}) + C\right]$

x) $\int lnx\, dx.$ $[xlnx - x + C]$

Domaći zadatak 8. Naći sledeće integrale:

i) $\int \frac{x}{cos^2 x}\, dx,$ $[xtgx + ln|cosx| + C]$

ii) $\int \frac{arcsinx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx,$ $\left[arcsinx \cdot tg(arcsinx) + ln\sqrt{1-x^2} + C\right]$

iii) $\int \frac{xe^{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$ $\left[\frac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2})e^{arcsinx} + C\right]$

iv) $\int \frac{xe^{arctgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx,$ $\left[\frac{e^{arctgx}}{2\sqrt{1+x^2}}(x-1) + C\right]$

v) $\int sin(lnx)\, dx,$ $\left[\frac{x}{2}(sin(lnx) - cos(lnx)) + C\right]$

vi) $\int cos(lnx)\, dx,$ $\left[\frac{x}{2}(sin(lnx) + cos(lnx)) + C\right]$

vii) $\int \frac{ln(sinx)}{cos^2 x}\, dx,$ $[tgx \cdot ln(sinx) - x + C]$

viii) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx,$ $\left[\frac{e^x}{1+x} + C\right]$

ix) $\int ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx.$ $\left[xln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C\right]$

2.4 Integral $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Zadatak 9. Naći integral $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

I način: Podintegralna funkcija je definisana za $x \in [-1,1]$. Uvodimo smenu $x = sint, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-sin^2t}\,d(sint) = \int \sqrt{cos^2t}\,cost\,dt$$

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow cost \geq 0 \Longrightarrow \int \sqrt{cos^2t}\,cost\,dt = \int cos^2t\,dt$$

$$\int cos^2t\,dt = \int \frac{1+cos2t}{2}dt = \int \frac{dt}{2} + \int \frac{cos2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}sin2t + C$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}sint\,cost + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}sint\sqrt{1-sin^2t} + C$$

Funkcija $x = sint, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ima inverznu funkciju $t = arcsinx$.

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{2}sint\sqrt{1-sin^2t} + C = \frac{arcsinx}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

II način:

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{1-x^2} & dv = dx \\ du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right\} \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= x\sqrt{1-x^2} - I + arcsinx
\end{aligned}$$

$$I = \frac{arcsinx}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

2.5 Rekurentne formule

Zadatak 10. Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

Zadatak 11. Izvesti rekurentnu formulu za izračunavanje integrala $I_n = \int \frac{dx}{sin^nx}$.

Domaći zadatak 12. Izvesti rekurentne formule za izračunavanje integrala:

i) $I_n = \int sin^nx\,dx,$ $\qquad \left[I_n = -\frac{1}{n}sin^{n-1}x \cdot cosx + \frac{n-1}{n}I_{n-2}\right]$

ii) $I_n = \int cos^nx\,dx,$ $\qquad \left[I_n = \frac{1}{n}cos^{n-1}x \cdot sinx + \frac{n-1}{n}I_{n-2}\right]$

iii) $I_n = \int \frac{dx}{cos^nx}.$ $\qquad \left[I_n = \frac{sinx}{(n-1)cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\right]$

Literatura

1. Neodređeni integrali – skripta
   autor: *Bojana Mihailović*
2. Matematika II – skripta
   autor: *Mirko Jovanović*
3. Matematička analiza, teorija i hiljadu zadataka, za studente tehnike, II izdanje
   autor: *Milan Merkle*