Предавање 8

Непрекидност реалне функције

Деф. Нека је дата реална ф-ја $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ и тачка $a \in D$. Кажемо да је f непрекидна у тачки a ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D)(0 \leq |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon),$$

што се другачије записује:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D)(x \in (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - \underbrace{f(a)}_{L}| < \varepsilon)$$

Када је f непрекидна у тачки $a \in D$ важи:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a)$$

$L = f(a)$ у дефиницији граничне вредности

Прецизирања (непрекидност са леве и десне стране)

За ф-ју $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ и тачку $a \in D$ кажемо да је f непрекидна са леве стране у тачки $a \in D$ ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D)(x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

За ф-ју $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ и тачку $a \in D$ кажемо да је f непрекидна са десне стране у тачки $a \in D$ ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D)(x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Ф-ја је непрекидна у тачки $a \in D$ акко је непрекидна и са леве и са десне стране тачке a.

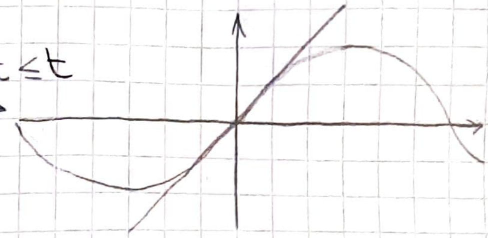
Ако је $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ непрекидна у свакој тачки $a \in A$ неког подскупа $A \subseteq D$ онда је f непрекидна на A.

Пр. 1) Ф-ја $f(x)=\sin x$ је непрекидна (по дефиницији) у свакој тачки $a\in\mathbb{R}$. Бирајући произвољно $\varepsilon>0$ одређујемо $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ тако да важи $0\le|x-a|<\delta$ $\Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$$|\sin x-\sin a|<\varepsilon$$

$$2\underbrace{\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|}_{\le 1}\underbrace{\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|}_{\le\frac{x-a}{2}}\le 2\cdot 1\cdot\frac{|x-a|}{2}=|x-a|<\varepsilon$$

$\sin t\le t$



довољно је бирати $\delta=\varepsilon$

2) Ф-ја $f(x)=\begin{cases} x: & x<0 \\ x+1: & x\ge 0\end{cases}$ има прекид у тачки $x=0$.
Непрекидна је само са десне стране у тачки $x=0$.

Све елементарне ф-је су непрекидне на свом домену на ком су дефинисане.

Врсте тачака прекида

Нека је дата реална ф-ја $f:D\to\mathbb{R}$ $(D\subseteq\mathbb{R})$ која је дефинисана у некој околини тачке $a\in\mathbb{R}$ осим можда у самој тачки a. Уколико у свакој δ-околини $(\delta>0)$ тачке $a\in\mathbb{R}$ постоје тачке $x\in D$, $x\ne a$ тада тачку a називамо тачком нагомилавања домена D. За тачку нагомилавања $a\in\mathbb{R}$ домена ф-је $f:D\to\mathbb{R}$ кажемо да је тачка прекида уколико $\neg(f(a-0)=f(a)=f(a+0))$.

може, али и не мора да постоји

За тачку $a\in\mathbb{R}$ која је тачка прекида важи:

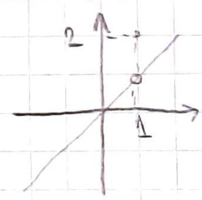
$\neg(f(a-0) = f(a) = f(a+0))$ ако $a \in D$ или

$\neg(f(a-0) = f(a+0))$ ако $a \notin D$ $(\neg\exists f(a))$

Тачка $a \in \mathbb{R}$ је тачка прекида I врсте ако $\exists f(a-0)$ и $\exists f(a+0)$ у скупу $\mathbb{R}$.

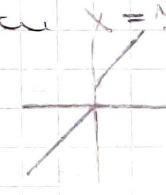
Став 1 Нека је дата ф-ја $f: D \to \mathbb{R}$ и тачка $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања домена. Тачка a је тачка прекида прве врсте акко важи: $(\exists f(a-0), \exists f(a), \exists f(a+0))$ ако $a \in D$ при чему постоје вредности $f(a-0), f(a), f(a+0)$ као коначни реални бројеви који нису сви међусобно једнаки, или $(\exists f(a-0), \exists f(a+0))$ ако $a \notin D$, при чему постоје вредности $f(a-0)$ и $f(a+0)$ као коначни реални бројеви који могу бити или једнаки или међусобно различити.

Пр. 1) ф-ја $f(x) = \begin{cases} x : x \neq 1 \\ 2 : x = 1 \end{cases}$



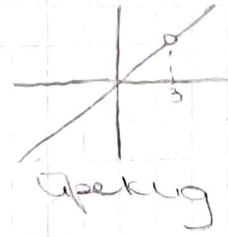
има прекид прве врсте у тачки $x = 1 \in D$.

2) ф-ја $f(x) = \begin{cases} x : x \leq 0 \\ x+1 : x > 0 \end{cases}$



има прекид прве врсте у тачки $x = 0 \in D$.

3) ф-ја $f(x) = x : (-\infty, 3) \cup (3, +\infty) \to \mathbb{R}$ има прекид прве врсте у тачки $x = 3$.



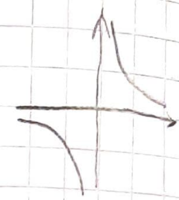
За ф-ју $f: D \to \mathbb{R}$ кажемо да има прекид друге врсте у тачки нагомилавања $a \in \mathbb{R}$ ако тачка $a \in \mathbb{R}$ није тачка прекида прве врсте тј. $\neg\exists f(a-0)$ или $\neg\exists f(a+0)$ у скупу $\mathbb{R}$.

Став 2 Нека је дата ф-ја $f: D \to \mathbb{R}$ и тачка $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања домена таква да је тачка прекида. Тада је a тачка прекида друге врсте ако важи:

$\neg\exists f(a-0)$ или $\neg\exists f(a+0)$ ако $a \in D$

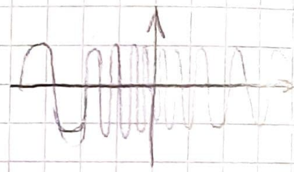
$\neg\exists f(a-0)$ или $\neg\exists f(a+0)$ ако $a \notin D$.

Пр. 1) Ф-ја $f(x) = \frac{1}{x} : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ има прекид друге врсте у тачки $x = 0 \notin D$.



2) Ф-ја $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има прекид друге врсте у тачки $x = 0 \in D$.

3) Ф-ја $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ има прекид друге врсте у тачки $x = 0 \in D$.



Особине непрекидних функција

Збир, разлика, производ, количник и композиција непрекидних функција је непрекидна функција на домену на коме су дефинисани (последица Хајнеове теореме).

① Одредити реалан број A тако да су функције непрекидне.

1) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2) $f(x) = \begin{cases} (\cos 2x + \sin 2x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ван координатног система функције су непрекидне.

$A = \lim_{x \to 0} f(x)$ Овим изразом истиче се $\lim_{x\to 0} f(x) =$

$= f(\lim_{x \to 0} x)$ услов непрекидности у тачки $x=0$.

1) $0 < |f(x)| < |x \cdot \sin \frac{1}{x}|$ за $x \neq 0$

$$0 \leq |f(x)| = |x| \cdot \underbrace{|\sin \tfrac{1}{x}|}_{\leq 1} \leq |x|$$

$$0$$

$A = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (Т 2 жандара)

2) за $x \neq 0$: $f(x) = (\cos 2x + \sin 2x)^{\frac{1}{x}} =$

$= (1 - 2\sin^2 x + \sin 2x)^{\frac{1}{x}} = (1 + \sin x(2\cos x - 2\sin x))^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ ↑ A је lim од овога

$$e^{\lim_{x\to 0} \frac{\overset{=1}{\sin x}(\overset{2}{2\cos x} - \overset{0}{2\sin x})}{x}} = e^2$$

② У зависности од природног броја $n \in \{1,2,3,4,5\}$ испитати непрекидност функције у тачки $x=0$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{x^n}{1-\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

У случајевима када је f прекидна одредити врсту прекида.

$1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

посматрамо $\lim_{x \to 0\pm 0} f(x)$

за $x \neq 0$

$$f(x) = \left(1 + \frac{x^n}{1-\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{x^n}{2\sin^2(\frac{x}{2})}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

1) $n = 1$ $f(x) = \left(1 + \frac{x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1 + \frac{x}{2 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

одатле $\lim_{x \to 0\pm 0} f(x) = \left(1 + \frac{1}{0 \pm \infty}\right)^{\frac{1}{0+}} = (\pm\infty)^{+\infty}$

тачка $x=0$ је прекид 2. врсте ($\nexists\ (-\infty)^{+\infty}$ и притом $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$.

2) $n=2$ $\quad f(x) = \left(1+\frac{x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1+\frac{1}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot 2\cdot\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\left(1+\frac{2}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1+\frac{2}{1}\right)^{\frac{1}{0+}} = 3^{+\infty} = +\infty$$

тачка $x=0$ је прекид 2. врсте

3) $n=3$ $\quad f(x) = \left(1+\frac{x^3}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1+\frac{x}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot 2\cdot\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\left(1+\frac{2x}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\frac{2x}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\frac{2}{x}} = e^{\pm\infty} \begin{matrix}\nearrow +\infty\\ \searrow 0\end{matrix}$$

тачка $x=0$ је прекид 2. врсте

4) $n=4$

$$f(x) = \left(1+\frac{x^4}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1+\frac{x^2}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot 2\cdot\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\left(1+\frac{2x^2}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^2$$

притом $f(0)=1$ и зато је $x=0$ прекид 1. врсте

5) $n=5$

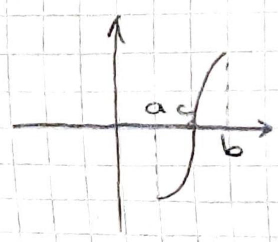
$$\lim_{x\to 0\pm 0} f(x) = \lim_{x\to 0\pm 0}\left(1+\frac{2x^3}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$$

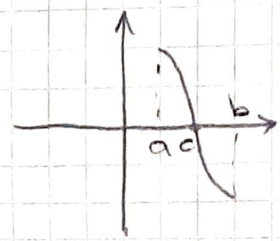
Геометријске особине непрекидних функција

Болцано - Кошијева теорема

Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна и важи $f(a)f(b)<$

тада $(\exists c\in(a,b))\ f(c)=0$.





① Да ли ј-на има бар једно реално решење? Образложити одговор. $x^4\sin(\pi x) - x^3 + 3x - \sqrt{2} = 0$

уведемо $f(x) = x^4\sin(\pi x) - x^3 + 3x - \sqrt{2}$

$f(x)$ је непрекидна (због синуса)

$a = 0,\ b = 1$

$f(0) = -\sqrt{2} < 0$

$f(1) = 2 - \sqrt{2} > 0$

$\Rightarrow$ по Коши-Болцановој теореми $f(x)$ има реално решење на $(0,1)$

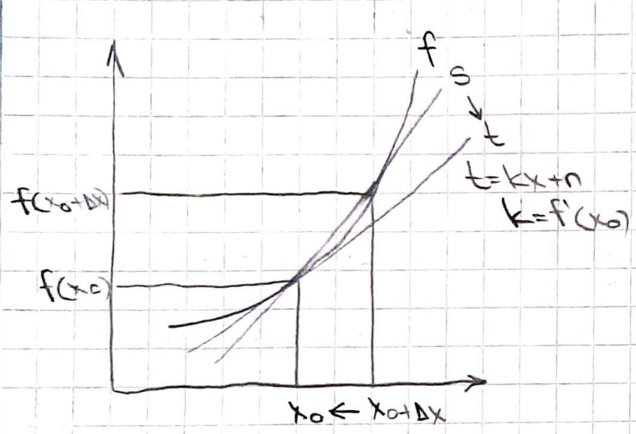
Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна и строго растућа на сегменту $[a,b]$ $(a<b)$. Тада постоји инверзна ф-ја $f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$ при чему је f^{-1} такође непрекидна и строго растућа

(Т) (Вајерштрасова) Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна на $[a,b]$ и има $\inf = m$ и $\sup = M$. Тада: $((\exists x_1\in[a,b]) f(x_1) = m \wedge (\exists x_2\in[a,b]) f(x_2) = M)$.

Изводи функција и диференцијабилност

Деф. Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке $x_0 \in \mathbb{R}$ укључујући и саму тачку. Ако постоји коначна или бесконачна гранична вредност $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ тада $f'(x_0)$ називамо извод функције f у тачки x_0.

Геометријски:



$$(t) \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

$$(n) \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

* тумачење када $f' = \pm\infty$ → тада је тангента нормална на x-осу

Пр. Одредити $f'(x_0)$ за $f(x) = \sin^2 x$.

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin^2(x_0+h) - \sin^2 x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sin(x_0+h) - \sin x_0)(\sin(x_0+h) + \sin x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}{2}\cos\frac{x_0+h+x_0}{2}(\sin(x_0+h)+\sin x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)(\sin(x_0+h)+\sin x_0) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos x_0 \cdot 2\sin x_0 = 2\sin x_0 \cos x_0$$

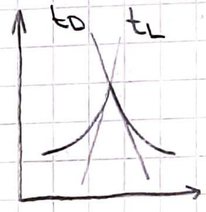
Пошто је извод дефинисан преко граничне вредности, онда можемо размотрити и леви и десни извод.

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ леви извод

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ десни извод



f нема извод јер се разликују Л и Д извод

(Т1) Функција f има извод у тачки x_0 ако и само ако постоје $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ и једнаки $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

(Т2) Ако је ф-ја f диференцијабилна у тачки x_0, она је и непрекидна у тачки x_0.

Деф. Ако је први извод коначан, онда је функција диференцијабилна.

Доказ: за непрекидност треба доказати

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \iff f(x_0) = f(\lim_{x\to x_0} x) = \lim_{x\to x_0} f(x))$$

даље важи $\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot (x-x_0) =$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$

Основне теореме за рачунање извода

(Т3) Нека су f и g диференцијабилне у x_0. Тада важи:

1) $(\alpha f(x) + \beta g(x))'\Big|_{x=x_0} = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) $(f(x)\cdot g(x))'\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, $g(x) \neq 0$ у некој околини тачке x_0

(Т4) Нека је g диференцијабилна у x_0 и нека је $h = f\circ g$ такође диференцијабилна у x_0, тако да је f диференцијабилна у $y_0 = g(x_0)$. Тада $(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

(Т5) Ако је f строго монотона и непрекидна на (a,b) и диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a,b)$ тако да $f'(x_0) \neq 0$. Тада постоји инверзна функција f^{-1} која је диференцијабилна у $y_0 = f(x_0)$ и важи $(f^{-1}(y))'\Big|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

(Т6) (Логаритамски извод) Ако је f позитивна у некој околини тачке x_0 и диференцијабилна у x_0 и нека је g дефинисана у x_0 и диференцијабилна у x_0, тада је и степено-експоненцијална ф-ја $h(x) = f(x)^{g(x)}$ диференцијабилна у x_0 и важи:

$$h'(x) = \left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

до формуле се долази логаритмовањем

$$h(x) = f(x)^{g(x)} \quad / \ln$$

$$\ln h(x) = g(x)\ln f(x) \quad /'$$

$$\frac{1}{h(x)} h'(x) = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$h'(x) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Таблица основних извода

$c' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(shx)' = chx$	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(chx)' = shx$	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(thx)' = ch^2x$	
$(cthx)' = sh^2x$	

Пр. 1. Извод ф-је $f(x) = \sin^2 x$

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x\,(\sin x)' = 2\sin x\cos x$$

2. Извод ф-је $g(x)$ рачунат по формули за извод инверзне ф-је $g(x) = \ln x$

$$g(x) = f^{-1}(x) \qquad f(x) = e^x$$

$$(g(x))' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{e^y}\Big|_{y=g(x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

3. $y = x^x = h(x)$

$y = x^x \;/\ln$ $\qquad$ II начин: $y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$

$\ln y = x\ln x \;/'$

$\frac{y'}{y} = 1\cdot\ln x + x\frac{1}{x}$

$y' = x^x(\ln x + 1)$

4. Нека је дата ф-ја $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x\le 0 \\ \frac{1}{3}x + x^2\sin\frac{1}{7x}, & x>0 \end{cases}$, $a,b\in R$

Одредити $a,b\in R$ тако да f буде непрекидна и диференцијабилна.

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$$

$$b = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{3}x + x^2\sin\frac{1}{7x}\right) = 0$$

$$0 \le \left|x^2\sin\frac{1}{7x}\right| \le \underset{\downarrow \atop 0}{x^2}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{ah}{h} = a$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{3}h + h^2\sin\frac{1}{7h}}{h}$$

$$= \frac{1}{3} + \lim_{h\to 0+} h\sin\frac{1}{7h} = \frac{1}{3} = a$$

За ф-ју $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, & x\le 0 \\ \frac{1}{3}x + x^2\sin\frac{1}{7x}, & x>0 \end{cases}$ изводна ф-ја има прекид друге врсте

Диференцијал

Нека је f диференцијабилна у тачки $x_0\in D$ и нека је $x_0 - x$ прираштај аргумента. Тада израз $df(x) = f'(x)\cdot\Delta x$ називамо диференцијал. Бирајући специјално $f(x) = x$ у том случају $dx = \Delta x$, па следи $df(x) = f'(x)dx$ итј.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Преко диференцијала могу да се нађу правила за диференцирање:

1. $\frac{d}{dx}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df(x)}{dx} + \beta \frac{dg(x)}{dx}$

2. $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}$

4. $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df(z)}{dz}\Big|_{z=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$

5. $\frac{d}{dy}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}\Big|_{y=g(x)}}.$

Изводи и диференцијали вишег реда

Нека је дата $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ и нека је f диференцијабилна на $D_1 \subseteq [a,b]$, тада постоји $f'(x)$ први извод за $x \in D_1$. Тада разматрамо други извод $f''(x) = (f'(x))'$ на скупу $D_2 \subseteq D_1$. Ако је дефинисан извод реда $n-1$ са $f^{(n-1)}(x)$ на скупу D_{n-1} тада разматрамо извод n-тог реда $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ на скупу $D_n \subseteq D_{n-1}$.

Деф. n-ти диференцијал

$$d^n f(x) = d(d^{(n-1)} f(x)) = f^{(n)}(x)\, dx^n$$

Пр.
1. $f(x) = e^x \to f^{(n)}(x) = e^x$
2. $f(x) = \sin x \to f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
3. $f(x) = \cos x \to f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

4. $f(x) = x^{\alpha} \to f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

5. $f(x) = \frac{1}{x} \to f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

Ⓣ (Лајбницова формула) Нека је f дато у облику производа $f(x)=u(x)v(x)$ где су $u(x)$ и $v(x)$ n пута диференцијабилне. Тада је и f n пута диференцијабилна и важи:

$$(u(x)v(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x).$$

Пр. 1. Наћи n-ти извод $f(x) = (x^2-x+1)e^{-x}$

I начин: редом индуктивно

II начин: Лајбницовом формулом

$$f^{(n)}(x) = ((\underbrace{x^2-x+1}_{u(x)})\underbrace{e^{-x}}_{v(x)})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2-x+1)^{(k)}(e^{-x})^{(n-k)}$$

$$= \binom{n}{0}(x^2-x+1)^{(0)}(e^{-x})^{(n)} + \binom{n}{1}(x^2-x+1)^{(1)}(e^{-x})^{(n-1)} + \binom{n}{2}(x^2-x+1)^{(2)}(e^{-x})^{(n-2)} + \binom{n}{3}\cancel{(x^2-x+1)^{(3)}}(e^{-x})^{(n-3)}$$

$$+0+0+\dots+0 =$$

$$= (x^2-x+1)(-1)^n e^{-x} + n(2x-1)(-1)^{n-1}e^{-x} + \binom{n}{2}2\cdot(-1)^{n-2}e^{-x} =$$

$$= (-1)^n((x^2-x+1) - n(2x-1) + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2)e^{-x} =$$

$$= (-1)^n e^{-x}(x^2-(2n+1)x+n^2+1)$$

Ⓣ (Лопиталово правило) Нека су f и g диференцијабилне у некој околини тачке $a\in\overline{\mathbb{R}}$, осим можда у тачки a, тако да важи:

1. Гранична вредност $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ је облика $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$

2. Постоји гранична вредност $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \in\overline{\mathbb{R}}$

3. $g'(x)\neq 0$ у некој околини тачке a.

Тада постоји $L = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ и важи

$$L = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x - \sin x} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{1 - \cos x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{\sin x} =$$

$$= -2 + 8 = 6$$

2. $$L_2 = \lim_{x \to 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) (= \infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \to 1+} \frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1+} \frac{1 \cdot \ln x + 1 - 1}{1 \cdot \ln x + (x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1+} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} =$$

$$\left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

3. $$L_3 = \lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Геометрија извода и диференцијабилности функција

Локални екстремуми

Нека је дата ф-ја $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R})$ и нека је за тачку $x_0 \in D$ испуњено да $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset D$ за неко $\varepsilon > 0$. Уколико важи $(\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\ f(x) \geq f(x_0)$ тада f има локални минимум у x_0. Иначе, уколико важи $(\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$ $f(x) \leq f(x_0)$ тада f има локални максимум у x_0.

Ако постоји извод у тачки $x_0 \in D$ тако да $f'(x_0) = 0$ тада тачку x_0 називамо стационарна тачка ф-је f.

(T) (Фермаова) Ако функција $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ има у тачки домена $x_0 \in D$ локални екстремум и ако функција f има у тачки $x_0 \in D$ извод, тада $f'(x_0) = 0$.

Доказ: Нека је x_0 тачка локалног максимума. То да постоји ε околина $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq D$ тако да $f(x) \le f(x_0)$ за $\forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$. Са друге стране, за f постоји извод $f'(x_0)$, па постоји и леви извод $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h \to 0-} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{h}_{\le 0}} \ge 0$ и десни извод $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h \to 0+} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{h}_{\ge 0}} \le 0$. Из једнакости $f'_-(x_0) \ge 0$ и $f'_+(x_0) \le 0$ и $f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0)$ следи $f'(x_0) = 0$.

Напомена: Ако постоји локални екстремум у x_0 тада је или $f'(x_0) = 0$ или не постоји $f'(x_0)$.

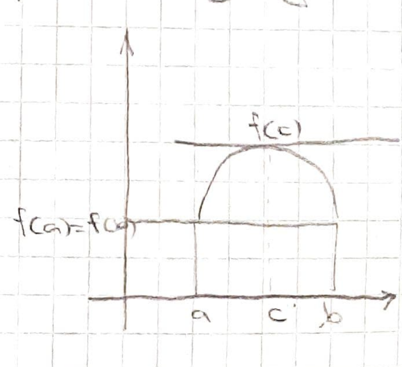
Деф. Локални минимум и максимум су локални екстремуми.

(T) (Ролова) Нека функција $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ испуњава услове:

1. f је непрекидна на $[a,b]$ ($f \in C[a,b]$)
2. $f \in D(a,b)$ - f је диференцијабилна на (a,b)
3. $f(a) = f(b)$.

Тада постоји тачка $c \in (a,b)$ таква да је $f'(c) = 0$

Доказ: f је непрекидна (из диференцијабилности) и достиже m - минимум и M - максимум. Могућа су два случаја:



1. $f(a) = f(b) = m = M$: тада је $f(x)$ константна ф-ја.

2. $f(a) = f(b)$ и $m < M$: наведено геометријски значи да постоји локални екстремум у тачки $c \in (a,b)$.

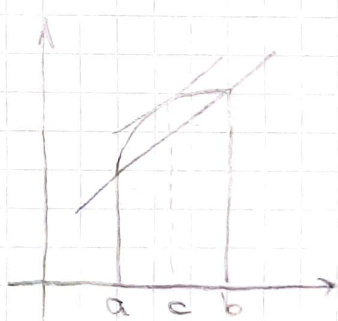
Образложење: уколико не постоји локални екстремум, мора бити да $f \nearrow_{m}^{M}$ (расте од m до M) и $m < M \Rightarrow f(a) \neq f(b)$. Закључак је да мора постојати локални екстремум у $c \in (a,b)$. Према Фермаовој теореми, $f'(c) = 0$.

Т (Лагранжова) Нека $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ испуњава услове:

1. $f \in C[a,b]$ - непрекидна
2. $f \in D(a,b)$ - диференцијабилна

Тада постоји тачка $c \in (a,b)$ таква да је

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Т (Кошијева) Нека ф-је $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ испуњавају услове:

1. $f, g \in C[a,b]$;
2. $f, g \in D(a,b)$,
3. $g'(x) \neq 0$ за $\forall x \in (a,b)$.

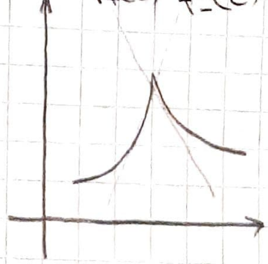
Тада постоји $c \in (a,b)$ тако да $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

Т (о бројевима прекида изводне ф-је) Нека је дата ф-ја $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Тада важи:

1. ако f има у десној околини тачке a извод и ако постоји $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$, тада постоји $f'_+(a)$ и важи да се $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$ подудара са $f'_+(a)$ (=)
2. ако f има у левој околини тачке b извод $f'_-(b)$ и ако постоји $\lim\limits_{x\to b-} f'(x)$, тада важи да је $\lim\limits_{x\to b-} f'(x) = f'_-(b)$
3. ако је f дефинисана у некој ε-околини $(\varepsilon>0)$ тачке $c\in(a,b)$ и има извод на $(c-\varepsilon, c)\cup(c, c+\varepsilon)$ и ако постоји $\lim\limits_{x\to c} f'(x)$ тада постоји $f'(c)$ и важи $\lim\limits_{x\to c} f'(x) = f'(c)$.

Последица Ако постоји $f'(x)$ на (α,β), тада изводна ф-ја f' не може имати прекид прве врсте.

Коментар Ако би постојао прекид (1. врсте) у тачки $c\in(\alpha,\beta)$ у којој постоји $f'(c)$, тада $\lim\limits_{x\to c-} f'(x) \neq \lim\limits_{x\to c+} f'(x)$ тј. $f'_-(c)\neq f'_+(c)$ према претходној теореми, па не постоји $f'(c)$, што је супротно претпоставци.

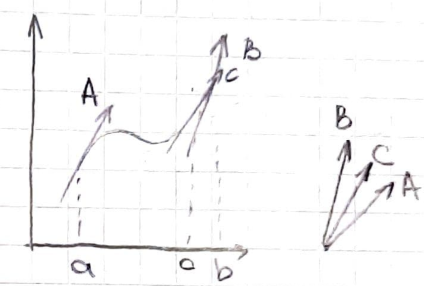


Напомена Изводна ф-ја може да има прекид друге врсте.

Пр. ф-ја $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, & x\le 0 \\ \frac{1}{3}x + x^2 \sin 7x, & x>0 \end{cases} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Раније доказано да је $f(x)$ непрекидна и диференцијабилна притом, $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{3} + 2x \sin\frac{1}{7x} + \frac{1}{7}x^2 \cos\frac{1}{7x}, & x > 0 \end{cases}$ има прекид 2. врсте у $x=0$.

(Т) (Дарбуова) Ако је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ диференцијабилна у интервалу (a,b) и нека постоје $A=f'_+(a)$ и $B=f'_-(b)$ тако да $A<B$. Тада за свако $C\in(A,B)$ постоји $c\in(a,b)$ тако да важи $f'(c)=C$.



Монотоност и конвексност функција

(Т) Нека је дата $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ($(a,b)\subseteq\overline{\mathbb{R}}$). Тада важи:

1. $(\forall x\in(a,b))\ f'(x)<0 \Rightarrow f$ монотоно опада на (a,b)
2. $(\forall x\in(a,b))\ f'(x)>0 \Rightarrow f$ монотоно расте на (a,b)
3. $(\forall x\in(a,b))\ f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=c$ – const. ф-ја

Доказ: важи на основу Лагранжове теореме:

$f(b_1)-f(a_1) = f'(c)(b_1-a_1)$ за $[a_1,b_1]\subseteq[a,b]$.

(Т) Нека је дата функција $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ за $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ и нека је $x_0\in(a,b)$ стационарна тачка ф-је f (тј. $f'(x_0)=0$). Тада важи:

1. ако је $f''(x_0)>0$, онда је x_0 локални минимум
2. ако је $f''(x_0)<0$, онда је x_0 локални максимум
3. ако је $f''(x_0)=0$ и притом $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots = f^{(k-1)}(x_0)=0$ и $f^{(k)}(x_0)\neq 0$, $k\in\mathbb{N}, k\geq 2$, тада:

а) ако је $k=2m$ и $f^{(k)}(x_0)>0$ тада је

x_0 локални минимум; ако $f'(x_0) < 0$ тада је x_0 локални максимум

б) ако је $k = 2m+1$, тада f нема локални екстремум у x_0

Пр. Одредити природу стационарне тачке $f(x) = x^n$ $n = 1, 2, 3, 4$.

1. $n=1$ $f(x) = x$ нема лок. екс.
2. $n=2$ $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2$ $f'''(x) = 0$

$f''(0) = 2 > 0$

$x = 0$ је лок. мин.

3. $n=3$ $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$ $f''(x) = 6x$ $f'''(x) = 6$

$f'''(0) = 6 > 0$

4. $n=4$ $f(x) = x^4$ $f'(x) = 4x^3$ $f''(x) = 12x^2$ $f'''(x) = 24x$ $f^{(IV)}(x) = 2$

$f^{(IV)}(0) = 24 > 0$

$x = 0$ је лок. мин.

Пр. $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ одредити природу стационарне тачке $x = 0$.

$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x$ $f''(0) = 0$

$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x$ $f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ $f^{IV}(0) = 4 > 0$

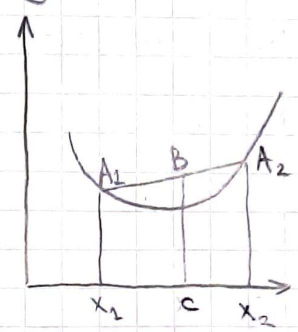
$\Rightarrow x_0 = 0$ је лок. мин.

Домаћи Одредити природу стационарне тачке $x = 0$ ф-је $f(x) = e^x + e^{-x} + b\cos x$ у зависности од $b \in \mathbb{R}$.

x_0 $b > 2$ ... $b = 2$ (мин)

Конвексност и конкавност

Нека је дата $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Ако важи $(\forall x_1,x_2\in(a,b))(\forall\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]\mid\lambda_1+\lambda_2=1)\ f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)$, тада кажемо да је f конвексна на $[a,b]$. Ако се користи строга неједнакост, ради се о строгој конвексности.



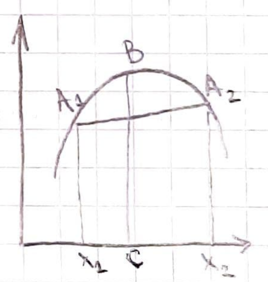
c је линеарна комбинација

$c=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$

$f(c)=C<B=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$

$=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$

Ако важи супротан смер неједнакости, кажемо да је f конкавна, односно строго конкавна ако је неједнакост строга.



$c=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$

$f(c)=C>B=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$

$=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2$

(Т) Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ диференцијабилна на $[a,b]$.

1. f је конвексна (строго конвексна) ако и само ако је f' растућа (строго растућа)
2. f је конкавна (строго конкавна) ако и само ако је f' опадајућа (строго опадајућа).

(Т) Нека је $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ два пута диференцијабилна на $[a,b]$.

1. f је конвексна (строго конвексна) ако и само ако важи $f''(x)\geq0$ $(f''(x)>0)$

2. f је конкавна (строго конкавна) ако и само ако важи $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) < 0$)

Деф. Нека је дата ф-ја $f: D \to \mathbb{R}$ дефинисана у некој δ-околини $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$ тако да је на $(x_0 - \delta, x_0)$ конвексна (конкавна) и на $(x_0, x_0 + \delta)$ конкавна (конвексна), тада кажемо да је x_0 превојна тачка.

(T) Нека $f: D \to \mathbb{R}$ има превојну тачку $x_0 \in D$ и нека f има непрекидан други извод у тачки x_0, тада је $f''(x_0) = 0$.

Пр. За ф-ју $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 : [-3, 4] \to \mathbb{R}$

1) одредити локалне екстремуме и најмању и највећу вредност на домену

2) испитати конвексност/конкавност и постојање превојних тачака

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \to f'(x) = x^2 - x - 2$

Из $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$ стационарне тачке $f(x)$

знак $f'(x)$:

-3		-1		2		4
	$+$		$-$		$+$	

$x = -1 \to$ локални максимум
$x = 2 \to$ локални минимум
} локални екстремуми

За најмању и највећу вредност морамо да размотримо и вредности рубних тачака

$f(-1) = 2,1\overline{6}$ $f(2) = -2,\overline{3}$ → вредности у лок. екс.

$f(-3) = -\frac{13}{2} = -6,5$ $f(4) = 6,\overline{3}$ → вр. у рубним тачкама

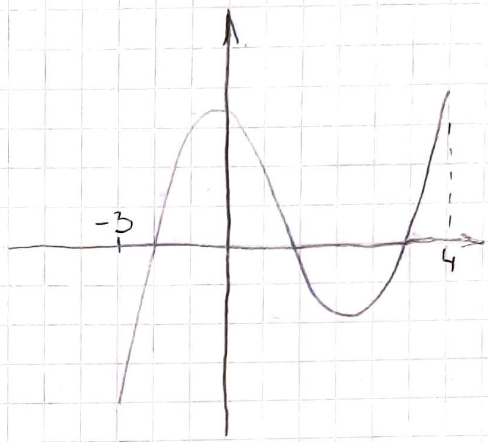
У $x=4$ достиже се највећа вредност, а у $x=-3$ најмања.

2) $f''(x) = 2x-1$ $\qquad f \in \overset{\text{непр. 2 извод}}{C^2}[-3,4]$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ је превојна тачка

$P\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}\right)$

f''	-3	$-$	$\frac{1}{2}$	$+$	4
		$\frown$		$\smile$	



Асимптоте функција

Нека је дата ф-ја $f: D \to \mathbb{R}$ и a тачка нагомилавања домена. Уколико бар једна од граничних вредности $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ износи $+\infty$ или $-\infty$, тада кажемо да је права $x=a$ вертикална асимптота ф-је f.

Нека је дата ф-ја $f: D\to\mathbb{R}$, при чему D није ограничено у $\mathbb{R}$. Уколико постоји $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$, за коначан број b, тада кажемо да је права $y=b$ хоризонтална асимптота ф-је f.

Нека је дата ф-ја $f: D\to\mathbb{R}$ на домену D који није ограничен у $\mathbb{R}$. Уколико постоје $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$ за коначне $a,b\in\mathbb{R}$, тада кажемо да је права $y=ax+b$ коса асимптота ф-је f. Хоризонтална асимптота је специјалан случај косе ($a=0$).

За вертикалну асимптоту се може прецизирати лева и десна, за хоризонталну и косу ка $+\infty$ и $-\infty$.

Пр. 1. $f(x) = \frac{8x+1}{4x-4} : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \frac{8x+1}{4x-4} = \frac{9}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(4x-4)} = \frac{9}{0\pm 0} = \pm\infty$ $x=1$ верт. асимп.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x+1}{4x-4} = 2$ $y=2$ хор. асимпт.

2. $g(x) = \frac{8x^2+1}{4x-4} : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 1\pm 0} \left(\frac{8x^2+1}{4x-4}\right) = \frac{9}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(4x-4)} = \frac{9}{0\pm 0} = \pm\infty$ $x=1$ верт. а

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{8x^2+1}{4x-4}}{x} = 2$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{8x^2+1}{4x-4} - 2x = 2$ $y=2x+2$ је коса а.

Тејлорова формула

Бесконачно мале и велике величине

Нека је дата $f: D\to\mathbb{R}$. Ако за тачку a нагомилавања скупа D важи: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, тада је $f(x)$ бесконачно мала величина у граничном процесу $x\to a$, иначе ако је испуњено $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, тада је $f(x)$ бесконачно велика величина у граничном процесу $x\to a$.

Нека су дате ф-је f и $g: D\to\mathbb{R}$. Ако за тачку нагомилавања a скупа D постоји околина $U=U_a$ таква да $(\forall x\in U)(f(x) = \alpha(x)g(x)) \wedge \lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$, тада кажемо да је $f(x)$ бесконачно мала вишег реда у односу на $g(x)$ у граничном процесу $x\to a$

Наведено означавамо $f(x) = o(g(x))\ (x \to a)$.
Једноставније $f(x) = o(g(x)) \iff \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
$\left(0 \leftarrow \alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \right)$

Пр. Доказати $\cos x - 1 = o(x)\ (x \to 0)$

$f(x) = \cos x - 1$

$g(x) = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

Напомена $\varphi(x) = \underset{(x\to a)}{o(1)} \iff \varphi(x) \in \{ f(x) \mid \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{1} = 0 \} =$
$= \{ f(x) \mid \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \}$

Постоји и још могућност да количник $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ за неко $k \neq 0, \pm\infty$. У том случају $f(x)$ и $g(x)$ су истог реда у граничном процесу $x \to a$
Уколико за ф-је $f(x), g(x)$ постоји $M > 0$ тако да $|f(x)| < M|g(x)|$ за $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (неко $\varepsilon > 0$) тада пишемо $f(x) = O(g(x))$.

Напомена 2 Често $o(g(x))$ у процесу када $x \to a$ схватамо као неки избор представника класе ф-ја, у смислу $f(x) = o(g(x)) \iff \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, па се понекад пише $f(x) \in o(g(x))$.

Нека је дата ф-ја $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ и нека је $a \in D$ таква да f има коначне изводе $f^{(k)}(a)$ реда за $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Полином
$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
се назива Тејлоров полином степена n ф-је f у

тачки $x=a$.

Т За сваку полиномску ф-ју $f(x)=P_k(x)$ степена k и природан број $n\geq k$ важи $T_n^{f,a}(x)=P_k(x)$ ($f^{(n)}(a)=\dots=f^{(k+1)}(a)=0$).

У општем случају кад f није полином, разматрамо ф-ју разлике $R_n^{f,a}(x)=f(x)-T_n^{f,a}(x)$ и називамо је остатком.

Важи:

Т (Тејлорова) Нека је f дефинисана и непрекидна са својих n извода на сегменту $[a,x]$ и нека у интервалу (a,x) има извод реда $n+1$. Тада важи једнакост $f(x)=T_n^{f,a}(x)+R_n^{f,a}(x)$, при чему за остатак важи $R_n^{f,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ за неку тачку $c\in(a,x)$.

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Притом $R_n^{f,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ се назива остатак у Лагранжовом облику.

Најчешће користимо остатак у Пеановом облику $R_n^{f,a}(x)=o((x-a)^n)$ $(x\to a)$.

Т (о јединствености) Нека је f дефинисана и непрекидна са својих n извода на сегменту $[a,x]$ и нека у интервалу (a,x) има извод реда $n+1$. Ако за неку полиномску ф-ју $P_n(x)$ важи $f(x)=P_n(x)+o((x-a)^n)$ $(x\to a)$, тада $P_n(x)$ се поклапа са $T_n^{f,a}(x)$.

Маклоренова теорема

Специјално, ако $a=0$, Тејлорову теорему називамо Маклореновом, а Тејлоров полином називамо Маклоренов полином.

$$f(x) = \underbrace{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n} + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

или $f(x) = -\|- + o(x^n)$

Основни Маклоренови разводи

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (\text{кад } n\to\infty,\ x\in\mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}) \quad (-\|-)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (-\|-)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \quad (\text{кад } n\to\infty,\ |x|<1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$$
$$(\text{кад } n\to\infty,\ -1\le x<1)$$

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$
$$\alpha\in\mathbb{R},\ \binom{\alpha}{0} = 1,\ \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (\text{кад } n\to\infty,\ |x|<1)$$

- -

$$tg(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}|B_{2n}|\, x^{2n-1} + o(x^{2n-1})$$
$(\text{кад } n\to\infty,\ |x|<\frac{\pi}{2})$, B_n - Бернулијев број

$$arctg(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad (|x|<1$$

добија се из развоја $f'(x) = (arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$ уз употребу н. развоја и $\int$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad |x|\le 1$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \dots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \quad |x|\le 1$$

Пр. Израчунати $L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{\operatorname{tg}x}\right) =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)\operatorname{tg}x}$

$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(0) + \frac{\operatorname{tg}'(0)}{1!}x + \frac{\operatorname{tg}''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) =$

$= 0 + x + 0 + o(x^2) = x + o(x^2)$

$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad \operatorname{tg}''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$

$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + o(x^2) - (\cancel{x} - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))}{(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))(x + o(x^2))}$

$\ln(1+x) = \ln 1 + \frac{(\ln(1+x))'|_{x=0}}{1!}x + \frac{(\ln(1+x))''|_{x=0}}{2!}x^2 + o(x^2) =$

$= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1$ за $x=0$

$(\ln(1+x))'' = \frac{-1}{(1+x)^2} = -1$ за $x=0$

$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) + x\,o(x^2) - \frac{1}{2}x^2 o(x^2) + o(x^2)o(x^2)}$

$x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

$o(x^n)\cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$

$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{1}{2}$

② Одредити асимптоте ф-ја:

1) $f(x) = x + \frac{1}{3} + \sqrt[3]{x^3+2x^2} = x + \frac{1}{3} + (x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}} =$

$(1+t)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}t + \binom{\alpha}{2}t^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}t^n + o(t^n)$

$= x + \frac{1}{3} + x\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = x + \frac{1}{3} + \left(1 + \binom{\frac{1}{3}}{1}\frac{2}{x} + \binom{\frac{1}{3}}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right.$

$= x + \frac{1}{3} + x\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ до 2 ст.

$= 2x + 1 - \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$y = 2x+1$ је коса

2) $g(x) = x\sin\frac{1}{x} + x^2 + x - x^2 e^{\frac{1}{x}} =$

$= x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) + x^2 + x - x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + o(1) = \frac{1}{2} + o(1)$

$y = \frac{1}{2}$ је хоризонтална асимптота

(3) $f(x) = e^x$ да грешка $|R_n(x)| < 10^{-5}$ за $x \in [-5,5]$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad c \in [0, x], \quad x \in [-5,5]$$

$$|R_n(x)| = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} |x|^{n+1} < 10^{-5}$$

$$\frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} < 10^{-5}$$

Максимум грешке се достиже за $c=5$ и $|x|=5$

$$r_n = \frac{e^5}{(n+1)!} 5^{n+1} < 10^{-5}$$

пробом се добија $n=24$

(4) Апроксимирати $f(x) = 1 + x + \sqrt{x^4 - x^5}$ Маклореновим полиномом 4. степена на сегменту $[0, \frac{1}{3}]$ и проценити грешку.