FIZIKA SI

Časovi 21-24

Temperatura, toplota i termodinamika

Arsoski Vladimir

NANO•OPTO•BIO NOBEL elektronika

odsek za fizičku elektroniku

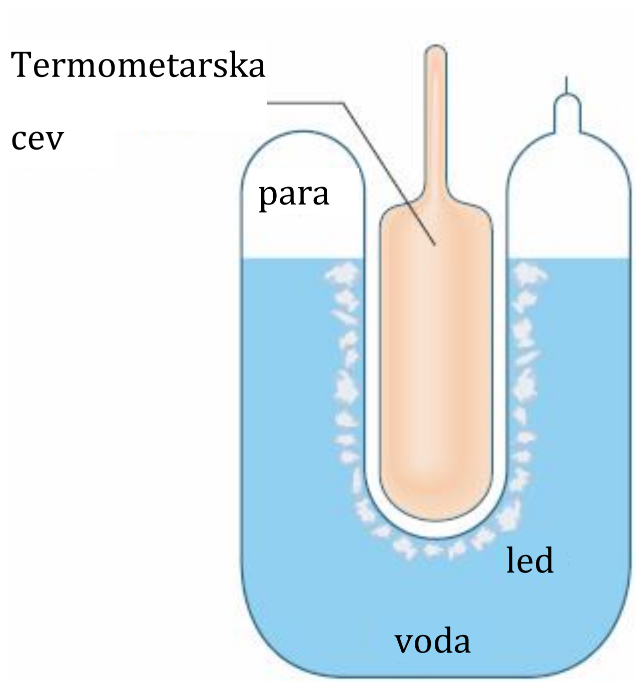
LASERSKA TEHNIKA

http://nobel.etf.bg.ac.yu/

Pojam temperature

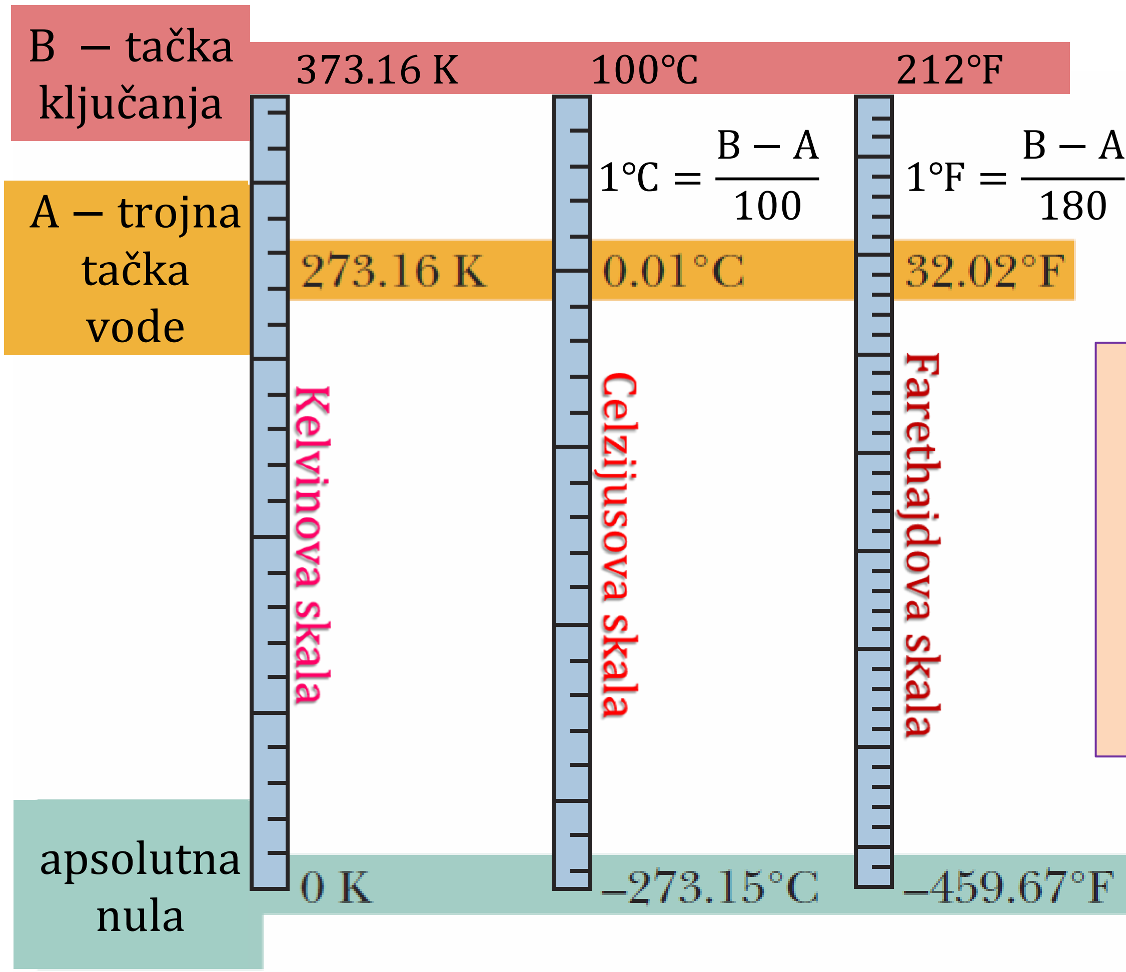
Temperatura je makroskopska veličina koja predstavlja meru zagrejanosti nekog tela izmerena prema definisanoj skali. (Na mikroskopskom nivou ona je mera srednje kinetičke energije neuređenog kretanja atoma i / ili molekula).

Jedinica za temperaturu: [K] Kelvin



Trojna tačka vode (0,01°C)

Temperaturska skala



$$t[\mathrm{K}] = t[^\circ\mathrm{C}] + 273{,}15\mathrm{K}$$

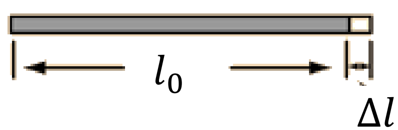
$$t[^\circ\mathrm{C}] = \frac{5}{9}(t[^\circ\mathrm{F}] - 32)^\circ\mathrm{C}$$

$$t[^\circ\mathrm{F}] = \frac{9}{5}t[^\circ\mathrm{C}] + 32^\circ\mathrm{F}$$

Širenje čvrstih tela pri zagrevanju

- Pri zagrevanju čvrsta tela se šire.
- Širenje posmatrano u jednom pravcu je LINEARNO ŠIRENJE (IZDUŽENJE)
- Eksperimentalno je ustanovljeno da je promena dužine sa temperaturom:
$$l_t = l_{0°C}(1 + \alpha t + \alpha' t^2 + \alpha'' t^3 + \cdots)$$
- U opsegu $t \in [0,100]$°C dominantan α ($l_{0°C} = l_0$):
$$l_t \approx l_0(1 + \alpha t)$$
- $\alpha \sim 10^{-5}\,\frac{1}{°C}$ *termički koeficijent linearnog širenja*
- Površinsko širenje: $A = A_0(1 + \beta t), \quad \beta \approx 2\alpha.$
- Zapreminsko širenje: $V = V_0(1 + \gamma t), \quad \gamma \approx 3\alpha.$

Širenje čvrstih tela pri zagrevanju

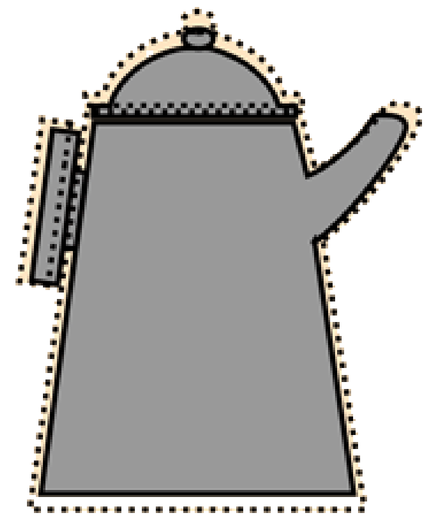


linearna ekspanzija

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha t$$

površinska ekspanzija

$$\frac{\Delta A}{A_0} = 2\alpha t$$



zapreminska ekspanzija

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 3\alpha t$$

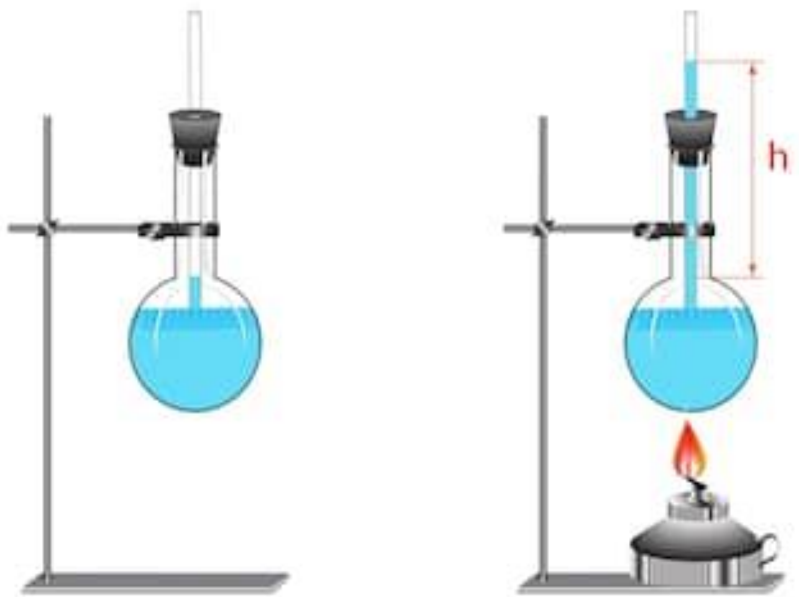
Širenje tečnosti

Zapreminsko širenje:
$$V_t = V_0(1 + \gamma_t t),$$
$$\gamma_t \sim 10^{-3}\ 1/°\mathrm{C}$$

Širi se i sud:
$$V_s = V_0(1 + \gamma_s t),$$
$$\gamma_s \sim 10^{-5}\ 1/°\mathrm{C}$$
$$\gamma_t \gg \gamma_s$$

Prividno širenje:
$$V_t - V_s = V_0(\gamma_t - \gamma_s)t.$$

Primetna promena gustine:
$$\rho_t = \frac{\rho_0}{(1 + \gamma_t t)}$$
kada $t \uparrow$ tada $\rho \downarrow$

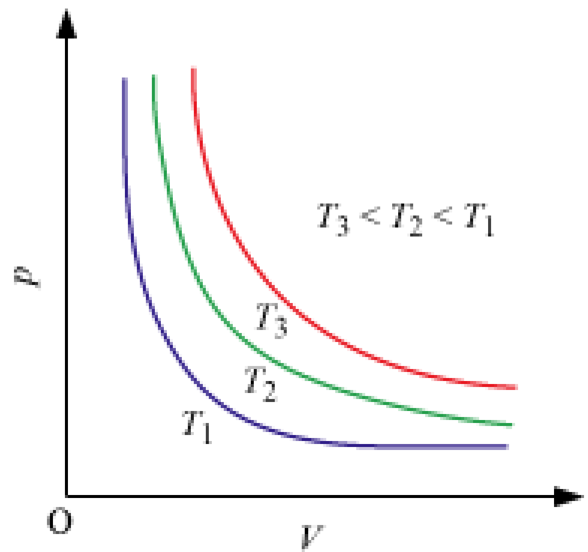


Širenje tečnosti pri zagrevanju

Promena stanja idealnog gasa pri $T = const$ (Bojl-Mariotov zakon)

Proizvod pritiska i zapremine gasa pri konstantnoj temperaturi je konstantan.

$$pV = p_0V_0 = const$$
$$T = T_0 = const$$
$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}$$



$Boyle - Mariotte$

Za gas zatvoren u posudi $m = const$

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

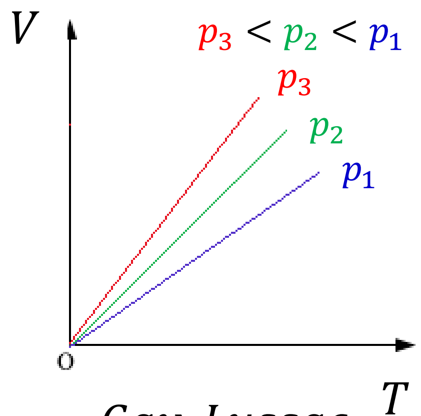
Promena stanja idealnog gasa pri $p = const$ (Šarloov=Gej-Lisakov zakon I)

$$(1+\gamma t) = 1 + \frac{t[°C]}{273,15K} = \frac{t[°C] + 273,15K}{273,15K} = \frac{T[K]}{T_0[K]}$$

Eksperimentalno ustanovljeno:

$V = V_0(1+\gamma t)$,

$\gamma = \dfrac{1}{273,15\ \mathrm{K}}$ isto za sve gasove



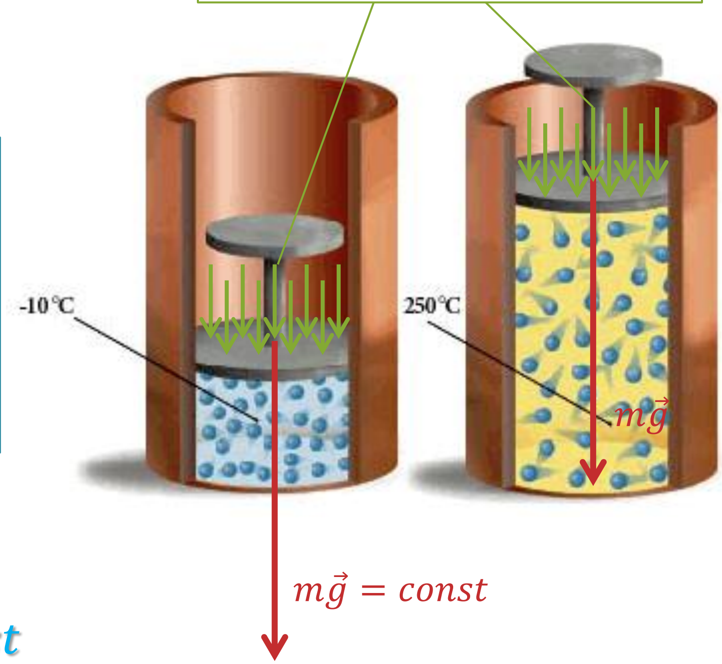
$Gay, Lussac,$
$Jacques\ Charles$

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0} = const$$

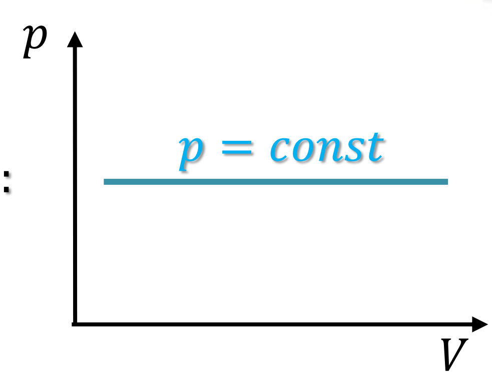
$$p = p_0 = const$$

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

$$p = p_a + \frac{mg}{S} = const$$



Izobara ($p = const$):



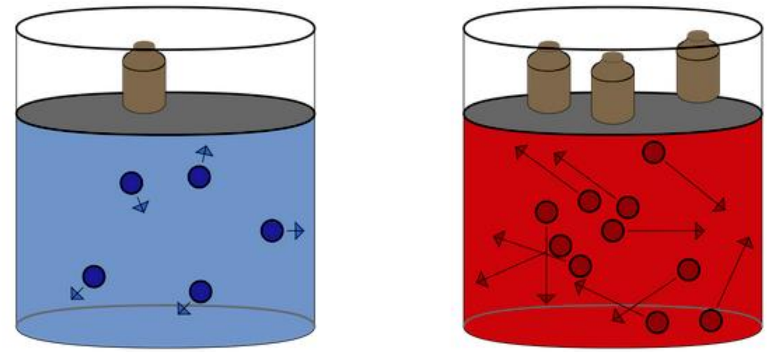
Promena p gasa pri zagrevanju pri $V = const$ (Šarloov=Gej-Lisakov zakon II)

$$(1+\gamma t) = 1 + \frac{t[^\circ C]}{273{,}15K} = \frac{t[^\circ C] + 273{,}15K}{273{,}15K} = \frac{T[K]}{T_0[K]}$$

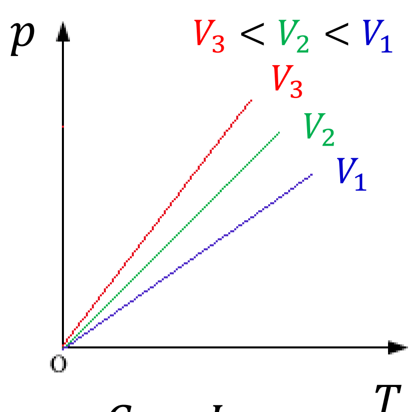
Eksperimentalno ustanovljeno:

$$p = p_0(1+\gamma t),$$

$$\gamma_p = \gamma = \frac{1}{273{,}15\ \mathrm{K}}$$ isto za sve gasove



$$V_1 = V_2 = const$$

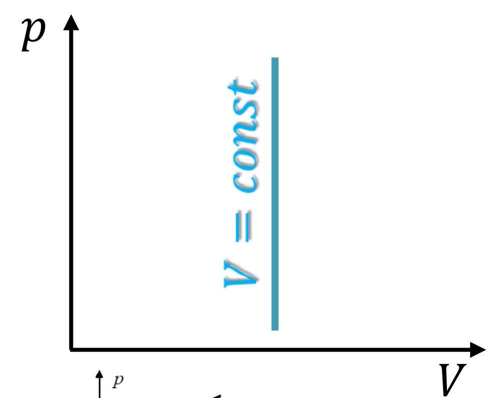


Gay, Lussac, Jacques Charles

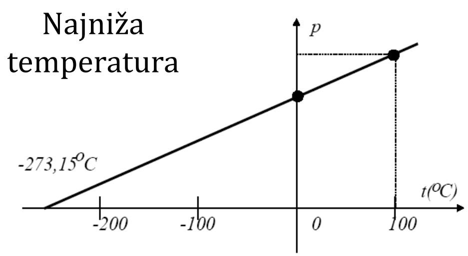
$$\frac{p}{T} = \frac{p_0}{T_0} = const$$

$$V = V_0 = const$$

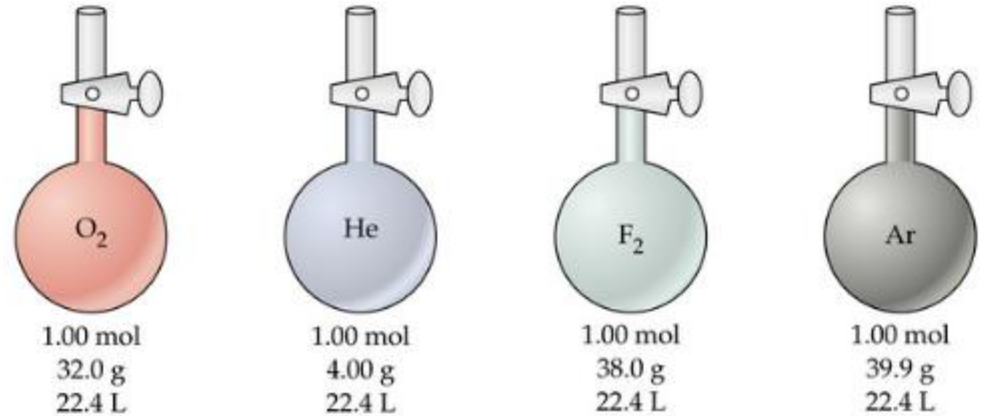
$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$



Najniža temperatura



Avogadrov zakon



Različiti gasovi jednake zapremine i na istom pritisku i temperaturi imaju isti broj molekula. U jednom molu ($n_m = 1$ mol) koji pri norm. atm. usl. ima zapreminu $V_m = 22{,}415\ \mathrm{l/mol}$ ima $N_a = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ atoma.

Zapremina n_m molova pri n. a. u. : $V_0 = n_m V_m$

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_0 n_m V_m}{T_0} = n_m \frac{101325\ \mathrm{Pa} \cdot 22{,}4\ \mathrm{l}}{273{,}15\ \mathrm{K}} = n_m \cdot 8{,}314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}}$$

$$pV = n_m RT$$

$R = 8{,}314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}}$ – univerzalna gasna const.

m_a – atomska(molekulska)masa,
m – masa gasa, M – molarna masa

$n_m = \frac{m}{M} = \frac{m}{m_a N_a} = \frac{N}{N_a}$,

Jednačina stanja idealnog i realnog gasa

Za idealne gasove:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = const$$

$$pV = n_mRT$$

Za realne gasove (Van der Waalsova jednačina)

$$\left[p + \frac{a}{(V/n_m)^2}\right](V - n_mb) = n_mRT$$

Vrsta gasa	$a[\mathrm{Nm^4mol^{-2}}]$	$b[\mathrm{m^3mol^{-1}}]$
Vazduh	$1,358 \cdot 10^{-3}$	$3.64 \cdot 10^{-5}$
O_2	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$
N_2	$1,361 \cdot 10^{-3}$	$3.85 \cdot 10^{-5}$
CO_2	$3,643 \cdot 10^{-3}$	$4.27 \cdot 10^{-5}$
He	$0,0341 \cdot 10^{-3}$	$2,34 \cdot 10^{-5}$

Primer: jednačina stanja

Molarna masa vazduha je $M = 29\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$. Kolika je masa vazduha u sobi dimenzija $6\ \mathrm{m} \times 4\ \mathrm{m} \times 3\ \mathrm{m}$ pri atmosferskom pritisku $p_0 = 100\ \mathrm{kPa}$ i temperaturi $t_0 = 27℃$? Univerzalna gasna konstanta $R = 8{,}31\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol} \cdot \mathrm{K}}$.

Rešenje:

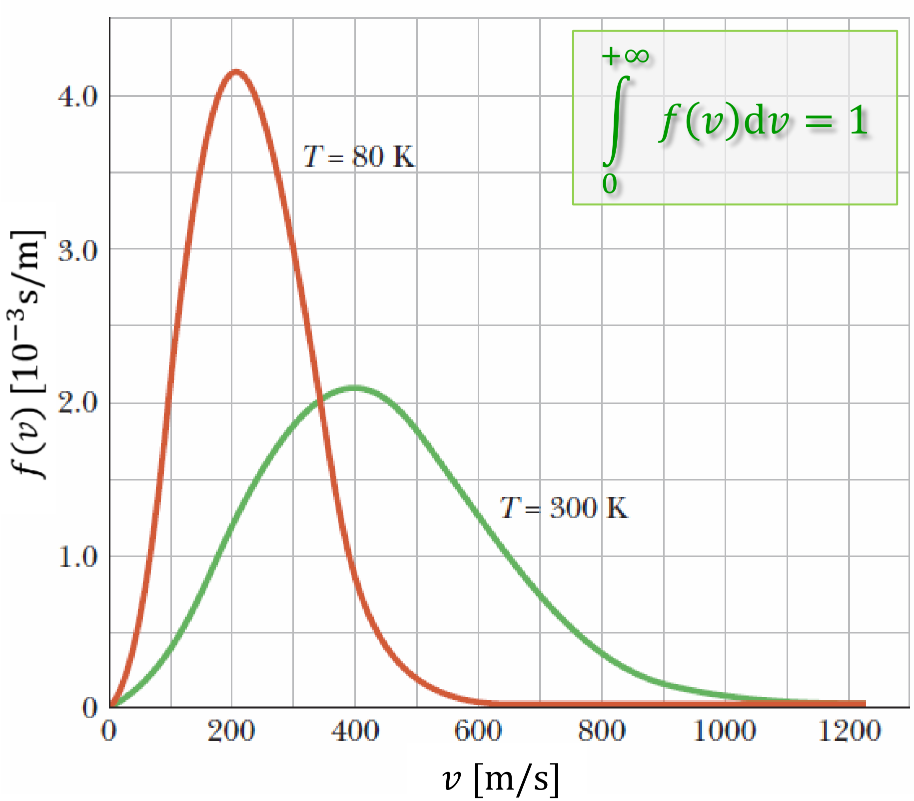
Temperatura u Kelvinima je $T_0 = 273{,}15\ \mathrm{K} + t_0 = 300{,}15\ \mathrm{K}$.

Iz jednačine stanja idealnog gasa:

$$n_m = \frac{p_0 V_0}{R T_0} \equiv \frac{m}{M} \Longrightarrow m = \frac{p_0 V_0 M}{R T_0} \approx 84\ \mathrm{kg}.$$

Kinetička teorija gasova: Maksvelova raspodela brzina čestica

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m_a}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_a v^2}{2k_B T}} \xrightarrow{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0} v_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_a}}$$ – maksimalna brzina



$$\int_0^{+\infty} f(v)\mathrm{d}v = 1$$

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} v f(v)\mathrm{d}v$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_a}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$ – srednja brzina

$$v_{eff}^2 = \overline{v^2} = \int_0^{+\infty} v^2 f(v)\mathrm{d}v$$

$$v_{eff} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_a}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$ – efektivna brzina

$$R = k_B N_a$$

Primer: kinetička teorija

U zatvorenom sudu se nalazi idealan gas na temperaturi $T_0 = 300$ K. Za koliko se promeni temperatura gasa, ako se efektivna brzina molekula poveća za 10 %?

Rešenje:

Efektivna brzina molekula gasa srazmerna je $\sqrt{T}$:

$$v_{eff,1} = const \cdot \sqrt{T_1},$$

$$v_{eff,2} = const \cdot \sqrt{T_2} = 1{,}1 v_{eff,1}.$$

$$\frac{v_{eff,2}}{v_{eff,1}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = 1{,}1 \Longrightarrow T_2 = 1{,}21 T_1 = 363 \text{ K}.$$

Temperatura poraste za 63 K(= 63°C).

Pritisak na zidove suda

Promena impulsa čestice pri incide - nciji sa osenčenim zidom:

$$\Delta p_x = -m_a v_x - (m_a v_x),$$

gde je vreme između dva sudara:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}.$$

Stoga je sila kojom jedna čestica deluje na osenčen zid:

$$F_x = -\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{m_a v_x^2}{L}.$$

Za N atoma u kutiji:

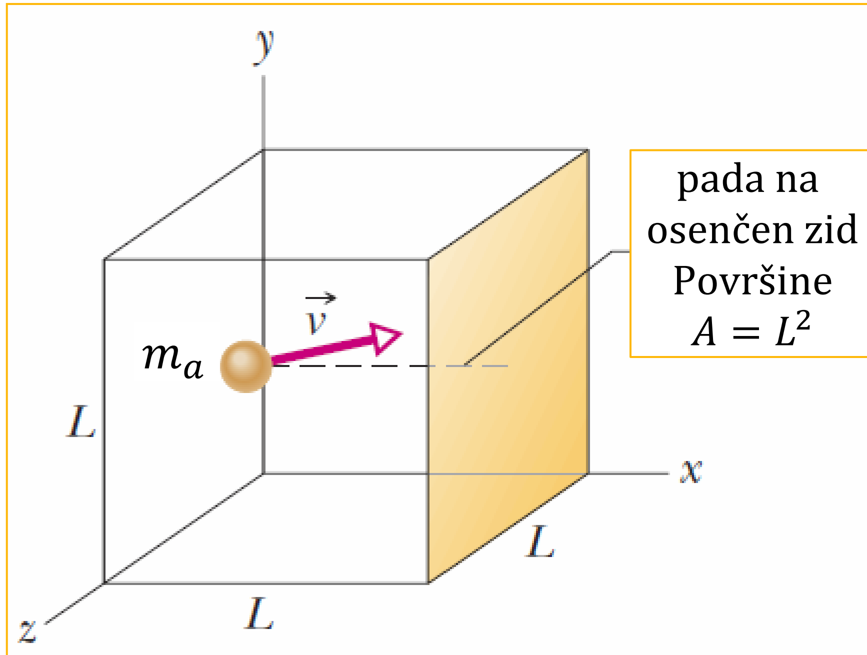
$$F_x = \frac{m_a\left(v_{x,1}^2 + \cdots + v_{x,N}^2\right)}{L} = \frac{N m_a \overline{v_x^2}}{L},$$

gde je:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{\overline{v^2}}{3},$$

pa je pritisak na osenčen zid:

$$p = \frac{F_x}{A} = \frac{N m_a}{3L^3}\overline{v^2} = \frac{N m_a}{3V}\frac{3k_B T}{m_a}.$$



Slučaj čestice u kutiji (kockastoj) ivice L

Pritisak gasa na zid suda

$$p = \frac{N}{V} k_B T = n k_B T$$

$n = \frac{N}{V}$ – konc. gasa

Za k različitih gasova u sudu (*Dalton*):

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Kinetička energija molekula i stepeni slobode

$$f(v)\mathrm{d}v = f(E)\mathrm{d}E$$

$$\boxed{f(E) = \frac{2}{\pi}\sqrt{E}(k_B T)^{-3/2} e^{-\frac{E}{k_B T}}}$$

Srednja kinetička energija usled translacije:

$$\bar{E} = \int_0^{+\infty} E f(E)\mathrm{d}E = \frac{3}{2} k_B T$$

broj stepeni slobode pri translaciji

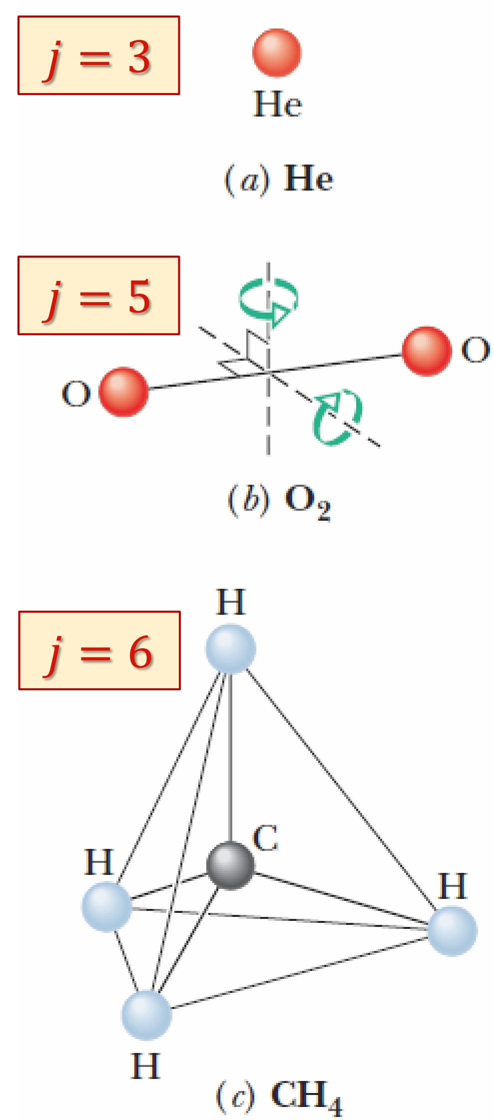
Najverovatnija energija:

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k_B T}$$

Ukupna srednja kinetička energija:

$$\boxed{\bar{E} = \frac{j}{2} k_B T}$$

j – broj stepeni slobode



Pojam toplote i specifična toplota

Prenos energije između dva tela, koji se odvija usled razlike temperatura, naziva se prenosom toplote.
Energija koja se prenese je toplota.

Ako se telo zgreje od temperature t_1 do t_2, preda mu se količina toplote:

$$Q = mc(t_2 - t_1),$$

gde je c $-$ *specifična toplota tela* $\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\right]$.

Generalno c zavisi od temperature:

$$Q = m\int_{t_1}^{t_2} c\,dt\,.$$

Alternativno:

$$Q = n_m C(t_2 - t_1),$$

C $-$ atomska i molekulska (*molarna*) specifična toplota $\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}\right]$.

Za većinu čvrstih materijala $C \cong 25\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}} \approx 3R$ $-$ zakon Dulong $-$ Petita!

Primer: mešanje tečnosti različitih temperatura

Dva kilogram vode na temperaturi 303 K pomeša se sa kilogramom vode na temperaturi 60°C. Kolika je temperatura smeše?

Rešenje:
Temperatura $t_1 = (303 - 273)°\mathrm{C} = 30°\mathrm{C}$.
Neka je konačna temperatura smeše t_s.
Toplota koju preda voda mase m_2 da se ohladi do t_s je:

$$\Delta Q = m_2 c(t_2 - t_s),$$

iskoristi se da se voda mase m_1 zagreje do t_s:

$$\Delta Q = m_1 c(t_s - t_1),$$

odakle se dobija:

$$t_s = \frac{2t_1 + t_2}{3} = 40°\mathrm{C}.$$

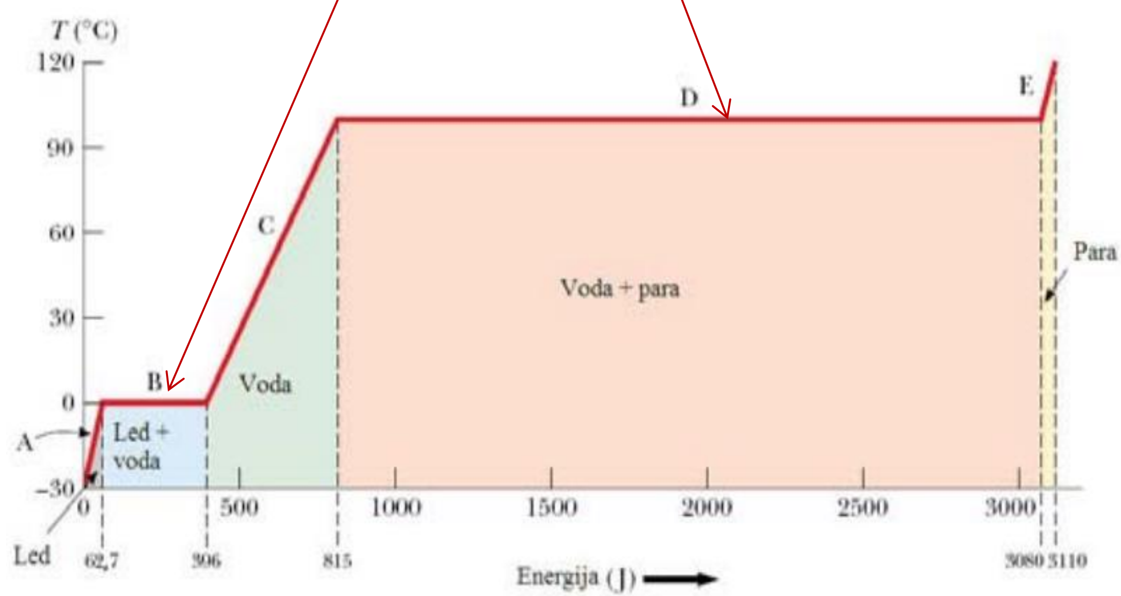
Latentna toplota

Toplota koja se razmeni kada telo mase m promeni agregatno stanje:

$$Q = m \cdot q_i,$$

gde je q_i – latentna toplota (topljenja – isparavanja).

Pri faznom prelazu temperatura je konstantna!



Zavisnost temperature vode od dovedene toplote

Primer: mešanje dva agregatna stanja iste supstance

U $m_1 = 100$ g vode na temperaturi $t_1 = 36°\text{C}$ ubaci se komad leda mase $m_2 = 50$ g na temperaturi $t_2 = -20°\text{C}$. Specifična toplota vode i leda su $c_v = 4{,}2\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg°C}}$ i $c_l = 2{,}1\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg°C}}$, redom. Toplota topljenja leda je $q_t = 335\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$.
Koliko ostane leda u posudi nakon uspostavljanja termodinamičke ravnoteže?
Kolika je temperatura smeše vode i leda?

Rešenje:
Pri hlađenju do temperature 0°C voda preda količinu toplote:

$$\Delta Q_1 = m_1 c_v (t_1 - 0°\text{C}) = 15{,}12\ \text{kJ}.$$

Ta toplota se koristi na zagrevanje leda do tačke topljenja:

$$\Delta Q_2 = m_2 c_l (0°\text{C} - t_2) = 2{,}1\ \text{kJ}$$

i na topljenje leda mase m_x:

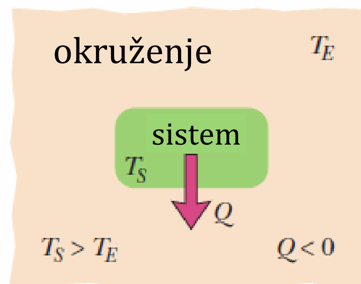
$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + m_x q_t,$$

odakle je masa istopljenog leda $m_x = 38{,}87$ g, pa je ostalo 11,13 g leda.
Da smo dobili $m_x > 50$ g, to bi značilo da je ΔQ_1 dovoljno da rastopi sav led, pa bi se višak iskoristio za podizanje temperature vode (rastopljenog leda do t_s).
Temperatura smeše je 0°C (pri faznom prelazu temperatura je konstantna te je stoga, u ovom slučaju, jednaka tački topljenja leda $t_t = 0°\text{C}$).

Nulti princip termodinamike

Sistemi su u termičkoj ravnoteži samo ako su im temperature jednake!

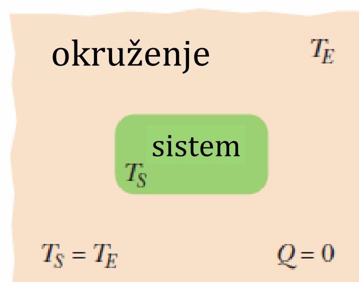
Sistem ima veću temperaturu od okoline ⟹



... on odaje energiju u vidu toplote.

(*a*)

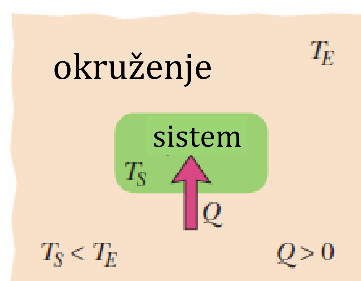
Sistem ima istu temperaturu kao i okolina ⟹



... ne postoji prenos energije (toplote).

(*b*)

Sistem ima nižu temperaturu od okoline ⟹



... on prima energiju u vidu toplote.

(*c*)

Prvi princip termodinamike

Termodinamički sistem koji interaguje sa okruženjem razmenjuje energiju putem razmene količine toplote i vršenjem rada!

Količina toplote koja se razmenjena sa sistemom jednaka je zbiru promene unutrašnje energije i izvršenom radu:

$$Q = A + \Delta U,$$

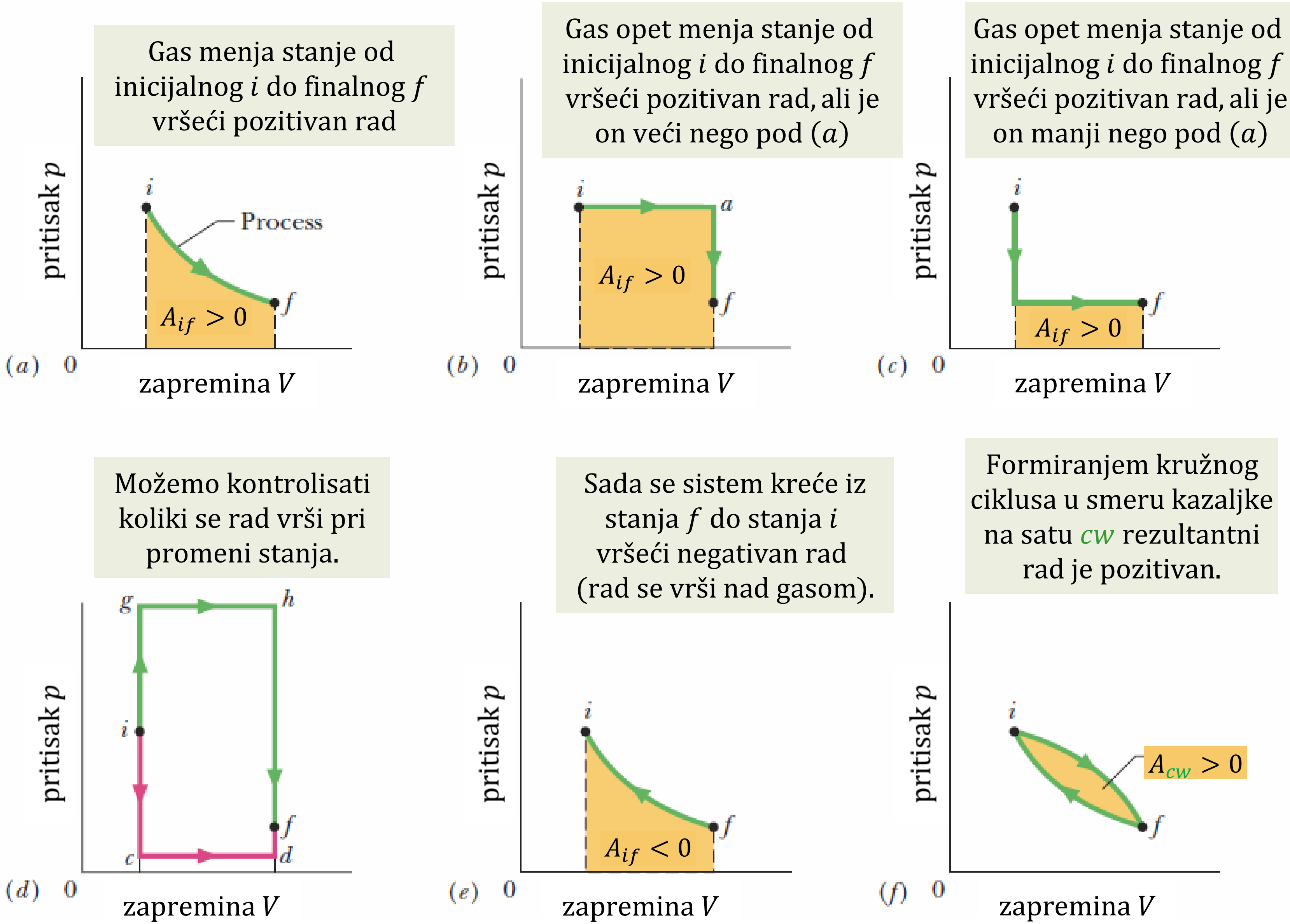
ili u diferencijalnom obliku:

$$\delta Q = \delta A + \mathrm{d}U.$$

U opštem slučaju $\mathrm{d}A = p\mathrm{d}V$, dok je $U = U(p, V)$, ili na osnovu jednačine stanja $U = U(T, V)$. Za idealan gas:

$$U = U(T).$$

Rad $A = \int_i^f p dV$



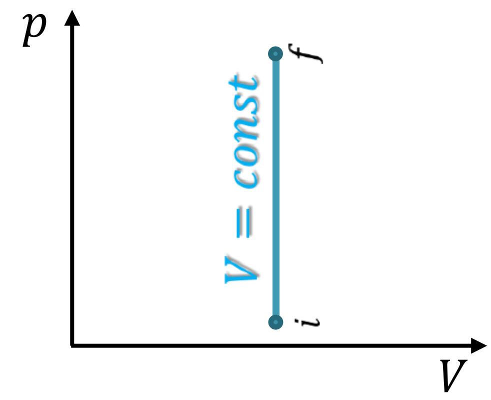
Izohorksi proces: Specifična toplota idealnog gasa pri $V = const$

Kod izohorskog procesa $V = const$, pa je $\mathrm{d}V = 0 \Rightarrow \mathrm{d}A = 0$, pa se sva toplota razmenjena sa sistemom jednaka promeni unutrašnje energije (kinetičke energije čestica):

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U$$

gde je:

$$\mathrm{d}U = N\mathrm{d}E_k = (n_m N_a)\frac{j}{2}k_B\mathrm{d}T = n_m\frac{j}{2}R\mathrm{d}T.$$



Izohora ($V = const$)

$$\boxed{dQ\Big|_{V=const} = dU = n_m C_V dT}$$

$$\boxed{C_V = \frac{j}{2}R}$$

$$\boxed{\Delta Q_{if} = \Delta U_{if} = n_m C_V \Delta T_{if}}$$

$$\boxed{A_{if} = 0}$$

$$\boxed{\Delta T_{if} = T_f - T_i}$$

Izobarski proces: Specifična toplota gasova pri $p = const$

Kod izobarskog procesa $p = const$, pa je:

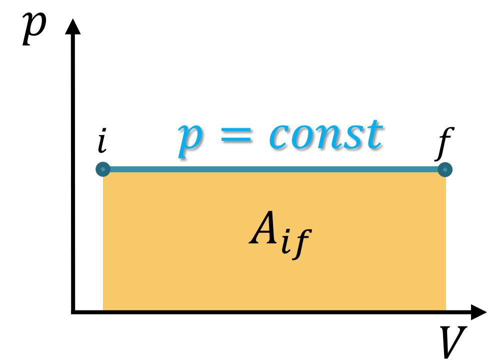
$$d(pV) = p\mathrm{d}V = dA = n_m R\mathrm{d}T,$$

pa je toplota razmenjena sa sistemom:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}A + \mathrm{d}U = n_m R\mathrm{d}T + n_m \frac{j}{2} R\mathrm{d}T,$$

odakle je:

$$\mathrm{d}Q = n_m \left(\frac{j}{2} + 1\right) R\mathrm{d}T = n_m C_p \mathrm{d}T.$$



Izobara ($p = const$)

$$\boxed{\mathrm{d}Q\Big|_{p=const} = n_m C_p \mathrm{d}T}$$

$$\boxed{C_p = \frac{j+2}{2} R = R + C_V}$$

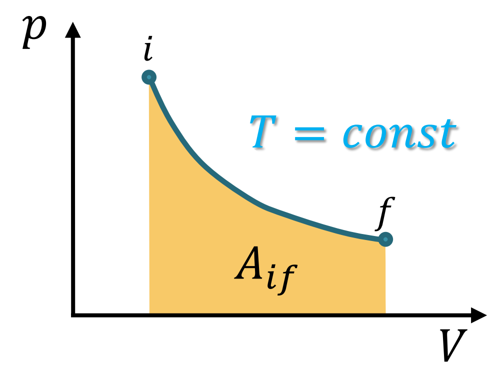
$$\boxed{\Delta Q_{if} = n_m C_p \Delta T_{if}} \quad \boxed{\Delta U_{if} = n_m C_V \Delta T_{if}} \quad \boxed{A_{if} = p\Delta V_{if}}$$

$$\boxed{\Delta T_{if} = T_f - T_i} \quad \boxed{\Delta V_{if} = V_f - V_i}$$

Izotermski proces: $T = const$

Kod izotermskog procesa $T = const$, pa je $\mathrm{d}T = 0$, te je $\mathrm{d}U = n_m C_V \mathrm{d}T = 0$.
Toplota razmenjena sa sistemom je:

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}A = p\mathrm{d}V = n_m RT \frac{\mathrm{d}V}{V}.$$



Izoterma ($T = const$)

$$\boxed{\mathrm{d}Q\Big|_{T=const} = \mathrm{d}A = n_m RT\frac{\mathrm{d}V}{V}}$$

$$\boxed{\mathrm{d}U\Big|_{T=const} = 0}$$

$$\boxed{\Delta Q_{if} = A_{if} = n_m RT \ln\frac{V_f}{V_i}}$$

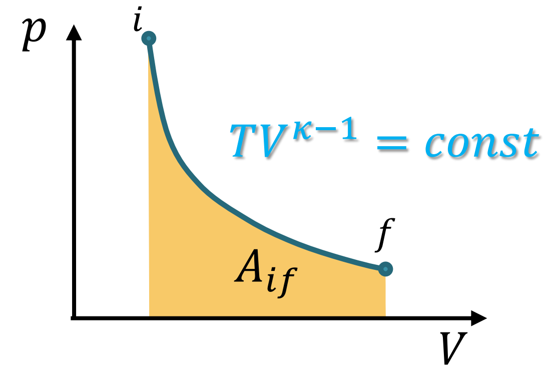
$$\boxed{\Delta U_{if} = 0}$$

$$\boxed{T = T_f = T_i = const}$$

Adijabatski proces: $\mathrm{d}Q = 0$ $(pV^{\kappa} = const)$

Adijabatski proces je veoma brz te nema dovoljno vremena da dođe do razmene toplote!
Kod adijabatskog procesa $\mathrm{d}Q = 0$, te je

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U = -n_m C_V \mathrm{d}T.$$



Adijabata $(pV^{\kappa} = const)$

$$\boxed{pV^{\kappa} = const} \quad \boxed{TV^{\kappa-1} = const}$$

$$\boxed{\mathrm{d}Q = 0} \quad \boxed{\mathrm{d}A = -\mathrm{d}U = -n_m C_V \mathrm{d}T}$$

$$\boxed{\Delta Q_{if} = 0} \quad \boxed{\Delta U_{if} = n_m C_V \Delta T_{if} = -A_{if}}$$

$$\boxed{\Delta T = T_f - T_i}$$

Politropski proces: $pV^n = const$*

U praksi promena stanja nikada nije idealna (izohorski, izobarski, izotermski ili adijabatski) već je pre definisana funkcijom:

$$\boxed{pV^n = const,}$$

gde n predstavlja stepen politrope, a sam proces se zove ***politropski***.
Kako je $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A$, onda je $n_m C\mathrm{d}T = n_m C_V \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V$, tj.

$$p\mathrm{d}V = n_m(C - C_V)\mathrm{d}T.$$

Iz jednačine stanja idealnog gasa: $\mathrm{d}(pV) = p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = n_m R\mathrm{d}T$, pa je

$$V\mathrm{d}p = n_m R\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V = n_m(R - C + C_V)\mathrm{d}T = n_m\left(C_p - C\right)\mathrm{d}T,$$

pa iz prethodnih jednačina sledi:

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{C_p - C}{C_V - C}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -n\frac{\mathrm{d}V}{V} \Longrightarrow$$

$$\boxed{pV^n = const,} \qquad \boxed{n = \frac{C_p - C}{C_V - C},} \qquad \boxed{C = C_V\frac{n - \kappa}{n - 1}.}$$

$$\boxed{\mathrm{d}Q = n_m C\mathrm{d}T} \qquad \boxed{\mathrm{d}U = n_m C_V \mathrm{d}T}$$

$$\boxed{\Delta Q_{if} = n_m C\Delta T_{if}} \qquad \boxed{\Delta U_{if} = n_m C_V \Delta T_{if}} \qquad \boxed{A_{if} = \Delta Q_{if} - \Delta U_{if}}$$

Primer: termodinamički procesi

Jedan mol idealnog dvoatomskog gasa se izotermički širi iz stanja sa zapre - minom V_1 u stanje gde ima zapreminu $V_2 = 10V_1$, a zatim adijabatski širi do zapremine $V_3 = 20V_1$. Konačna temperatura gasa je $T_3 = 600$ K.
Kolika količina toplote je dovedena pri ekspanziji od V_1 do V_2?
Univerzalna gasna konstanta $R = 8{,}31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}\cdot\mathrm{K}}$.

Rešenje:

Gas je dvoatomski ($j = 5$) pa je $\kappa = \frac{j+2}{j} = \frac{7}{5}$.

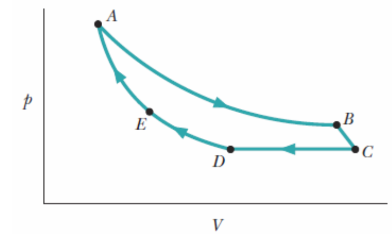
Za adijabatski proces $2 \rightarrow 3$ važi:

$$T_3 V_3^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1} \Longrightarrow T_2 = T_3 2^{2/5}.$$

Toplota dovedena gasu pri izotermskoj ekspanziji $1 \rightarrow 2$ jednaka je radu koji izvrši gas ($T_1 = T_2 = T = \mathrm{const} \Longrightarrow \mathrm{d}U = n_m C_v \mathrm{d}T = 0 \Longrightarrow \mathrm{d}Q = \mathrm{d}A$):

$$\Delta Q_{12} = n_m R T_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = n_m R T_3 2^{2/5} \ln(10) = 15{,}15\ \mathrm{kJ}.$$

Toplotna mašina



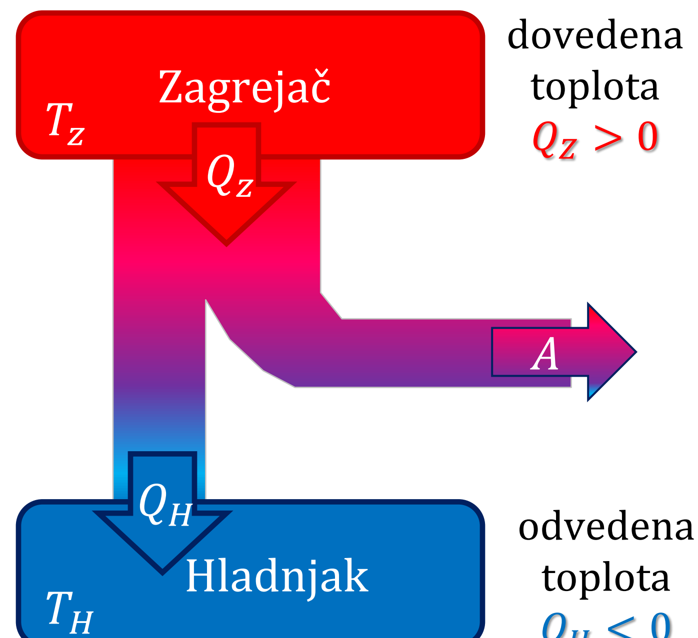
Cikličan proces

Ideja da se toplotna energija konvertuje u rad.
U cikličnom procesu uzima se energija iz izvora toplote (***zagrejavača***) na relativno visokoj temperaturi, vrši se rad i oslobađa se ostatka toplote predajući je toplotnom ponoru (***hladnjaku***) koji je na relativno niskoj temperaturi. Proces je cikličan (sistem se vraća u početno stanje) te je $U_i = U_f \Rightarrow \Delta U_{if} = 0$, pa je razlika dovedene i odvedene toplote jednaka radu: $\Delta Q = A \Rightarrow A = Q_Z + Q_H = Q_Z - |Q_H|$.

Definiše se ***termički stepen korisnog dejstva*** toplotne mašine:

$$\boxed{\eta_t = \frac{A}{Q_Z} = 1 - \frac{|Q_H|}{Q_Z}}$$

koji daje koji je deo toplote konvertovan u rad.



Šematski prikaz toplotne mašine

Drugi princip termodinamike

1. Sistem ne može da obavi takav proces u kome uzima energiju iz toplotnog rezervoara na jednoj temperaturi i konvertuje toplotu potpuno u mehanički rad vrativši se u početno stanje.

2. Clausius: Toplota spontano može prelaziti samo sa toplijeg na hladnije telo!

3. Planck: Nemoguć je perpetuum mobile druge vrste.

4. Boltzmann: Priroda teži prelazu iz manje verovatnog u više verovatno stanje.

...

...

Za dodatna objašnjenja i definicije uvodi se entropija!

5. Entropija izolovanog sistema nikada ne opada:

$$S \geq 0 \,!$$

Procesi u prirodi se obavljaju prema stanju veće haotičnosti!

Entropija

Entropija predstavlja meru neuređenosti sistema. Suštinsku definiciju daje statistička fizika (srazmerna je logaritmu broja mikrostanja i konstanti k_B). Infitezimalna promena entropije reverzibilnog procesa je:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

$$\Delta Q = \int T\mathrm{d}S$$

Promena entropije reverzibilnih (ravnotežnih) procesa:

1. Izohorski ($V = const$), $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U = n_m C_V \mathrm{d}T$, $\mathrm{d}S = \dfrac{\mathrm{d}Q}{T} = n_m C_V \dfrac{\mathrm{d}T}{T} \Longrightarrow$

$$\Delta S_{if}(V = const) = n_m C_V \ln \frac{T_f}{T_i}.$$

2. Izobarski ($p = const$), $\mathrm{d}Q = n_m C_p \mathrm{d}T \Longrightarrow$

$$\Delta S_{if}(p = const) = n_m C_p \ln \frac{T_f}{T_i}.$$

3. Izotermski ($T = const$), $\mathrm{d}Q = dA = p\mathrm{d}V = n_m RT \dfrac{\mathrm{d}V}{V}$, $\mathrm{d}S = n_m R \dfrac{\mathrm{d}V}{V} \Longrightarrow$

$$\Delta S_{if}(T = const) = n_m R \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

4. Adijabatski ($\mathrm{d}Q = 0$): $\mathrm{d}S = 0 \Longrightarrow \Delta S_{if} = 0 \Longrightarrow$

$$S = const\ !$$

Entropija i zatvoreni procesi

Promena entropije zatvorenog (kružnog) procesa (ciklusa) sačinjenog od reverzibilnih procesa (izohorski, izobarski, izotermski i adijabatski) je jednaka 0!

Integral za jedan puni ciklus:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \rightarrow \begin{cases} = 0, & \text{reverzibilne} \\ < 0, & \text{ireverzibilne} \end{cases}.$$

Kod ireverzibilnih procesa deo energije (toplote) Q je izgubljen u toku ciklusa!

Entropija izolovanog sistema nikada ne može da opada. Ona ostaje konstantna za reverzibilne cikluse, ili raste kod ireverzibilnih ciklusa:

$$\Delta S \geq 0.$$

Entropija je aditivna veličina i u procesima se može izračunati samo njena promena.

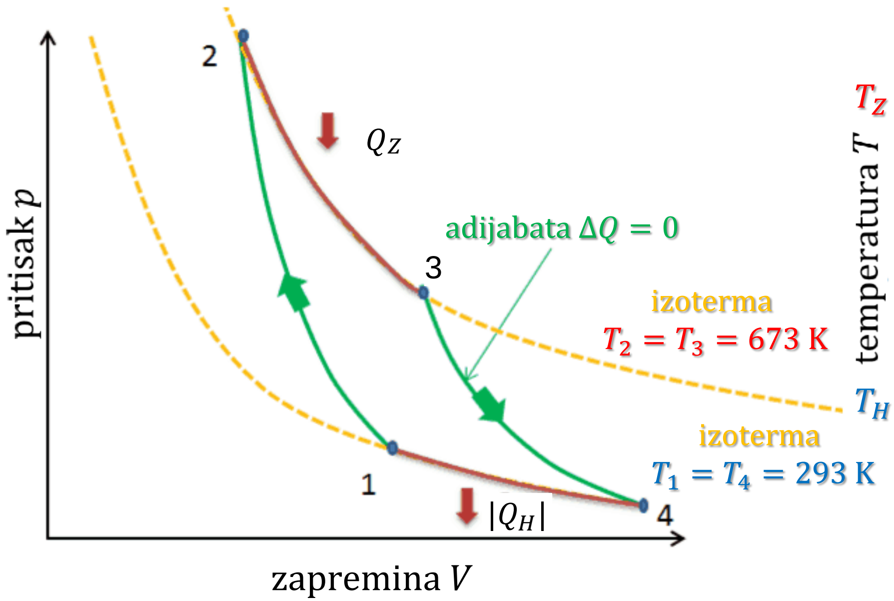
Walther Nernst: Nulti nivo entropije uzima stanje na apsolutnoj nuli:

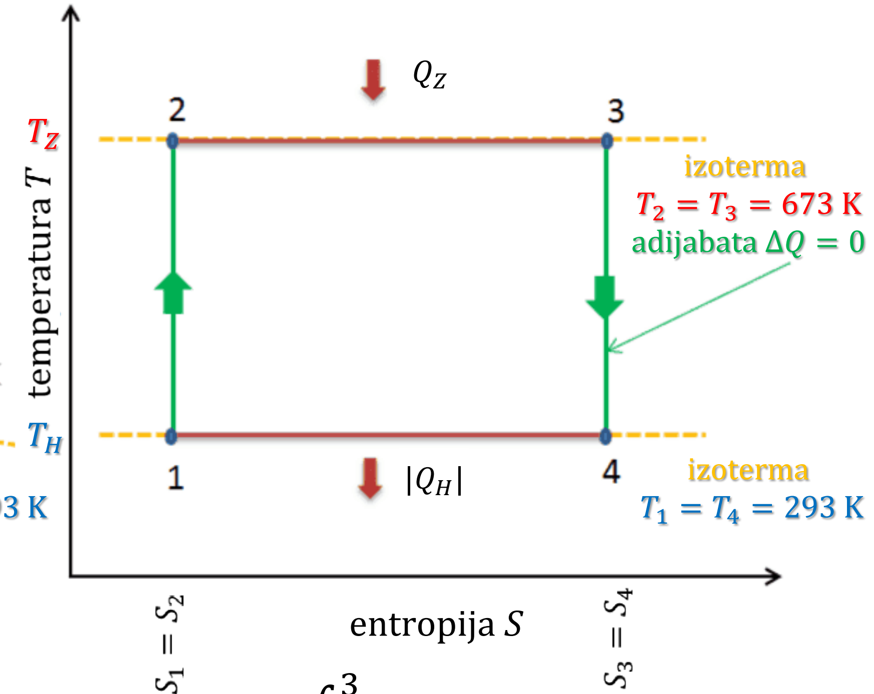
$$S_0 = S(T = 0\mathrm{K}) = 0 .$$

Entropija se može uzeti kao vrednost u odnosu na nulto stanje.

Karnoov ciklus

Ne postoji toplotna mašina koja bi radila između 2 toplotna rezervoara i imala $\eta > \eta_{tC}$





izoterma: $Q_{23} = Q_Z = n_m R T_Z \ln\dfrac{V_3}{V_2} > 0$

izoterma: $Q_{41} = Q_H = -n_m R T_H \ln\dfrac{V_4}{V_1} < 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{adijabata: } T_Z V_2^{\kappa-1} = T_H V_1^{\kappa-1} \\ \text{adijabata: } T_Z V_3^{\kappa-1} = T_H V_4^{\kappa-1}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}$$

$$Q_Z = \int_2^3 T_Z \mathrm{d}S = T_Z(S_3 - S_2)$$

$$Q_H = \int_2^3 T_H \mathrm{d}S = T_H(S_1 - S_4)$$

$$\eta_{tC} = 1 - \frac{|Q_H|}{Q_Z} = 1 - \frac{T_H}{T_Z}$$

Primer: Karnoov ciklus

Termički koeficijent (stepen) korisnog dejstva Karnoovog ciklusa iznosi 0,5. Za koliko procenata treba sniziti temperaturu hladnjaka T_H da bi se termički stepen korisnog dejstva povećao na 0,6.

Rešenje:
Termički stepen korisnog dejstva Karnoovog ciklusa je:

$$\eta = 1 - \frac{T_H}{T_Z}.$$

Kada se teperatura hladnjaka smanji na T'_H, termički stepen korisnog dejstva je:

$$\eta' = 1 - \frac{T'_H}{T_Z}.$$

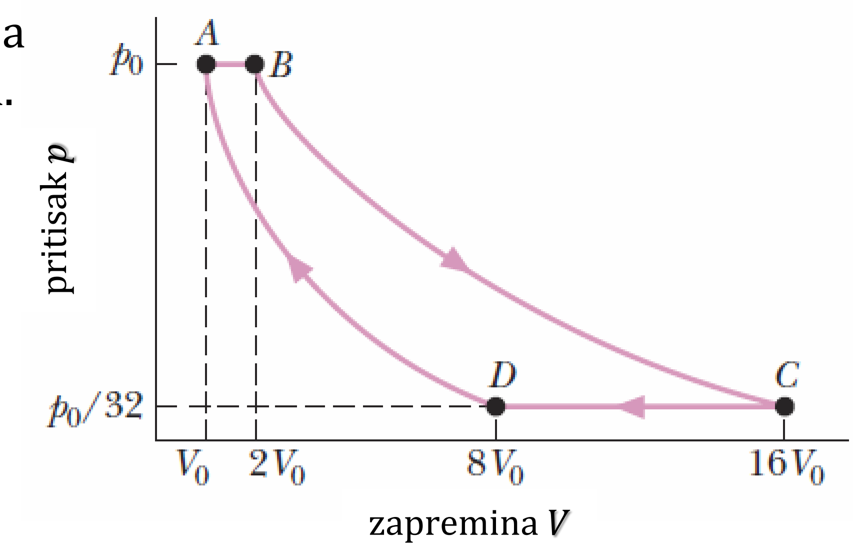
Eliminacijom T_Z se dobija:

$$\frac{T'_H}{T_H} = \frac{1-\eta'}{1-\eta} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 80\ \%.$$

Temperaturu hladnjaka treba smanjiti za 20 %.

Primer: ciklus

Jedan mol idealnog gasa je radna smeša motora koji radi prema ciklusu na slici. Procesi BC i DA su adijabatski.
(a) Da li je gas jednoatomski, dvoatomski ili višeatomski?
(b) Koliki je stepen korisnog dejstva motora?



Rešenje:
(a) Proces DA je adijabatski pa je:

$$p_A V_A^\kappa = p_D V_D^\kappa \Longrightarrow p_0 V_0^\kappa = \frac{p_0}{32}(8V_0)^\kappa \Longrightarrow \kappa = \frac{5}{3} - jednoatomski.$$

(b) Toplote dovedene od zagrejavača i predate hladnjaku su:

$$Q_Z = Q_{AB} = n_m C_p(T_B - T_A) = \frac{j+2}{2}(n_m R T_B - n_m R T_A) = \frac{j+2}{2}(p_B V_B - p_A V_A),$$

$$|Q_H| = |Q_{CD}| = n_m C_p(T_C - T_D) = \frac{j+2}{2}(n_m R T_C - n_m R T_D) = \frac{j+2}{2}(p_C V_C - p_D V_D).$$

Termički stepen (koeficijent) korisnog dejstva motora je:

$$\eta_t = \frac{|A|}{Q_Z} = 1 - \frac{|Q_H|}{Q_Z} = 1 - \frac{\frac{p_0}{32}\cdot 16V_0 - \frac{p_0}{32}\cdot 8V_0}{p_0 2V_0 - p_0 V_0} = \frac{3}{4}.$$

Rashladni uređaj

Uzima toplotu iz hladne unutrašnjosti (od hladnjaka) i odvodi je u toplo okruženje (zagrejaču). Pritom na radnom telu mora da se vrši rad ($A < 0$).

Iz prvog principa termodinamike:

$$Q_Z + Q_H = A,$$
$$-|Q_Z| + Q_H = -|A| \Longrightarrow$$
$$|A| = |Q_Z| - Q_H.$$

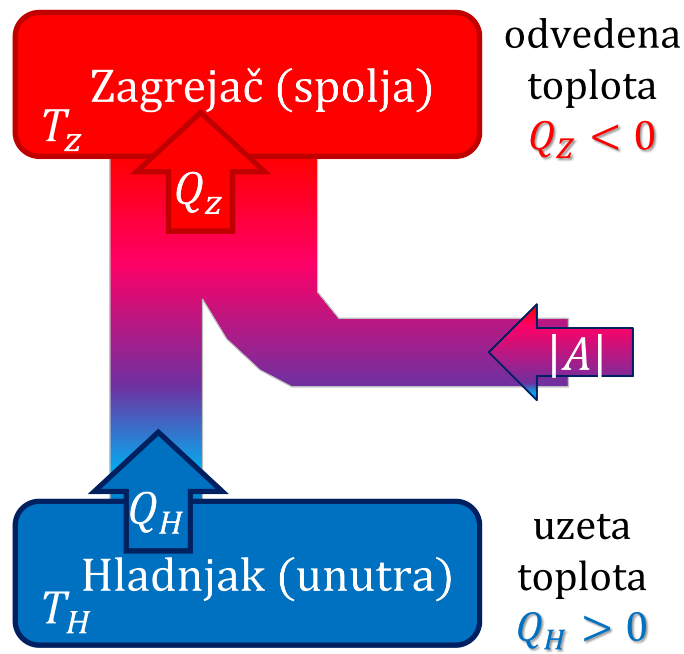
Rashladni uređaj je efikasniji ukoliko za izvršeni rad odvede više toplote:

$$\eta_h = \frac{Q_H}{|A|} = \frac{Q_H}{|Q_Z| - Q_H}.$$

gde *je* η_h – ***koeficijent hlađenja***.

Za Karnoov ciklus:

$$\eta_{hC} = \frac{T_H}{T_Z - T_H}.$$



Šematski prikaz rashladnog uređaja

Toplotna pumpa

Uzima toplotu iz hladnog okruženja (od hladnjaka) i odvodi je u toplu unutrašnjost (zagrejaču). Pritom na radnom telu mora da se vrši rad ($A < 0$).

Iz prvog principa termodinamike:

$$Q_Z + Q_H = A,$$
$$-|Q_Z| + Q_H = -|A| \Longrightarrow$$
$$|A| = |Q_Z| - Q_H.$$

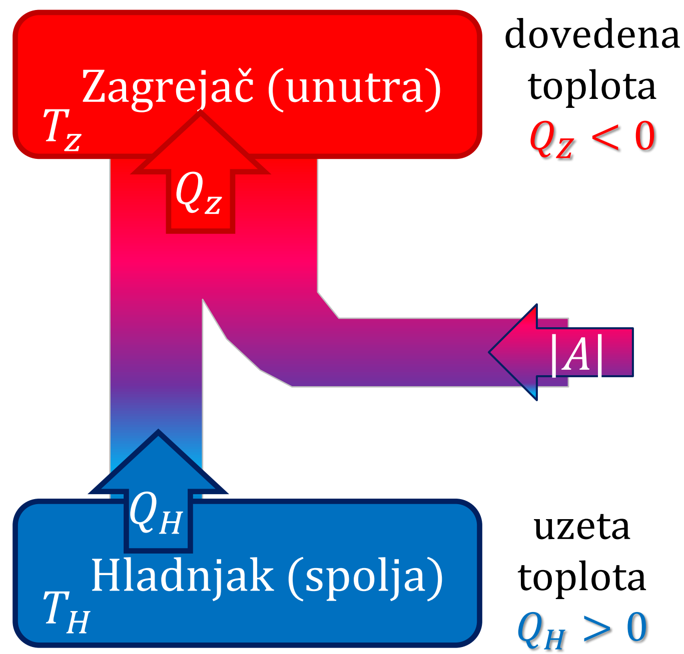
Toplotni uređaj je efikasniji ukoliko za izvršeni rad dovede više toplote:

$$\eta_g = \frac{|Q_Z|}{|A|} = \frac{|Q_Z|}{|Q_Z| - Q_H}.$$

gde je η_g $-$ *koeficijent grejanja*.

Za Karnoov ciklus:

$$\eta_{gC} = \frac{T_Z}{T_Z - T_H} = \frac{1}{\eta_{tC}} = 1 + \eta_{hC}.$$



Šematski prikaz toplotne pumpe

Primer: toplotna pumpa

Toplotna pumpa radi po Karnoovom ciklusu.
(a) Ako je temperatura hladnjaka $T_H = 280$ K i koeficijent grejanja $\eta_{gC} = 6$, kolika je temperatura zagrejača?
(b) Ako je spoljašnji rad po ciklusu 0,05 kWh, kolika se toplota po ciklusu preda zagrejaču?
(c) Kolika spoljašnja snaga se trosi, ako uređaj vrši 100 ciklusa na čas?
(d)Koliki je koeficijent hlađenja, ako bi ovaj uređaj radio kao rashladni uređaj sa istim temperaturama zagrejača i hladnjaka?

Rešenje: (a) Za Karnoov ciklus:

$$\eta_{gC} = \frac{T_Z}{T_Z - T_H} \Longrightarrow T_Z = \frac{T_H}{1 - \frac{1}{\eta_{gC}}} = \frac{6}{5} T_H = 336 \text{ K}.$$

(b) Toplota predata zagrejaču je $|Q_Z| = \eta_{gC}|A| = 0{,}3$ kWh.

(c) Spoljašnja snaga je

$$P = \frac{\mathrm{d}|A(t)|}{\mathrm{d}t} = \frac{100|A|}{\mathrm{h}} = 100 \cdot 0{,}05 \frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{h}} = 5 \text{ kW}.$$

(d) Koeficijent hlađenja ciklusa je:

$$\eta_{hC} = \eta_{gC} - 1 = 5.$$

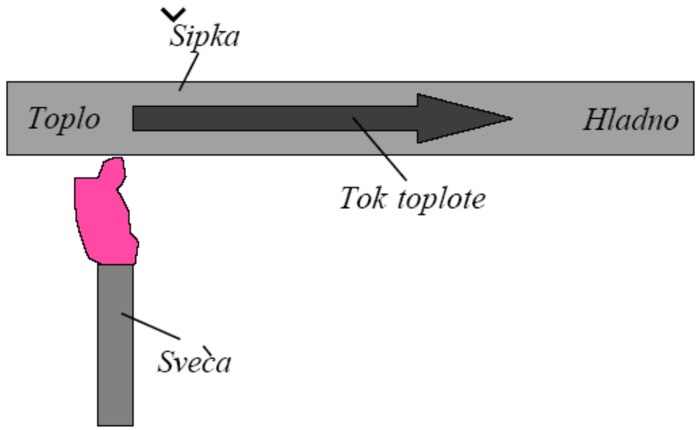
MEHANIZMI PRENOSA TOPLOTE

-kondukcija (Fourierov zakon)

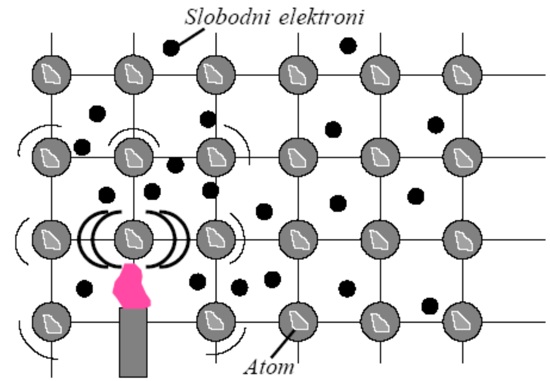
-konvekcija (Newtonov zakon)

-zračenje (Stefan-Boltzmannov zakon)

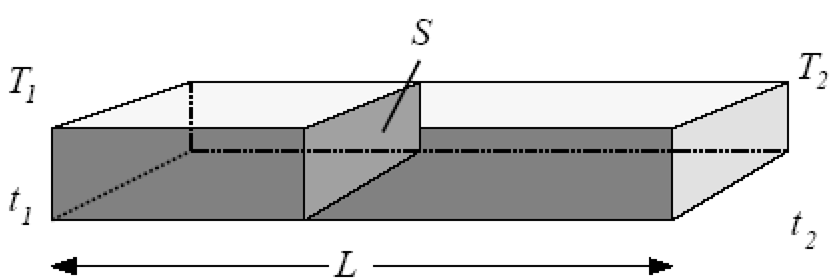
Kondukcija (provođenje) toplote



Prenos od toplog ka hladnom kraju



Mehanizam provođenja
u metalima



Eksperimentalno je ustanovljeno da je brzina protoka toplote proporcionalna poprečnom preseku S, razlici temperatura krajeva $T_2 - T_1$, a obrnuto proporcionalna dužini šipke L.

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = -\lambda S \,\frac{T_2 - T_1}{L}$$

Kondukcija toplote: Fourierov zakon

Brzina toka toplote kroz infitezimalni (beskonačno mail) delić tela:

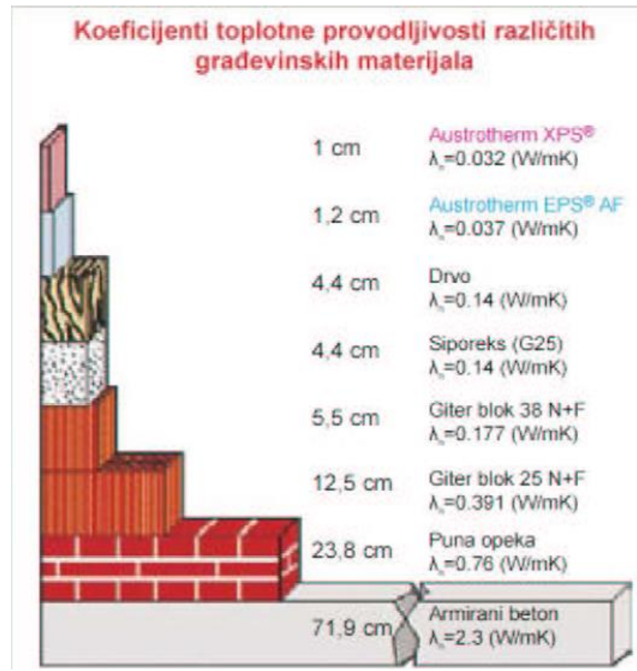
$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = -\lambda S \cdot \nabla T = -\lambda S \cdot \mathrm{grad}\, T,$$

što se u slučaju šipke (1D provođenja) svodi na:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = -\lambda S \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \Longrightarrow q_x = \frac{\mathrm{d}Q}{S\mathrm{d}\tau} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}.}$$

Čvrsto telo	λ(W/(m K))
Cigla za izolaciju	0,15
Crvena cigla	0,6
Beton	0,8
Fiberglas	0,04
Staklo	0,84
Stiropor	0,01
Drvo	0,12-0,04
Led	1,6

Koeficijent provođenja toplote raznih čvrstih tela



Konvekcija (prenošenje) toplote

Konvekcija je prenošenje toplote kretanjem fluida iz jednog dela prostora u drugi, gde je transport toplote povezan sa transportom samog materijala. Postoje dva tipična procesa: prelaz toplote sa čvrstog tela na fluid i prenos toplote kroz fluid.

Newtonov zakon konvekcije:

Količina toplote koja se u jedinici vremena prenese sa čvrstog tela (temperature t_z) na fluid $\left(\text{temperature } t_f < t_z\right)$ kroz jedinicu površine je:

$$q = \alpha\left(t_z - t_f\right),$$

gde je $\alpha -$ koeficijent prelaska toplote i

$$q = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau}.$$

Konvekcija može biti prirodna i prinudna.

Primer konvekcije i kondukcije: prolaz toplote kroz ravan zid

Konvekcija sa vazduha u sobi na zid:

$$q_{1z} = \alpha_1 \left(t_{v,1} - t_{z,1} \right).$$

Kondukcija kroz zid:

$$q_z = \frac{\lambda}{d} \left(t_{z,1} - t_{z,2} \right).$$

Konvekcija sa zida na vazduha spolja:

$$q_{z2} = \alpha_2 \left(t_{z,2} - t_{v,2} \right).$$

U stacionarnom stanju:

$$q = q_{1z} = q_z = q_{z2}.$$

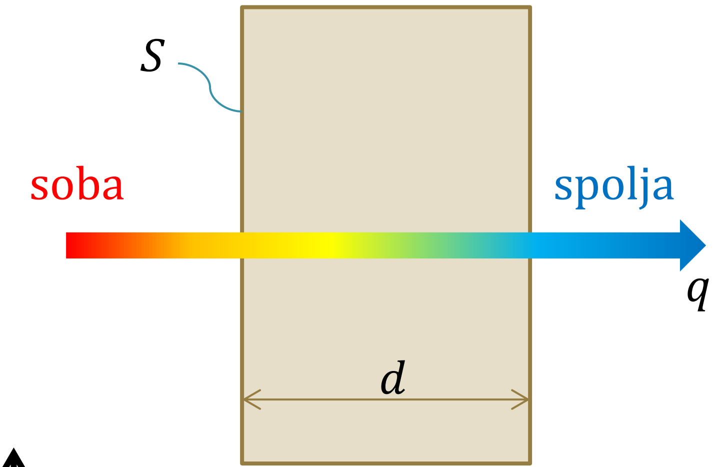
Odakle je:

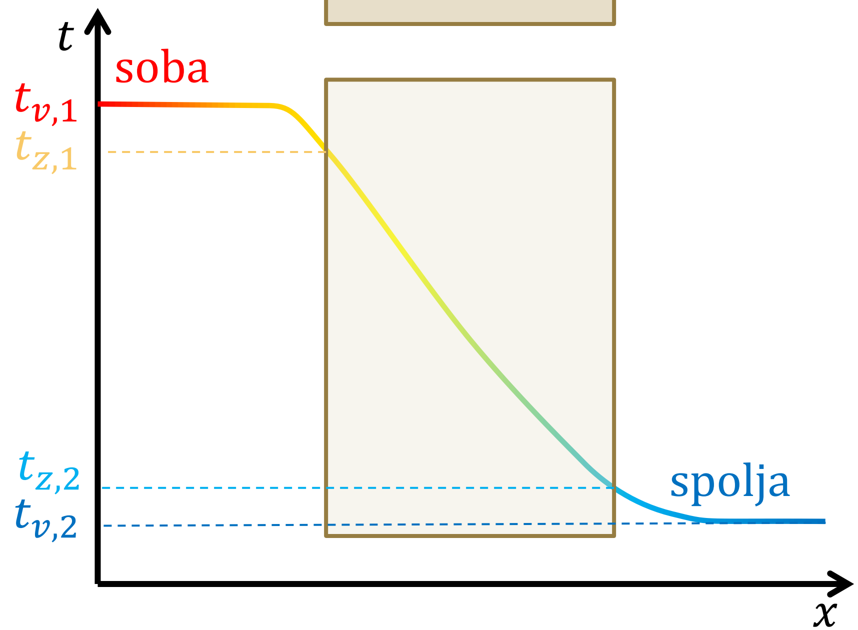
$$q = \frac{t_{v,1} - t_{v,2}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{t_{v,1} - t_{v,2}}{R_t},$$

gde je $R_t -$ termička otpornost.

Za višeslojan ($n -$ to slojni) zid:

$$R_t = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} = \theta S.$$





Primer: konvekcija iz vazduha na telo malih dimenzija

Kuglica od bakra radijusa R, koja je dugo bila u frižideru na temperaturi T_h iznesena je u toplu sobu u kojoj je temperatura vazduha T_s. Ako se kuglica greje samo prirodnom konvekcijom i bakar smatra idealnim provodnikom toplote, kolika će biti njena temperatura nakon vremena τ. Specifična toplota bakra je c, gustina bakra je ρ, a koeficijent prelaza toplote sa vazduha na kuglicu α. Temperatura vazduha u sobi se održava konstantnom.

Rešenje:
Toplota koju kuglica primi u jedinici vremena od okolnog vazduha je:

$$P = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau} = \alpha S(T_s - T),$$

gde je T trenutna temperatura kuglice, a $S = 4\pi R^2$ površina kuglice. Toplota $\mathrm{d}Q$ dovedena kuglici dovodi do porasta temperature za $\mathrm{d}T$:

$$\mathrm{d}Q = mc\mathrm{d}T = \rho\frac{4}{3}R^3\pi c\mathrm{d}T = \alpha 4\pi R^2(T_s - T)\mathrm{d}\tau.$$

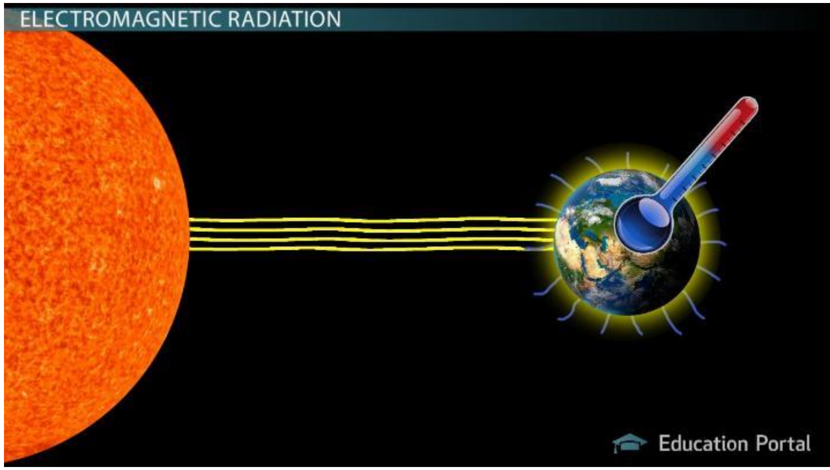
Rešavanjem diferencijalne jednačine dobija se:

$$T(\tau) = T_s - (T_s - T_h)e^{-\frac{3\alpha\tau}{R\rho c}}.$$

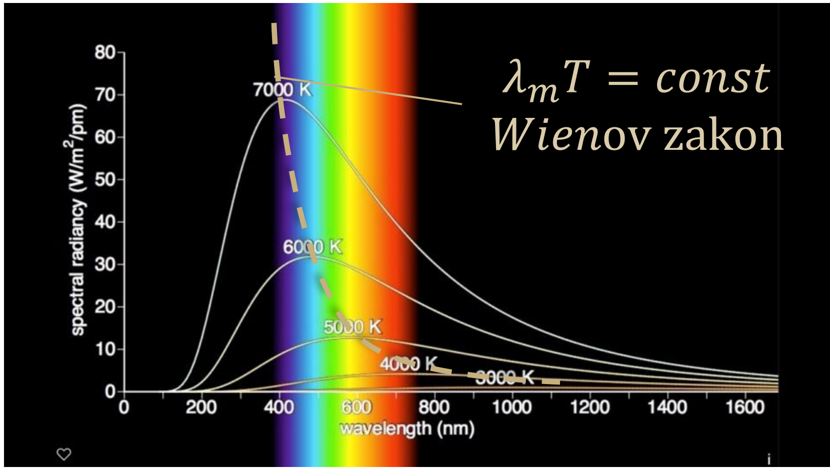
Zračenje: Stefan-Boltzmann

Snaga koja se izrači sa usamljenog tela temperature T po jedinici površine je:

$$\boxed{\frac{P_S}{S} = E_S = \epsilon\sigma T^4 = \epsilon E_C,}$$



gde je $\epsilon - koeficijent\ emisije$,
$\sigma = 5{,}6705 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$ Boltzmannova konstanta, a E_C – emitansa apsolutno crnog tela (ACT) $\Longrightarrow \epsilon_C = 1$.



Snaga zračenja P koja pada na telo jednaka je zbiru apsorbovane P_a, reflektovane P_r i transmitovane P_t snage:

$$P = P_a + P_r + P_t \Longrightarrow 1 = a + r + t.$$

Kirhofov zakon: Za telo u termalnoj ravnoteži koeficijent apsorpcije je jednak koeficijentu emisije:

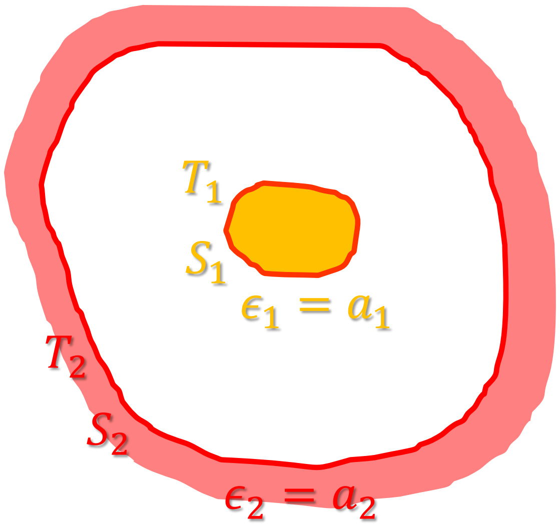
$$\boxed{\epsilon = a = 1 - (r + t)}$$

Primer*: telo u termostatu/peći

Neto razmena snage između tela i peći je:

$$\phi = P_{1,eff} - P_{2,eff} = \sigma_{12} S_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)\frac{S_1}{S_2}}.$$



Primer*: zračenje u okolni prostor

Ako razmatramo razmenu toplote sa okolinom:
$T_2 = T_{amb}$ i $S_2 = S_{amb} \gg S_1 \Longrightarrow \sigma_{12} \cong \epsilon_1 \sigma$,
pa je neto snaga koju telo zrači u okolni prostor:

$$\phi_{telo,amb} = \epsilon_1 \sigma S_1 (T_1^4 - T_{amb}^4)$$

Hvala na pažnji!

- Kraj 24. časa!

Srećno na ispitu!