Diferencijalne jednačine

Ivana Jovović
ivana@etf.rs

Sadržaj

Diferencijalne jednačine se prirodno pojavljuju kao matematički model različitih problema iz biologije, hemije, fizike, elektronike i drugih prirodnih i tehničkih nauka. Pre nego što krenemo da razmatramo neke tipove i klase diferencijalnih jednačina navedimo par primera.

Primer 1.

Neka se populacija jedne zemlje duplira za 50 godina. Koliko godina će biti potrebno da se triplira, pod pretpostavkom da je porast populacije proporcionalan broju stanovnika.

Rešenje.

Ako sa $y = y(t)$ označimo broj stanovnika date zemlje u trenutku t, onda promenu broja stanovnika možemo videti kao $y' = y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Kako je porast populacije proporcionalan broju stanovnika, ovaj problem možemo izraziti pomoću diferencijalne jednačine $y' = k \cdot y$, za neku (pozitivnu) konstantu $k \in \mathbb{R}$.

Ako sa y_0 označimo broj stanovnika u trenutku $t = 0$, tj. ako je $y(0) = y_0$, imamo da je 50 godina kasnije broj stanovnika $2y_0$, odnosno važi $y(50) = 2y_0$. Na osnovu ovih podataka, moguće je izračunati konstantu k. Na kraju, iz činjenice da je $y(t) = 3y_0$ dobijamo godine potrebne da se populacija utrostruči. Kompletno rešenje ovog problema ćemo prikazati nakon što razmotrimo diferencijalne jednačine koje razdvajaju promenljive. $\square$

Primer 2.

Brod mase m kreće se pravolinijski po površini mirne vode početnom brzinom v_0. Odrediti zakon kretanja broda, ako je otpor vode proporcionalan brzini kretanja broda.

Rešenje.

Kako je otpor vode proporcionalan brzini kretanja broda, imamo da je sila otpora jednaka $k \cdot v$, gde je $k \in \mathbb{R}$ koeficijent proporcionalnosti. Na osnovu II Njutnovog zakona imamo da je $m \cdot a = -k \cdot v$, gde je m masa broda, a a ubrzanje tela. Kako je ubrzanje a promena brzine v u vremenu t, tj. $a = a(t) = v'(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, imamo da je $m \cdot v' = -k \cdot v$, odnosno da je $v' = -\frac{k}{m} v$ i $v(0) = v_0$. $\square$

Jednačinu

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0,\ x \in (a, b),$$

u kojoj se efektivno javlja izvod $y^{(n)}$, ali ne obavezno i izvodi nižeg reda, nazivamo ***(običnom) diferencijalnom jednačinom reda*** n.
Interval (a, b) na kome tražimo rešenje može biti konačan ili beskonačan.
Poseban oblik prethodne jednačine, datu jednačinu rešenu po izvodu najvišeg reda,

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)),\ x \in (a, b),$$

nazivamo ***diferencijalnom jednačinom reda*** n ***u normalnom obliku***.

Rešenje diferencijalne jednačine na intervalu (a, b) je svaka funkcija $y = \varphi(x)$ koja pretvara jednačinu u identitet za svako $x \in (a, b)$. Rešenje diferencijalne jednačine može biti dato i u obliku $x = \psi(y)$ ili implicitno $G(x, y) = 0$.
Rešenje dato u obliku $y = \varphi(x)$ se uvek traži na intervalu (a, b). U svakoj tački intervala (a, b) rešenje $y = \varphi(x)$ mora biti definisana, neprekidna, n puta diferencijabilna funkcija.
Opšte rešenje diferencijalne jednačine na intervalu (a, b) je svaka funkcija $y = \varphi(x)$ definisana za svako $x \in (a, b)$ sa $G(x, \varphi(x), C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, gde su $C_1, C_2, \dots, C_n$ proizvoljne konstante koje pripadaju nekim intervalima, tako da važi:

- $y = \varphi(x)$ je rešenje diferencijalne jednačine na intervalu (a, b);
- eliminacijom konstanata $C_1, C_2, \dots, C_n$ iz $G(x, \varphi(x), C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ i izvodnih jednakosti date jednakosti do reda n, dolazi se samo do polazne diferencijalne jednačine.

Partikularno rešenje diferencijalne jednačine na intervalu (a, b) je svako rešenje diferencijalne jednačine koje se iz opšteg rešenja dobija za konkretne (konačne ili beskonačne) vrednosti bar jedne od konstanata $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Singularno rešenje diferencijalne jednačine na intervalu (a, b) je svako rešenje diferencijalne jednačine koje se ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za jednu (konačnu ili beskonačnu) vrednost konstanata $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Integralna kriva diferencijalne jednačine je grafik proizvoljnog singularnog ili partikularnog rešenje diferencijalne jednačine.

Partikularno rešenje diferencijalne jednačine se iz opšteg rešenja može dobiti postavljanjem nekih uslova. Da bi se odredilo svih n konstanata potrebno je zadati n uslova. Ako se zada vrednost prvih n izvoda funkcije $y = y(x)$ u nekoj tački $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$, dobijamo ***početne uslove*** i ***Košijevo rešenje***.

Većinu diferencijalnih jednačina je teško ili nemoguće rešiti. Prema tome, teorija diferencijalnih jednačina se bavi uslovima za postojanje i jedinstvenost rešenja, kao i osobinama rešenja. Mi se nećemo baviti problemima egzistencije i jedinstvenosti rešenja, ne zato što oni nisu važni, već zato što nihovo izučavanje zahteva složeni matematički aparat. Prikazaćemo neke jednostavne oblike diferencijalnih jednačina koji mogu neposredno da se reše.

Prvo ćemo se baviti diferencijalnim jednačinam prvog reda. Diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina oblika $F(x, y(x), y'(x)) = 0$. Diferencijalna jednačina prvog reda u normalnom obliku je data sa $y' = f(x, y)$. Uz datu jednačinu razmatramo i recipročnu jednačinu datu sa $x' = \frac{1}{f(x,y)}$.

Diferencijalna jednačina u normalnom obliku može da se svede i na jednačinu u diferencijalnom obliku $M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$, odnosno na jednačinu u simetričnom obliku $\frac{\mathrm{d}x}{N(x,y)} + \frac{\mathrm{d}y}{M(x,y)} = 0$.

Najjednostavniji oblik diferencijalne jednačine je jednačina oblika $y' = f(x)$, gde funkcija $f(x)$ zavisi samo od promenljive x. Njeno rešavanje predstavlja osnovni zadatak integralnog računa, odnosno nalaženje neodređenog integrala. Imamo da je $y = \displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x + C$, gde je C proizvoljna konstanta.

Ako se u diferencijalnoj jednačini $y' = f(x, y)$ funkcija $f(x, y)$ može predstaviti kao proizvod dve neprekidne funkcije definisane na nekim intervalima (a,b) i (c,d), pri čemu jedna zavisi samo od promenljive x, a druga samo od y, tj. ako je $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, onda datu diferencijalnu jednačinu $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ nazivamo ***diferencijalnom jednačinom koja razdvaja promenljive***.

Kako je $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ imamo $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x) \cdot f_2(y)$, odnosno $\frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = f_1(x)\,\mathrm{d}x$, čije rešenje dobijamo direktnom integracijom

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + C.$$

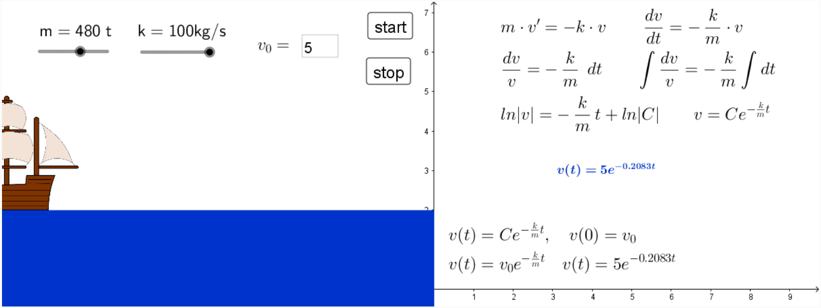
Vratimo se sada na naše primere. Imali smo diferencijalne jednačine oblika $y'(x) + P(x) \cdot y = 0$, gde je $P(x)$ konstantna funkcija. Prema tome, imamo da je $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -P(x) \cdot y$, što je za $y \neq 0$ ekvivalentno sa $\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\,\mathrm{d}x$. Opšte rešenje date jednačine $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -P(x)\,\mathrm{d}x$ se može zapisati kao $\displaystyle\ln|y| = \int -P(x)\,\mathrm{d}x + \ln|C|$, odnosno imamo da je $y = C\,e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$. Za $C = 0$ dobijamo rešenje polazne jednačine $y = 0$, koje smo isključili pri deljenju sa y.

Primer 1.

Rešenje diferencijalne jednačine $y' = k \cdot y$, za neku (pozitivnu) konstantu $k \in \mathbb{R}$ je $y(t) = C\, e^{\int k \,\mathrm{d}t} = C\, e^{k\,t}$. Iz uslova $y(0) = y_0$ i $y(50) = 2y_0$ dobijamo konstantu k. Imamo da $C = y(0) = y_0$ i $C\, e^{50k} = y(50) = 2y_0$, odnosno $k = \frac{\ln 2}{50}$. Jednakost $y(t) = 3y_0$ nam daje godine potrebne da se populacija utrostruči. Zaista, $y(t) = y_0\, e^{\frac{\ln 2}{50}t} = 3y_0$, odnosno $t = 50 \log_2 3 = 79$.

Primer 2.

Treći primer ćemo ilustrovati GeoGebra apletom.



Primer

Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

Rešenje.

Data jednačina se za $y \neq 0$ svodi na jednačinu $\frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{2}{3}}} = \mathrm{d}x$, čije je opšte rešenje $3\,y^{\frac{1}{3}} = x + C$. Primetimo da se rešenje polazne jednačine $y = 0$, ne može dobiti iz opšteg rešenja ni za jednu (konačnu ili beskonačnu) vrednost konstante C, pa je prema tome, u pitanju singularno rešenje. $\square$

Pokazati da se diferencijalna jednačina $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$, gde su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ konstante, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, a f neprekidna funkcija na nekom intervalu (a, b) može smenom $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ transformisati u diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive. Ako je $z = \alpha x + \beta y + \gamma$, onda je $z' = \alpha + \beta y' = \alpha + \beta f(z)$. Odakle dobijamo diferencijalnu jednačinu $\dfrac{\mathrm{d}z}{\alpha + \beta f(z)} = \mathrm{d}x$, čije je opšte rešenje $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{\alpha + \beta f(z)} = x + C$.

Primer

Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = (4x - y + 1)^2$, a zatim odrediti ono rešenje koje zadovoljava početni uslov $y(0) = 2$.

Rešenje.

Uvedimo smenu $z = 4x - y + 1$. Imamo da je $z' = 4 - y' = 4 - z^2$. Dva rešenja ove jednačine su $z = \pm 2$. Pod pretpostavkom da je $z \neq \pm 2$, dobijamo diferencijalnu jednačinu $\frac{\mathrm{d}z}{z^2-4} = -\mathrm{d}x$, čije je opšte rešenje $\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-4} = -\int \mathrm{d}x$, odnosno $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = -x + \widetilde{C}$, tj. $\frac{z+2}{z-2} = C e^{4x}$. Rešenja $z = \pm 2$ su partikularna rešenja, pošto se iz opšteg rešenja mogu dobiti za vrednost konstante $C = 0$ i $C = \infty$. Vraćanjem smene, dobijamo $\frac{4x-y+3}{4x-y-1} = C e^{4x}$. Zamenom $x = 0$ i $y = 2$ dobijamo da je $C = -\frac{1}{3}$ i da je Košijevo rešenje $\frac{4x-y+3}{4x-y-1} = -\frac{1}{3} e^{4x}$, koje možemo zapisati i eksplicitno kao $y = 4x + \frac{9-e^{4x}}{3+e^{4x}}$. □

Još jedan tip diferencijalnih jednačina se pogodno uvedenom smenom može svesti na diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive. U pitanju su ***homogene diferencijalne jednačine***. Homogena diferencijalna jednačina je jednačina oblika $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, gde je funkcija f neprekidna na nekom intervalu (a, b) i različita od identičkog preslikavanja. Ukoliko je $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$, diferencijalna jednačina $y' = \frac{y}{x}$ se jednostavno rešava razdvajenjem promenljivih. Zaista, dobijamo jednačinu $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, čije je opšte rešenje $y = C\,x$. U slučaju kada f nije identičko preslikavanje, smenom $z = \frac{y}{x}$ homogenu jednačinu svodimo na jednačinu koja razdvaja promenljive. Ako uvedemo smenu $z = \frac{y}{x}$, imamo da je $y = x\,z$ i $y' = z + x\,z'$, pa prema tome važi da je $z + x\,z' = f(z)$, odnosno $x\frac{\mathrm{d}z}{dx} = f(z) - z$. Opšte rešenje diferencijalne jednačine $\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z} = \frac{dx}{x}$ je $\int\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z} = \ln|x| + \ln|C|$. Ako uvedemo oznaku $\int\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-z} = \varphi(z)$, dobijamo da je opšte rešenje $C\,x = e^{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$.

Primer

Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = \frac{2\,x\,y}{x^2-y^2}$.

Rešenje.

Svedimo datu diferencijalnu jednačinu na homogenu deljenjem imenioca i brojioca racionalnog izraza na desnoj strani sa x^2, $y' = \frac{2\,\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$. Uvođenjem smene $z = \frac{y}{x}$, dobijamo $z + x\,z' = \frac{2\,z}{1-z^2}$, odakle je $x\,z' = \frac{2\,z}{1-z^2} - z = \frac{2\,z-(z-z^3)}{1-z^2} = \frac{z+z^3}{1-z^2} = z\,\frac{1+z^2}{1-z^2}$, odnosno $\frac{(1-z^2)\mathrm{d}z}{z\,(1+z^2)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Integraljenjem date jednakosti dobijamo opšte rešenje $\displaystyle\int \frac{(1-z^2)\mathrm{d}z}{z\,(1+z^2)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Kako je $\displaystyle\int \frac{(1-z^2)\mathrm{d}z}{z\,(1+z^2)} = \int \frac{(1+z^2-2\,z^2)\mathrm{d}z}{z\,(1+z^2)} = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} - \int \frac{2\,z\,\mathrm{d}z}{1+z^2} = \ln\left|\frac{z}{1+z^2}\right| + \widetilde{C}$ imamo da je $\ln\left|\frac{z}{1+z^2}\right| + \ln|C| = \ln|x|$.

Opšte rešenje date jednačine možemo zapisati i kao $\frac{Cz}{z^2+1} = x$. Vraćanjem smene $z = \frac{y}{x}$ dobijamo $\frac{Cxy}{y^2+x^2} = x$, odnosno dobijamo familiju kružnica $y^2 - Cy + x^2 = 0$, sa centrom na y-osi koje sadrže koordinatni početak. $\square$

Linearna diferencijalna jednačina I reda je diferencijalna jednačina oblika

$$y'(x) + P(x)\,y(x) = Q(x),$$

gde su funkcije P i Q neprekidne na intervalu (a, b).
Ukoliko je $Q(x) \equiv 0$ u pitanju je homogena linearna diferencijalna jednačina, u suprotnom datu jednačinu nazivamo nehomogenom diferencijalnom jednačinom. Homogena linearna diferencijalna jednačina nije u vezi sa razmatranim homogenim diferencijalnim jednačinama, iako se isto zovu. Homogena linearna diferencijalna jednačina je u stvari diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive. Pokazali smo da je opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'(x) + P(x)\,y(x) = 0$ funkcija $y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$. Polazeći od ovog rešenja potražimo opšte rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine u obliku $y(x) = u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

Imamo da je $y'(x) = u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$. Zamenom y i y' u polaznu jednačinu dobijamo

$u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + u(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$,

odnosno $u'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$, tj. $u'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$ ili $u(x) = C + \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$. Odakle sledi da je

$y(x) = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$.

Primer

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' + \frac{y}{x} = 3x$, a zatim odrediti ono partikularno rešenje za koje je $y(2) = 1$.

Rešenje.

Imamo da je $P(x) = \frac{1}{x}$ i $Q(x) = 3x$. Opšte rešenje date jednačine je $y(x) = e^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}\left(C + \int 3x\, e^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}\mathrm{d}x\right)$.

Dalje, važi da je $y(x) = e^{-\ln|x|}\left(C + \int 3\,x\,e^{\ln|x|}\mathrm{d}x\right)$, odnosno $y(x) = \dfrac{1}{|x|}\left(C + \int 3\,x|x|\mathrm{d}x\right)$. Diferencijalne jednačine uvek rešavamo na intervalu. Prema tome, kako funkcija $P(x) = \frac{1}{x}$ nije neprekidna u tački $x = 0$, datu diferencijalnu jednačinu rešavamo na nekom intervalu koji ne sadrži tačku $x = 0$, odnosno na podintervalu jednog od intervala $(-\infty, 0)$ ili $(0, +\infty)$. Stoga, imamo da je $y(x) = \dfrac{1}{|x|}\left(C + \mathrm{sgn}(x)\int 3\,x^2\mathrm{d}x\right)$, tj. $y(x) = \dfrac{1}{|x|}\left(C + \mathrm{sgn}(x)\,x^3\right)$ ili da je $y(x) = \dfrac{C}{x} + x^2$.
Imamo da je $y(2) = \frac{C}{2} + 4 = 1$, odakle sledi da je $C = -6$.
Partikularno rešenje za koje je $y(2) = 1$ je $y(x) = -\dfrac{6}{x} + x^2$. $\square$

Primer

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $\cos x\, y' = \sin x\, y + \cos^2 x$.

Rešenje.

Prave $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, jesu rešenja date jednačine. Pretpostavimo da je $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Deljenjem date jednačine sa sa $\cos x$ dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda $y' - \operatorname{tg} x\, y = \cos x$. Opšte rešenje date jednačine je

$$
\begin{aligned}
y &= e^{\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x}\left(C + \int \cos x\, e^{-\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x} \mathrm{d}x\right) \\
&= e^{\int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x}\left(C + \int \cos x\, e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x\right) \\
&= e^{-\ln|\cos x|}\left(C + \int \cos x\, e^{\ln|\cos x|} \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\cos x}\left(C + \int \cos^2 x \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{\cos x}\left(C + \frac{1}{2}\int (1 + \cos(2x))\, \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\cos x}\left(C + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right).
\end{aligned}
$$

Kao jedno uopštenje linearne diferencijalne jednačine javlja se Bernulijeva diferencijalna jednačina. ***Bernulijeva diferencijalna jednačina*** je diferencijalna jednačina oblika

$$y'(x)+P(x)\,y(x)=Q(x)\,y^{\alpha}(x)$$

gde su funkcije P i Q neprekidne na intervalu (a,b), $\alpha\in\mathbb{R}$. U zavisnosti od vrednosti parametra α razmatramo sledeća tri slučaja.

- Ako je $\alpha=0$ onda je $y'(x)+P(x)\,y(x)=Q(x)$ nehomogena linearna diferencijalna jednačina.
- Ako je $\alpha=1$ onda je $y'(x)+P(x)\,y(x)=Q(x)\,y(x)$, tj. $y'(x)+(P(x)-Q(x))\,y(x)=0$ homogena linearna diferencijalna jednačina ili diferencijalna jednačina koja razdvaja promenljive.

- Ako je $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ onda deljenjem sa $y^{\alpha}(x)$ jednačinu svodimo na

$$y^{-\alpha}(x)\,y'(x) + P(x)\,y^{1-\alpha}(x) = Q(x),$$

koja se uvođenjem smene $z = z(x) = y^{1-\alpha}(x)$, $z'(x) = (1-\alpha)\,y^{-\alpha}(x)\,y'(x)$, svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z'(x) + (1-\alpha)P(x)\,z(x) = (1-\alpha)Q(x).$$

Primer

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $x\,y' - 4\,y = x^2\,\sqrt{y}$.

Rešenje.

U pitanju je Bernulijeva diferencijalna jednačina. Deljenjem sa $2\sqrt{y}$ dobijamo $x\,\frac{y'}{2\sqrt{y}} - 2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2}$. Smenom $z = \sqrt{y}$, $z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$ dobijamo diferencijalnu jednačinu $x\,z' - 2\,z = \frac{x^2}{2}$. Dok deljenjem sa x dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu $z' - \frac{2}{x}\,z = \frac{x}{2}$, čije je rešenje

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}} \left(C + \int \frac{x}{2}\, e^{-\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}} \mathrm{d}x \right) \\ &= e^{2\ln|x|} \left(C + \int \frac{x}{2}\, e^{-2\ln|x|} \mathrm{d}x \right) \\ &= x^2 \left(C + \int \frac{\mathrm{d}x}{2x} \right) = x^2 \left(C + \frac{\ln|x|}{2} \right). \end{aligned}$$

Vraćanjem smene dobijamo rešenje Bernulijeve jednačine $y = x^4 \left(C + \frac{\ln|x|}{2} \right)^2$. $\square$

Rikatijeva diferencijalna jednačina je diferencijalna jednačina oblika

$$y'(x) = P(x)\,y^2(x) + Q(x)\,y(x) + R(x),$$

gde su P,Q i R neprekidne funkcije na intervalu (a,b). U opštem slučaju Rikatijeva diferencijalna jednačina se ne može rešiti pomoću konačnog broja integracija, tj. jednačina nema rešenje pomoću kvadratura.

Rikatijeva diferencijalna jednačina se uvek može rešiti ako je poznato njeno proizvoljno partikularno rešenje $y_1 = y_1(x)$ smenom $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$. Kako je y_1 partikularno rešenje polazne jednačine, važi $y_1'(x) = P(x)\,y_1^2(x) + Q(x)y_1(x) + R(x)$. Uvođenjem smene $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$, $y'(x) = y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)}$, dobijamo

$$y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} = P(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{z(x)}\right)^2 + Q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{z(x)}\right) + R(x),$$

odnosno

$$\begin{aligned} y_1'(x) - \frac{z'(x)}{z^2(x)} &= P(x)\left(y_1^2(x) + 2y_1(x)\frac{1}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right) \\ &+ Q(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{z(x)}\right) + R(x). \end{aligned}$$

Kako je y_1 partikularno rešenje dobijamo

$-\frac{z'(x)}{z^2(x)} = P(x)\left(2y_1(x)\frac{1}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right) + Q(x)\frac{1}{z(x)}$, tj.

$z'(x) = -2P(x)y_1(x)z(x) - P(x) - Q(x)z(x)$, odnosno linearnu diferencijalnu jednačinu

$z'(x) + (2P(x)y_1(x) + Q(x))z(x) = -P(x)$.

Primer

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' = -y^2 + 2xy - x^2 + 5$, *ako se zna da je jedno njeno partikularno rešenje oblika* $y_1 = ax + b$.

Rešenje.

Odredimo realne parametre a i b tako da $y_1 = ax + b$ bude partikularno rešenje date diferencijalne jednačine. Zamenom $y_1 = ax + b$ i $y_1' = a$ u jednačinu dobijamo identitet. Imamo da je $a = -(ax+b)^2 + 2x(ax+b) - x^2 + 5$, tj. $a = (-a^2 + 2a - 1)x^2 + (-2ab + 2b)x - b^2 + 5$. Odakle dobijamo sistem

$$\begin{array}{rcl} -a^2 + 2a - 1 & = & 0 \\ -2ab + 2b & = & 0 \\ -b^2 + 5 & = & a, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -(a-1)^2 & = & 0 \\ -2b(a-1) & = & 0 \\ -b^2 + 5 & = & a, \end{array}$$

Rešenje sistema je $a = 1$ i $b = \pm 2$. Jedno partikularno rešenje je $y_1 = x + 2$.

Dalje, uvodimo smenu $y = y_1 + \frac{1}{z} = x + 2 + \frac{1}{z}$, $y' = y_1' - \frac{z'}{z^2} = 1 - \frac{z'}{z^2}$. Dobijamo da je $1 - \frac{z'}{z^2} = -\left(x + 2 + \frac{1}{z}\right)^2 + 2x\left(x + 2 + \frac{1}{z}\right) - x^2 + 5$, odnosno $1 - \frac{z'}{z^2} = -x^2 - 4 - \frac{1}{z^2} - 4x - \frac{2x}{z} - \frac{4}{z} + 2x^2 + 4x + \frac{2x}{z} - x^2 + 5$, tj. $-\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z}$. Množenjem prethodne jednačine sa $-z^2$ prethodna jednačina postaje linearna diferencijalna jednačina $z' - 4z = 1$, čije je opšte rešenje $z = e^{\int 4\mathrm{d}x}\left(C + \int e^{-\int 4\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right) = e^{4x}\left(C + \int e^{-4x}\mathrm{d}x\right) = e^{4x}\left(C - \frac{1}{4}e^{-4x}\right) = Ce^{4x} - \frac{1}{4}$. Vraćanjem smene dobijamo opšte rešenje Rikatijeve diferencijalne jednačine $y = x + 2 + \frac{4}{4Ce^{4x} - 1}$.

Diferencijalna jednačina $z' - 4z = 1$ je jednačina koja razdvaja promenljive. Važi da je $z' = 4z + 1$, odnosno da je $\frac{dz}{4z+1} = dx$. Opšte rešenje ove jednačine je $\int \frac{dz}{4z+1} = \int dx$, tj. $\ln|4z + 1| = 4x + \hat{C}$ ili u eksplicitnom obliku $z = Ce^{4x} - \frac{1}{4}$.

Drugi način da se reši ovaj zadatak je da se diferencijalna jednačina $y' = -y^2 + 2\,x\,y - x^2 + 5$ zapiše u obliku $y' = -(y-x)^2 + 5$ i da se uvede linearna smena $z = y - x$, $z' = y' - 1$. Dobijamo diferencijalnu jednačinu koja razdvaja promenljive $z' + 1 = -z^2 + 5$, odnosno $\frac{\mathrm{d}z}{z^2-4} = -\mathrm{d}x$. Njeno opšte rešenje je $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2-4} = -\int \mathrm{d}x + \widetilde{C}$, odnosno $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = \widetilde{C} - x$, tj. $\frac{z-2}{z+2} = \widehat{C}\,e^{-4\,x}$, dalje imamo da je $z - 2 = \widehat{C}\,e^{-4\,x}(z+2)$, zatim dobijamo da je $(1 - \widehat{C}\,e^{-4\,x})\,z = 2\,(1 + \widehat{C}\,e^{-4\,x})$ i $z = 2\,\frac{1+\widehat{C}\,e^{-4\,x}}{1-\widehat{C}\,e^{-4\,x}}$.
Što možemo zapisati i kao
$z = 2\,\frac{1-\widehat{C}\,e^{-4\,x}+2\,\widehat{C}\,e^{-4\,x}}{1-\widehat{C}\,e^{-4\,x}} = 2 + \frac{4\,\widehat{C}\,e^{-4\,x}}{1-\widehat{C}\,e^{-4\,x}} = 2 + \frac{4}{C\,e^{4\,x}-1}$ Vraćanjem smene dobijamo da je $y = x + 2 + \frac{4}{C\,e^{4\,x}-1}$. $\square$

Milan Merkle,
Matematička analiza, teorija i hiljadu zadataka, za studente tehnike,
Akademska misao, Beograd.

Jelena Katić, Maša Đorić,
Analiza 3,
Matematički fakultet, Beograd.

Svetlana Janković, Julka Knežević–Miljanović,
Diferencijalne jednačine 1,
Matematički fakultet, Beograd.

Radoje Šćepanović, Julka Knežević–Miljanović, Ljubomir Protić,
Diferencijalne jednačine,
Matematički fakultet, Beograd.

Milorad Bertolino,
Diferencijalne jednačine,
Zavod za udžbenike, Beograd.

Pavle Miličić, Momčilo Ušćumlić,
Zbirka zadataka iz više matematike II,
Građevinska knjiga, Beograd.

Frank Ayres, JR,
Differential Equation, Schaum's Outline Series,
McGraw-Hill Book Company, New York.