Linearne diferencijalne jednačine višeg reda

Ivana Jovović
ivana@etf.rs

Sadržaj

Definicija

Diferencijalnu jednačinu

$$y^{(n)}(x) + f_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}(x)y'(x) + f_n(x)y(x) = F(x),$$

gde su funkcije $f_1, f_2, \ldots, f_n, F$ definisane i neprekidne na nekom intervalu (a,b), konačnom ili beskonačnom, nazivamo ***linearnom diferencijalnom jednačinom n-tog reda***.

Funkciju F nazivamo ***slobodnim članom*** date diferencijalne jednačine. Ako za slobodan član F važi da je $F \equiv 0$, odnosno ako je $(\forall x \in (a,b))\, F(x) = 0$, kažemo da je diferencijalna jednačina ***homogena***, u protivnom je ***nehomogena***.

Svakoj nehomogenoj linearnoj diferencijalnoj jednačini

$$y^{(n)}(x)+f_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+f_{n-1}(x)y'(x)+f_n(x)y(x)=F(x),$$

pridružujemo odgovarajuću homogenu jednačinu

$$y^{(n)}(x)+f_1(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+f_{n-1}(x)y'(x)+f_n(x)y(x)=0.$$

Ako su koeficijenti $f_1, f_2, \ldots, f_n$ realne konstante, datu diferencijalnu jednačinu nazivamo ***linearnom diferencijalnom jednačinom n-tog reda sa konstantnim koeficijentima***. Prvo ćemo se detaljnije baviti homogenim linearnim diferencijalnim jednačinama.

Homogena linerana diferencijalna jednačina uvek ima rešenje $y \equiv 0$, koje nazivamo ***trivijalnim rešenjem***.

Teorema

Jedino rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda koje zadovoljava početne uslove $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$ za proizvoljno $x_0 \in (a, b)$ je trivijalno rešenje $y \equiv 0$.

Teorema

Ako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda, onda je i $y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x)$ njeno rešenje, gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

Definicija

Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda. Tada determinantu

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_{n-1}'(x) & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-2)}(x) & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nazivamo ***vronskijanom*** *ili* ***determinantom Vronskog****.*

Skup rešenja $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ za koji važi $W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) \neq 0$ nazivamo ***fundamentalnim sistemom rešenja***.

Definicija

Funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ definisane na intervalu (a, b) nazivaju se ***linearno zavisnim*** *ako postoje konstante $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$, takve da za svako $x \in (a, b)$ važi $\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$.*
Ako ovakve konstante ne postoje, tj. ako iz činjenice da za svako $x \in (a, b)$ važi $\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0$, sledi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, kažemo da su funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ***linearno nezavisne****.*

Primer

Funkcije $\varphi_1(x) = \cos(2x)$, $\varphi_2(x) = \cos^2 x$, $\varphi_3(x) = \sin^2 x$ i $\varphi_4(x) = 1$ su linearno zavisne.

Rešenje.

Pokažimo da postoje konstante $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ koje nisu sve jednake nula takve da je

$$\alpha_1\,\varphi_1(x)+\alpha_2\,\varphi_2(x)+\alpha_3\,\varphi_3(x)+\alpha_4\,\varphi_4(x)=0.$$

Imamo da je

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\,\varphi_1(x)+\alpha_2\,\varphi_2(x)+\alpha_3\,\varphi_3(x)+\alpha_4\,\varphi_4(x)=\\
&\alpha_1\cos(2x)+\alpha_2\cos^2 x+\alpha_3\sin^2 x+\alpha_4\,1=\\
&\alpha_1(\cos^2 x-\sin^2 x)+\alpha_2\cos^2 x+\alpha_3\sin^2 x+\alpha_4(\cos^2 x+\sin^2 x)=\\
&(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)\cos^2 x+(-\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)\sin^2 x=0,
\end{aligned}$$

tj. dobijamo homogeni sistem

$$\begin{aligned}
\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4 &= 0\\
-\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Jedno netrivijalno rešenje datog sistema je npr. $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_3=0$, $\alpha_4=1$. Važi da je $\cos(2x)-2\cos^2 x+1=0$. □

Teorema

Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1° $(\forall x \in (a,b))\, W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) = 0$;

2° $(\exists x_0 \in (a,b))\, W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_0) = 0$;

3° *rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *su linearno zavisne funkcije.*

Teorema

Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:

1° $(\exists x_0 \in (a,b))\, W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x_0) \neq 0$;

2° $(\forall x \in (a,b))\, W(y_1, y_2, \ldots, y_n; x) \neq 0$;

3° *rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *su linearno nezavisne funkcije.*

Primer

Pokazati da su $y_1 = e^{-x}$ i $y_2 = e^{x^2}$ dva linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine $(2x+1)y'' - (4x^2+1)y' - 2(2x^2+x+1)y = 0$.

Rešenje.

Dokažimo prvo da su $y_1 = e^{-x}$ i $y_2 = e^{x^2}$ rešenja date jednačine. Imamo da je $y_1 = e^{-x}$, $y_1' = -e^{-x}$ i $y_1'' = e^{-x}$.
Zamenom u jednačinu
$(2x+1)y'' - (4x^2+1)y' - 2(2x^2+x+1)y = 0$ dobijamo
$(2x+1)e^{-x} + (4x^2+1)e^{-x} - 2(2x^2+x+1)e^{-x} =$
$(2x+1+4x^2+1-4x^2-2x-2)e^{-x} \equiv 0$. Za funkciju $y_1 = e^{x^2}$, važi $y_1' = 2xe^{x^2}$ i $y_1'' = (2+4x^2)e^{x^2}$. Zamenom u polaznu diferencijalnu jednačinu imamo
$(2x+1)(2+4x^2)e^{x^2} - (4x^2+1)2xe^{x^2} - 2(2x^2+x+1)e^{x^2} =$
$2(2x+1+4x^3+2x^2-4x^3-x-2x^2-x-1)e^{x^2} \equiv 0$.

Pokažimo koristeći prethodnu teoremu da su ova dva rešenja linearno nezavisna. Na intervalima $(-\infty, -\frac{1}{2})$ i $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ data jednačina je ekvivalentna jednačini $y'' - \frac{4x^2+1}{2x+1}y' - 2\frac{2x^2+x+1}{2x+1}y = 0$. Za svako x iz intervala $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ili $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ važi

$$W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x^2} \\ -e^{-x} & 2xe^{x^2} \end{vmatrix} = (2x+1)e^{x^2-x} \neq 0.$$

$\square$

Trivijalno rešenje $y \equiv 0$ je linearno zavisno sa bilo kojim skupom rešenja.

Neka su y_1 i y_2 dva netrivijalna linearno zavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine $y''(x)+f_1(x)y'(x)+f_2(x)y(x)=0$, $x\in(a,b)$. Tada postoje konstante $C_1,C_2\in\mathbb{R}$, $C_1^2+C_2^2\neq 0$, takve da za svako $x\in(a,b)$ važi da je $C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)=0$. Imamo da je $(\forall x\in(a,b))\,\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=-\frac{C_2}{C_1}=$ const. Sa druge strane,

$$W(y_1,y_2;x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)=0$$

implicira $(\forall x\in(a,b))\,\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}=\frac{y_2'(x)}{y_2(x)}$, tj. $\int\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\,dx=\int\frac{y_2'(x)}{y_2(x)}\,dx$, odnosno $\ln|y_1(x)|=\ln|y_2(x)|+\ln|k|$, ili $y_1(x)=k\,y_2(x)$, što daje $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}=k$.

Teorema

Ako su $y_1,y_2,\ldots,y_n$ linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda, onda je $y(x)=C_1\,y_1(x)+C_2\,y_2(x)+\ldots+C_n\,y_n(x)$ njeno opšte rešenje.

Razmotrimo sada detaljnije homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu II reda $y''(x) + f_1(x)y'(x) + f_2(x)y(x) = 0$.

Smenom $y(x) = e^{\int z(x)\,dx}$ data jednačina se svodi na Rikatijevu diferencijalnu jednačinu prvog reda. Zaista, ako je $y(x) = e^{\int z(x)\,dx}$ imamo $y'(x) = z(x)\,e^{\int z(x)\,dx}$ i $y(x) = (z'(x) + z^2(x))e^{\int z(x)\,dx}$.

Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo

$$(z'(x) + z^2(x))e^{\int z(x)\,dx} + f_1(x)z(x)\,e^{\int z(x)\,dx} + f_2(x)e^{\int z(x)\,dx} = 0,$$

tj.

$$z'(x) = -z^2(x) - f_1(x)z(x) - f_2(x).$$

Za nalaženje opšteg rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine II reda dovoljno je poznavati samo jedno njeno partikularno rešenje.

Teorema (LIOUVILLEova formula)

Ako je y_1 netrivijalno partikularno rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine II reda $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$, onda je $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int f_1(x)\,dx}\,dx$ takođe partikularno rešenje date jednačine linearno nezavisno od y_1.

Dokaz.

Neka je y_1 netrivijalno rešenje date homogene linearne diferencijalne jednačine II reda. Potražimo drugo rešenje u obliku $y_2(x) = z(x)\,y_1(x)$, gde je z funkcija koju treba odrediti. Zamenom y_2 i odgovarajućih izvoda

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= z'(x)\,y_1(x) + z(x)\,y_1'(x) \\ y_2''(x) &= z''(x)\,y_1(x) + 2z'(x)\,y_1'(x) + z(x)\,y_1''(x), \end{aligned}$$

u polaznu jednačinu, dobijamo

$$z''(x)\,y_1(x) + 2z'(x)\,y_1'(x) + z(x)\,y_1''(x) +$$
$$f_1(x)\,(z'(x)\,y_1(x) + z(x)\,y_1'(x)) + f_2(x)\,z(x)\,y_1(x) = 0,$$

odnosno $$y_1(x)\,z''(x)+(2\,y_1'(x)+f_1(x)\,y_1(x))\,z'(x)+ (y_1''(x)+f_1(x)\,y_1'(x)+f_2(x)\,y_1(x))\,z(x)=0.$$
Kako je y_1 rešenje polazne jednačine imamo
$y_1(x)\,z''(x)+(2\,y_1'(x)+f_1(x)\,y_1(x))\,z'(x)=0$, tj.
$z''(x)=-\frac{2\,y_1'(x)+f_1(x)\,y_1(x)}{y_1(x)}\,z'(x)$. Dalje, kako je $z''(x)=\frac{d\,z'(x)}{d\,x}$
dobijamo diferencijalnu jednačinu koji razdvaja promenljive
$\frac{d\,z'(x)}{z'(x)}=-\frac{2\,y_1'(x)+f_1(x)\,y_1(x)}{y_1(x)}\,d\,x$, čije je opšte rešenje
$\int\frac{d\,z'(x)}{z'(x)}=-2\int\frac{y_1'(x)}{y_1(x)}\,d\,x-\int f_1(x)\,d\,x$, odnosno
$\ln|z'(x)|=-2\ln|y_1(x)|-\int f_1(x)\,d\,x$, tj. $z'(x)=\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int f_1(x)\,d\,x}$.
Opšte rešenje ove jednačine je $z(x)=\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int f_1(x)\,d\,x}\,d\,x$.
Vraćenjem smene
$y_2(x)=z(x)\,y_1(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int f_1(x)\,d\,x}\,d\,x$. Kako $\frac{y_2}{y_1}$ nije konstanta, zaključujemo da su y_1 i y_2 linearno nezavisna rešenja.

Primer

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $x^2(x^2-1)y''-(x^2-2)(xy'-y)=0$, $x\in(1,+\infty)$ *ako se zna da je jedno partikularno rešenje oblika* $y_1(x)=ax+b$.

Rešenje.

Za funkciju $y_1(x)=ax+b$ važi $y_1'(x)=a$ i $y_1''(x)=0$. Zamenom funkcije y_1 i njenih izvoda u datu diferencijalnu jednačinu dobijamo $ax-(ax+b)=0$, odakle sledi da je $b=0$ i za $a=1$ dobijamo jedno partikularno rešenje $y_1(x)=x$. Drugo linearno nezavisno rešenje dobijalmo primenom LIOUVILLEove formule na jednačinu $y''-\frac{x^2-2)}{x(x^2-1)}y'+\frac{x^2-2)}{x^2x^2-1)}y=0$. Imamo

$$y_2 = x\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{x^2-2}{x(x^2-1)}dx}dx = x\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{2x^2-2-x^2}{x(x^2-1)}dx}dx = x\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{2dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{x^2-1}}dx$$

$$= x\int\frac{1}{x^2}e^{\ln\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}dx = x\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = x\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Opšte rešenje date jednačine je

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=C_1x+C_2x\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$ $\square$

Teorema

Neka je y_h opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine i y_p jedno partikularno rešenje nehomogene jednačine. Tada je opšte rešenje nehomogene jednačine dato sa $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Teorema (Metoda varijacije konstanata)

Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno nezavisna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine. Tada je opšte rešenje odgovarajuće nehomogene jednačine dato sa $y(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) + \ldots + C_n(x)\,y_n(x)$, gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ funkcije čije izvode nalazimo rešavanjem sistema:

$$
\begin{aligned}
&C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) + \ldots + C_n'(x)\,y_n(x) = 0\\
&C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)\,y_n'(x) = 0\\
&\cdots\\
&C_1'(x)\,y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)\,y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-2)}(x) = 0\\
&C_1'(x)\,y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\,y_n^{(n-1)}(x) = F(x).
\end{aligned}
$$

Primer

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $x\,(1-x)\,y'' + (2x^2-1)\,y' + 2\,(1-2x)\,y = 2\,x^2\,(x-1)^2$, $x \in (1,+\infty)$, *ako se zna da je jedno partikularno rešenje odogovarajuće homogene jednačine oblika* $y_1 = a\,e^{b\,x}$.

Rešenje.

Za funkciju $y_1(x) = a\,e^{b\,x}$ važi $y_1'(x) = a\,b\,e^{b\,x}$ i $y_1''(x) = a\,b^2\,e^{b\,x}$. Zamenom funkcije y_1 i njenih izvoda u datu diferencijalnu jednačinu $x\,(1-x)\,y'' + (2x^2-1)\,y' + 2\,(1-2x)\,y = 0$ dobijamo $a\,b^2\,x\,(1-x)\,e^{b\,x} + a\,b\,(2x^2-1)\,e^{b\,x} + 2\,a\,(1-2x)\,e^{b\,x} = 0$, odnosno $(2\,b-b^2)\,x^2 + (b^2-4)\,x + 2 - b = 0$, odakle sledi da je $b=2$ i za $a=1$ dobijamo jedno partikularno rešenje $y_1(x) = e^{2\,x}$. Drugo linearno nezavisno rešenje dobijalmo primenom LIOUVILLEove formule na jednačinu $y'' - \frac{2x^2-1}{x\,(x-1)}\,y' + 2\,\frac{2x-1}{x\,(x-1)}\,y = 0$. Imamo

$$\begin{aligned}
y_2 &= e^{2x}\int \frac{1}{e^{4x}} e^{\int \frac{2x^2-1}{x(x-1)}\,dx} dx = e^{2x}\int \frac{1}{e^{4x}} e^{\int \frac{2x^2-2x+2x-1}{x^2-x}\,dx} dx \\
&= e^{2x}\int \frac{1}{e^{4x}} e^{\int 2\,dx + \int \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx} dx = e^{2x}\int (x^2-x)e^{-2x}\,dx \\
&= \left\{ \begin{matrix} u = x^2-x, & dv = e^{-2x}\,dx, \\ du = (2x-1)\,dx, & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right\} \\
&= e^{2x}\left(-\frac{x^2-x}{2}e^{-2x} + \int \frac{2x-1}{2} e^{-2x}\,dx \right) \\
&= \left\{ \begin{matrix} u = \frac{2x-1}{2} & dv = e^{-2x}\,dx, \\ du =, dx, & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right\} \\
&= -\frac{x^2-x}{2} + e^{2x}\left(-\frac{2x-1}{4}e^{-2x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx \right) \\
&= -\frac{x^2-x}{2} - \frac{2x-1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Opšte rešenje homogene jednačine je
$y(x) = C_1 y_1(x) - 2\,C_2 y_2(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x^2.$

Odredimo sada rešenje nehomogene jednačine $y'' - \frac{2x^2-1}{x(x-1)} y' + 2\frac{2x-1}{x(x-1)} y = 2x(1-x)$ korišćenjem metode neodređenih koeficijenata. Rešavamo sistem

$$C_1'(x)\, e^{2x} + C_2'(x)\, x^2 = 0$$

$$2\,C_1'(x)\, e^{2x} + 2C_2'(x)\, x = 2x(1-x).$$

Dobijamo da je $(x-x^2)\, C_2'(x) = x(1-x)$, tj. $C_2'(x) = 1$ i $C_1'(x) = -x^2\, e^{-2x}$. Sledi da je $C_2(x) = \int dx = x + D_2$ i

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int x^2\, e^{-2x}\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2, & dv = e^{-2x}\, dx, \\ du = 2x\, dx, & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{x^2}{2} e^{-2x} - \int x e^{-2x}\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & dv = e^{-2x}\, dx, \\ du = dx, & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{x^2+x}{2} e^{-2x} - \int \frac{1}{2} e^{-2x}\, dx = \frac{x^2+x}{2} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + D_1 \\ &= \frac{2x^2+2x+1}{4} e^{-2x} + D_1 \end{aligned}$$

Opšte rešenje nehomogene jednačine je $y(x) = C_1(x) y_1(x) - 2\, C_2(x) y_2(x) = D_1 e^{2x} + D_2 x^2 + \frac{2x^2+2x+1}{4} + x^3.$

Homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima je diferencijalna jednačina oblika

$$y^{(n)}(x) + f_1\, y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_{n-1}\, y'(x) + f_n\, y(x) = 0,$$

gde su $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ konstante.
Potražimo rešenje date jednačine u obliku $y(x) = e^{\lambda x}$. Kako je $y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$ zamenom u datu jednačinu dobijamo algebarsku jednačinu

$$\lambda^n + f_1\, \lambda^{n-1} + \ldots + f_{n-1}\, \lambda + f_n = 0,$$

koju nazivamo ***karakterističnom jednačinom***, koja je pridružena polaznoj diferencijalnoj jednačini.
Svakom korenu karakteristične jednačine odgovara jedno partikularno rešenje diferencijalne jednačine. Tako dobijena partikularna rešenja čine skup linearno nezavisnih funkcija (fundamentalni sistem rešenja).

- Ako je λ prost realan koren karakteristične jednačine, onda je odgovarajuće partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y_p = e^{\lambda x}$.
- Ako je λ realan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, onda su odgovarajuća partikularna rešenje diferencijalne jednačine $y_{p_1} = e^{\lambda x}, y_{p_2} = xe^{\lambda x}, \ldots, y_{p_k} = x^{k-1}e^{\lambda x}$.
- Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ prost kompleksan koren karakteristične jednačine, onda je i $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ prost kompleksan koren karakteristične jednačine, a odgovarajuća partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ i $y_{p_2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$.
- Ako je $\lambda = \alpha + i\beta$ kompleksan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, onda je i $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ kompleksan koren reda $k, k > 1$, karakteristične jednačine, a odgovarajuća partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1} = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{p_2} = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, y_{p_k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{p_{k+1}} = e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{p_{k+2}} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, y_{p_{2k}} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Primer

Odrediti opšte rešenje diferencijalnih jednačina:

i) $y'' - 2y' + y = 0$;

ii) $y'' + y = 0$;

iii) $y'' + ay = 0$;

iv) $y''' + 3y'' + 9y - 13y = 0$;

v) $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Rešenje.

i) Pridružena karakteristična jednačina je $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$. Data jednačina ima jedan realan koren reda dva, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1} = e^x$ i $y_{p_2} = xe^x$. Opšte rešenje date jednačine je $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

ii) Pridružena karakteristična jednačina je $\lambda^2 + 1 = 0$. Data jednačina ima konjugovano kompleksne korene $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1} = \sin x$ i $y_{p_2} = \cos x$. Opšte rešenje date jednačine je $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

iii) Razmotrimo sledeća tri slučaja.
1° Neka je $a = 0$. Data diferencijalna jednačina se svodi na jednačinu $y'' = 0$. Pridružena karakteristična jednačina je $\lambda^2 = 0$. Data jednačina ima jedan realan koren reda dva, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Odgovarajuća partikularna rešenja su $y_{p_1} = 1$ i $y_{p_2} = x$. Opšte rešenje jednačine je $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 + C_2 x$.
2° Neka je $a < 0$. Tada postoji $b > 0$ takvo da je $a = -b^2$. Diferencijalna jednačina glasi $y'' - b^2 y = 0$, a pridružena karakteristična $\lambda^2 - b^2 = 0$. Njena rešenja su realni i različiti koreni $\lambda_1 = b$ i $\lambda_2 = -b$. Partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1} = e^{bx}$ i $y_{p_2} = e^{-bx}$, dok je opšte rešenje date jednačine $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 e^{bx} + C_2 e^{-bx}$.

3° Neka je $a > 0$. Tada postoji $b > 0$ takvo da je $a = b^2$. Diferencijalna jednačina glasi $y' + b^2 y = 0$, a pridružena karakteristična $\lambda^2 + b^2 = 0$. Njena rešenja su konjugovano kompleksni brojevi $\lambda_1 = b\,i$ i $\lambda_2 = -b\,i$. Partikularna rešenja diferencijalne jednačine su $y_{p_1} = \cos(bx)$ i $y_{p_2} = \sin(bx)$, dok je opšte rešenje date jednačine
$y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} = C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)$.

iv) Karakteristična jednačina date diferencijalne jednačine je $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0$. Jedan koren ove jednačine je $\lambda_1 = 1$. Koristeći Hornerovu šemu

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & 9 & -13 \\ \hline & 1 & 4 & 13 & 0 \end{array}$$

dobijamo da su druga dva korena koreni jednačine
$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 + 9 = (\lambda + 2)^2 + 3^2 = 0$, tj. $\lambda_2 = -2 + 3i$ i $\lambda_3 = -2 - 3i$. Partikularna rešenja polazne jednačine su $y_{p_1} = x$, $y_{p_2} = e^{-2x}\cos(3x)$ i $y_{p_3} = e^{-2x}\sin(3x)$. Opšte rešenje je $y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} + C_3 y_{p_3} =$
$C_1 x + C_2 e^{-2x}\cos(3x) + C_3 e^{-2x}\sin(3x)$.

v) U ovom primeru karakteristična jednačina je
$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 =$
$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 + 2(2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda) = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0.$
Njeni koreni reda dva su $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i$ i
$\lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i$. Odgovarajuća partikularna rešenja su
$y_{p_1} = e^{-x}\cos x$, $y_{p_2} = x\,e^{-x}\cos x$, $y_{p_3} = e^{-x}\sin x$ i
$y_{p_4} = x\,e^{-x}\sin x$. Opšte rešenje diferencijalne jednačine je
$y = C_1 y_{p_1} + C_2 y_{p_2} + C_3 y_{p_3} + C_4 y_{p_4} =$
$C_1\,e^{-x}\cos x + C_2\,x\,e^{-x}\cos x + C_3\,e^{-x}\sin x + C_4\,x\,e^{-x}\sin x.$

Primer

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Rešenje.

Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je
$y_h = C_1\sin x + C_2\cos x.$

Primenimo metodu varijacije konstanata. Rešavamo sistem

$$C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0$$
$$C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = \operatorname{tg} x.$$

Imamo da je $C_1'(x) = \sin x$ i $C_2'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$. Važi da je
$C_1(x) = \int \sin x\, dx = -\cos x + D_1$ i

$$\begin{aligned} C_2(x) &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cos x\, dx \\ &= -\int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \cos x\, dx = \left\{ \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt = t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + D_2 \\ &= \sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x-1}{\sin x+1} \right| + D_2. \end{aligned}$$

Opšte rešenje nehomogene jednačine je

$$\begin{aligned} y &= (-\cos x + D_1)\sin x + \left(\sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x-1}{\sin x+1} \right| + D_2 \right) \cos x \\ &= D_1 \sin x + D_2 \cos x + \frac{\cos x}{2} \ln \left| \frac{\sin x-1}{\sin x+1} \right|. \end{aligned}$$

Primer

Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + y = e^x + \sin x \cos(3x)$.

Rešenje.

Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je $y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Razmotrimo sada nehomogenu diferencijalnu jednačinu $y'' + y = e^x$. Kako je nehomogeni deo u obliku $F(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$ primenjujemo metod neodređenih koeficijenata. Ispitujemo da li je $\lambda = 1$ koren pridružene karakteristične jednačine $\lambda^2 + 1 = 0$. Pošto nije, partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_1} = A e^x$. Važi da je $y_{p_1} = A e^x$, $y'_{p_1} = A e^x$ i $y''_{p_1} = A e^x$. Zamenom funkcije y_{p_1} i njenog drugog izvoda u jednačinu $y'' + y = e^x$ dobijamo $2 A e^x = e^x$, tj. $A = \frac{1}{2}$.

Nadalje, rešavamo diferencijalnu jednačinu $y'' + y = \sin x \cos(2x)$. Nehomogeni deo, transformacijom proizvoda trigonometrijskih funkcija u razliku, možemo zapisati kao $\sin x \cos(2x) = \frac{1}{2}(\sin(3x) - \sin x)$. Tražimo partikularna rešenja diferencijalnih jednačina $y'' + y = \frac{1}{2}\sin(3x)$ i $y'' + y = -\frac{1}{2}\sin x$. Kako $\lambda = 3i$ nije rešenje karakteristične jednačine imamo da je partikularno rešenje prve jednačine oblika $y_{p_2} = B\cos(3x) + C\sin(3x)$. Odgovarajući izvodi su $y'_{p_2} = -3B\sin(3x) + 3C\cos(3x)$ i $y''_{p_2} = -9B\cos(3x) - 9C\sin(3x)$. Zamenom u diferencijalnu jednačinu $y'' + y = \frac{1}{2}\sin(3x)$ dobijamo $-9B\cos(3x) - 9C\sin(3x) + B\cos(3x) + C\sin(3x) = \frac{1}{2}\sin(3x)$, tj. $-8B\cos(3x) - 8C\sin(3x) = \frac{1}{2}\sin(3x)$. Za konstante B i C važi $B = 0$ i $C = -\frac{1}{16}$, a za partikularno rešenje y_{p_2} imamo $y_{p_2} = -\frac{1}{16}\sin(3x)$.

Partikularno rešenje diferencijalne jednačinu $y'' + y = -\frac{1}{2}\sin x$ tražimo u obliku $y_{p_3} = x\,(D\cos x + E\sin x)$, jer je $\lambda = i$ rešenje karakteristične jednačine $\lambda^2 + 1 = 0$. Odgovarajući izvodi su
$y'_{p_2} = D\cos x + E\sin x - x\,D\sin x + x\,E\cos x$ i
$y''_{p_2} = -D\sin x + E\cos x - D\sin x + E\cos x - x\,D\cos x - x\,E\sin x$.
Zamenom u diferencijalnu jednačinu $y'' + y = -\frac{1}{2}\sin x$ dobijamo
$-2\,D\sin x + 2\,E\cos x - x\,D\cos x - x\,E\sin x + x\,D\cos x + x\,E\sin x = -\frac{1}{2}\sin x$. Za konstante D i E važi $D = \frac{1}{4}$ i $E = 0$, a za partikularno rešenje y_{p_3} imamo $y_{p_3} = \frac{x}{4}\cos x$.
Opšte rešenje polazne jednačine je $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{16}\sin(3\,x) + \frac{x}{4}\cos x$. $\square$

Primer

Za razne vrednosti realnog parametra a odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + ay = e^{-x} + x^2$.

Rešenje.

Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je

$$y_h = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{-a}x} + C_2 e^{-\sqrt{-a}x}, & a < 0, \\ C_1 + C_2 x, & a = 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{a}x) + C_2 \sin(\sqrt{a}x), & a > 0. \end{cases}$$

Odredimo prvo partikularno rešenje nehomogene jednačine $y'' + ay = e^{-x}$ u zavisnosti od vrednosti realnog parametra a. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine je $\lambda^2 + a = 0$. Za $a = -1$, $\lambda = -1$ jeste prost koren ove jednačine, prema tome partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_1} = xAe^{-x}$.

Imamo izvode $y'_{p_1} = (1-x)\,A\,e^{-x}$ i $y''_{p_1} = (-2+x)\,A\,e^{-x}$. Zamenom u jednačinu $y'' - y = e^{-x}$ dobijamo $(-2+x)\,A\,e^{-x} - x\,A\,e^{-x} = e^{-x}$, tj. da je $A = -\frac{1}{2}$ i $y_{p_1} = -\frac{x}{2}\,e^{-x}$. Ako je $a \neq -1$, onda $\lambda = -1$ nije koren karakteristične jednačine. Partikularno rešenje je oblika $y_{p_1} = B\,e^{-x}$. Za izvode imamo $y'_{p_1} = -B\,e^{-x}$ i $y''_{p_1} = B\,e^{-x}$. Dobijamo jednakost $B\,e^{-x} + a\,B\,e^{-x} = e^{-x}$, odakle sledi $B = \frac{1}{1+a}$ i $y_{p_1} = \frac{1}{1+a}\,e^{-x}$. Razmotrimo sada oblik partikularno rešenje nehomogene jednačine $y'' + a\,y = x^2$ u zavisnosti od vrednosti realnog parametra a. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine je $\lambda^2 + a = 0$. Za $a = 0$, $\lambda = 0$ jeste koren reda 2 ove jednačine, prema tome partikularno rešenje tražimo u obliku $y_{p_2} = x^2\,(C\,x^2 + D\,x + E)$. Odgovarajući izvodi su $y'_{p_2} = 4\,C\,x^3 + 3\,D\,x^2 + 2\,E\,x$ i $y''_{p_2} = 12\,C\,x^2 + 6\,D\,x + 2\,E$.

Zamenom u jednačinu $y'' = x^2$ dobijamo $12\,C\,x^2 + 6\,D\,x + 2\,E = x^2$, tj. da je $C = \frac{1}{12}$, $D = E = 0$ i $y_{p_2} = \frac{1}{12}\,x^4$. Ako je $a \neq 0$, onda $\lambda = 0$ nije koren karakteristične jednačine. Partikularno rešenje je oblika $y_{p_2} = F\,x^2 + G\,x + H$. Za izvode imamo $y'_{p_2} = 2\,F\,x + G$ i $y''_{p_2} = 2\,F$. Dobijamo jednakost $2\,F + a(F\,x^2 + G\,x + H) = x^2$, odakle sledi $F = \frac{1}{a}$, $G = 0$, $H = -\frac{2}{a^2}$ i $y_{p_2} = \frac{1}{a}\,x^2 - \frac{2}{a^2}$.

Opšte rešenje nehomogene jednačine je $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} =$

$$\begin{cases} C_1\,e^{\sqrt{-a}\,x} + C_2\,e^{-\sqrt{-a}\,x} + \frac{1}{1+a}\,e^{-x} + \frac{1}{a}\,x^2 - \frac{2}{a^2}, & a < 0 \wedge a \neq 1, \\ C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-x} - \frac{x}{2}\,e^{-x} - x^2 - 2, & a = -1, \\ C_1 + C_2\,x + e^{-x} + \frac{1}{12}\,x^4, & a = 0, \\ C_1\,\cos(\sqrt{a}\,x) + C_2\,\sin(\sqrt{a}\,x) + \frac{1}{1+a}\,e^{-x} + \frac{1}{a}\,x^2 - \frac{2}{a^2}, & a > 0. \end{cases}$$

$\square$

- Milan Merkle,
  Matematička analiza, teorija i hiljadu zadataka, za studente tehnike,
  Akademska misao, Beograd.
- Jelena Katić, Maša Đorić,
  Analiza 3,
  Matematički fakultet, Beograd.
- Svetlana Janković, Julka Knežević–Miljanović,
  Diferencijalne jednačine 1,
  Matematički fakultet, Beograd.
- Radoje Šćepanović, Julka Knežević–Miljanović, Ljubomir Protić,
  Diferencijalne jednačine,
  Matematički fakultet, Beograd.
- Milorad Bertolino,
  Diferencijalne jednačine,
  Zavod za udžbenike, Beograd.
- Pavle Miličić, Momčilo Ušćumlić,
  Zbirka zadataka iz više matematike II,
  Građevinska knjiga, Beograd.
- Frank Ayres, JR,
  Differential Equation, Schaum's Outline Series,
  McGraw-Hill Book Company, New York.