Polovljenje intervala

$[a,b]$ – nalazi se rešenje ako $\boxed{f(a)\cdot f(b) < 0}$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$f(a)\cdot f(x) < 0 \qquad a = a \quad b = x$

$f(b)\, f(x) < 0 \qquad a = x \quad b = b$

Prosta iteracija

Svede se na oblik $x = g(x)$ tako da

$|g'(x)|$ na $[a,b]$ $< \cancel{0}\ 1 > 0$

$$x_n = g(x_{n-1})$$

Njutnova metoda

$[a,b]$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Metoda sečice

$[a, b]$

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Gausova metoda

Svedemo matricu $[A, b]$ na gornje trougaonu i rešavamo unazad

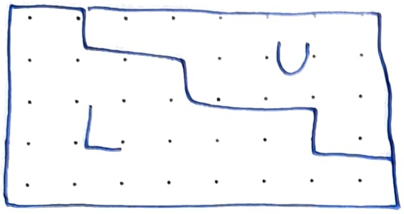
$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \qquad x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k\right)$$

Gausove transformacije treba sprovesti onoliko puta koliko redova imamo -1

LU dekompozicija

Svodimo [A, b] na ~~dve~~ matrice L · U

L - donje trougaona



U - gornje trougaona

Rešavamo unapred / unazad

$$L \cdot y = b$$

$$U \cdot x = y$$

Počinjemo od L - prva kolona L je ista kao prva kolona A

Za L nema deljenja ; Za U ima deljenja

Pivotiranje

Sve isto kao Gausova, samo što u svakom koraku i biramo najveći el. u i-toj koloni i tu vrstu dovodimo na 1 mesto

Jakobijeva iterativna metoda

Iz svake jednačine izrazimo po x_n

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \dots + \frac{b_1}{a_{11}} = G_1(x)$$

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 \dots + \frac{b_2}{a_{22}} = G_2(x)$$

$$x_1(n) = G_1(x_{n-1})$$

$$x_2(n) = G_2(x_{n-1})$$

Početne vrednosti x_n su 0

Gaus - Zajdelova

Isti princip sa malom modifikacijom

$$x_1(n) = G_1(x_{n-1})$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right\} = G_n(x_n)$$

Gde god možemo koristimo x_n trenutne iteracije, a gde ne može koristimo x_{n-1} iz prosle

Polinomska interpolacija

Dobijemo funkciju - vrednosti u tačkama

x_1	x_2	x_3	...	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_n)$

na osnova toga možemo rešiti sistem od najviše n nepoznatih i dobiti polinom najviše n stepena koji nam aproksimira $f(x)$.

x_0	x_1	x_2
5	8	9

0	1	2
5	8	9

$$p_2(x_0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 5$$

$$p_2(x_1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 = 8$$

$$p_2(x_2) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 = 9$$

$$\boxed{p_2(x) = 5 + 4x - x^2}$$

Lagranžova interpolacija

Tabela

$x - x_0 \quad x_0 - x_1 \quad \dots \quad x_0 - x_n$

$x_1 - x_0 \quad x - x_1 \quad \dots$

$\vdots \quad \dots \quad \vdots$

D_0 - proizvod vrste

D_1

$\vdots$

D_n

P - proizvod dijagonale

$$\boxed{L(x) = P \cdot \sum \frac{f(x_i)}{D_i}} \qquad \boxed{R = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |P|}$$

Lagranžov polinom je u stvari proizvod dijagonale $L = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

Njutnova interpolacija

x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\vdots$
x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_{n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
			$\Delta^2 f_{n-2}$	
x_n	f_n	Δf_{n-1}		

h - korak

$$u = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0 \qquad \Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0$$

$$\Delta f_1 = f_2 - f_1 \qquad \Delta^3 f_0 = \Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0$$

$$N(x) = f_0 + \Delta f_0 \cdot u + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} u \cdot (u-1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} u \cdots (u-n+1)$$

Ovo je polinom za unapred – pa za početak (x_0) biramo najmanje x_n najbliže našoj traženoj vrednosti | sve u istoj liniji

$$N(x) = f_n + \Delta f_{n-1} \cdot v + \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!} v(v+1) + \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} v \cdots (v+n-1)$$

Ovo je za unazad pa biramo veće x_n

$$v = \frac{x - x_n}{h}$$ | stepenasto

Greske pri interpolaciji

$$R = \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!} |u \cdot (u-1) \cdot \ldots \cdot (u-n)|$$

$$R = \frac{|\Delta^{n+1} f|}{(n+1)!} |v \cdot (v+1) \cdot \ldots \cdot (v+n)|$$

uzima se maks vrednost iz $\Delta^{n+1} f$ kolonc

Inverzna interpolacija

Inverzan proces, obrnemo - invertujemo tabelu ↑↓ ⇆

x	2	2,5	3,5	4
$f(x)$	9	5	3	7

	y_0	y_1	y_2	y_3
y	7	3	5	9
$f^{-1}(y)$	4	3,5	2,5	2

⟹ Sa ovim pravimo tabelu

Trapezna integracija

$$T = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right)$$

f_0 – prvi f_n – poslednji

f_i – svi među $* 2$

Biramo dovoljno malo h:

$$R_T \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2$$

$R = R_T + E$

$R \leq \mathcal{E}$ izabrati h dovoljno malo da greška bude $\leq$ od tačnosti

Simpsonova integracija

$$S = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2m} + 4(f_1 + \dots + f_{2m-1}) + 2(f_2 + \dots + f_{2m-2})\right)$$

neparno $f_i * 4$

parno $f_i * 2$

$$R_S \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4$$

h mora da bude dovoljno malo i da daje paran broj koraka

$R = R_S + E$

$R \leq \mathcal{E}$

E – greška zaokruživanja

$$E = (b-a) \cdot \varepsilon$$

$\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-k}$ k – broj decimala

Rombergova integracija

Sprovodimo trapeznu formulu više puta, ali svaki put se h polovi

$h_1 = 0{,}5$ $h_2 = 0{,}25$ $h_3 = 0{,}125$ --- h_i

Zatim radimo ekstrapolaciju

$$T_K = \frac{4^k \cdot T_i - T_{i-1}}{4^k - 1}$$

T_i – trapezne

T_K – ekstrapolacije

Zaustavljamo kada je $|T_K - T_{K-1}| \leq \varepsilon$

Procena greške – $|T_{11} - T_{22} - T_{33} \dots - T_{nn}|$