Matematika 1

Ivana Jovović
ivana@etf.rs

Sadržaj

Skup je osnovni matematički pojam i on se ne definiše.

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ skup prirodnih brojeva
2. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ prošireni skup prirodnih brojeva
3. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ skup celih brojeva
4. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ skup racionalnih brojeva
5. $\mathbb{R}$ skup realnih brojeva
6. $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ skup kompleksnih brojeva

Važi $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Skupovna definicija ***uređenog para***: $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$.

U skupu $\{a,b\}$ nije bitan poredak elemenata,
važi $\{a,b\} = \{b,a\}$.

U slučaju uređenog para (a,b) bitan je poredak,
$(a,b) \neq (b,a)$, za $a \neq b$.

Dekartov proizvod $A \times B$ nepraznih skupova A i B definiše se kao skup uređenih parova čija prva komponenta pripada skupu A, a druga komponenta pripada skupu B:

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Funkcija (***preslikavanje***) f nepraznog skupa A u neprazan skup B, u oznaci $f : A \to B$, je podskup skupa $A \times B$ takav da važe sledeća dva uslova:

i) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)\,(x, y) \in f$;
ii) $(\forall x \in A)(\forall y_1, y_2 \in B)\,(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

Skup A naziva se ***domen*** (***oblast definisanosti***) funkcije f.

Skup B naziva se ***kodomen*** funkcije f.

Ako je $(x, y) \in f$, onda se x naziva ***originalom***,
a y ***slikom*** elementa x.

Skup svih slika u oznaci $f(A)$ naziva se ***skupom vrednosti*** funkcije f, $f(A) = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(x, y) \in f\}$.

Funkcija $f : A \to B$ naziva se ***surjekcijom*** (na), ako i samo ako je $B = f(A)$, tj. ako i samo ako $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(x, y) \in f$.

Funkcija $f : A \to B$ naziva se ***injekcijom*** (1-1), ako i samo ako $(\forall x_1, x_2 \in A)(\forall y \in B)(x_1, y) \in f \wedge (x_2, y) \in f \Rightarrow x_1 = x_2$.

Funkcija $f : A \to B$ naziva se ***bijekcijom*** ako i samo ako je surjekcija i injekcija.

Koristićemo oznaku $y = f(x)$ umesto $(x, y) \in f$.

Binarna operacija na nepraznom skupu G je preslikavanje $\circ : G \times G \to G$.
Uređeni par $(G, \circ)$, gde je G neprazan skup, a $\circ$ binarna operacija na skupu G, nazivamo ***grupoid***.
Za predstavljanje binarne operacije na konačnom skupu koristimo ***Kejlijevu tablicu***.

Primer

Kejlijeva tablica sabiranja po modulu 3

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Ako u grupoidu $(G, \circ)$ za elemente $a, b \in G$ važi $a \circ b = b \circ a$, onda za elemente a i b kažemo da su ***permutabilni***.

Ako su u grupoidu $(G, \circ)$ svaka dva elementa permutabilna, kažemo da je binarna operacija $\circ$ ***komutativna***.

Ako u grupoidu $(G, \circ)$ za svaka tri elementa $a, b, c \in G$ važi $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, kažemo da je binarna operacija $\circ$ ***asocijativna***.

Element e_1 grupoida $(G, \circ)$ za koji važi $(\forall a \in G)\, e_1 \circ a = a$ nazivamo ***levim neutralnim elementom***.

Element e_2 grupoida $(G, \circ)$ za koji važi $(\forall a \in G)\, a \circ e_2 = a$ nazivamo ***desnim neutralnim elementom***.

Teorema

Ako u grupoidu $(G, \circ)$ postoje levi neutralni element e_1 i desni neutralni element e_2, onda je $e_1 = e_2$.

Dokaz:

Po definiciji levog neutralnog elementa, važi $e_1 \circ e_2 = e_2$. Po definiciji desnog neutralnog elementa, važi $e_1 \circ e_2 = e_1$. Prema tome, $e_1 = e_2$.

Element e grupoida $(G, \circ)$ za koji važi $(\forall a \in G)\, a \circ e = e \circ a = a$ nazivamo ***neutralnim elementom***.

Teorema

Ako u grupoidu $(G, \circ)$ postoji neutralni element, onda je on jedinstven.

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, da postoje dva neutralna elementa e_1 i e_2 u grupoidu $(G, \circ)$. Tada po definiciji neutralnog elementa, važi $e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$.

Neka grupoid $(G, \circ)$ ima neutralni element e.

Element $a \in G$ ima ***levi inverzni element*** $a' \in G$ ako važi jednakost $a' \circ a = e$.

Element $a \in G$ ima ***desni inverzni element*** $a'' \in G$ ako važi jednakost $a \circ a'' = e$.

Element $a \in G$ ima ***inverzni*** element ako ima levi inverzni element a', desni inverzni element a'' i ako važi $a' = a''$.

Grupoid $(G, \circ)$ čija je binarna operacija $\circ$ asocijativna, naziva se ***semigrupa***.
Semigrupa $(G, \circ)$ sa neutralnim elementom, naziva se ***monoid***.

Theorem

U monoidu $(G, \circ)$ ako element $a \in G$ ima levi inverzni element a' i desni inverzni element a'', onda je $a' = a''$.

Dokaz:
Zaista, $a' = a' \circ e = a' \circ (a \circ a'') = (a' \circ a) \circ a'' = e \circ a'' = a''$.

Teorema

U monoidu $(G, \circ)$ element $a \in G$ ima najviše jedan inverzni element.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da element $a \in G$ ima dva inverzna elementa a' i a'' u semigrupi $(G, \circ)$. Tada po definiciji inverznog elementa, važi
$a' = a' \circ e = a' \circ (a \circ a'') = (a' \circ a) \circ a'' = e \circ a'' = a''$.

Zadatak (16. zadatak, glava 4.1)

U skupu $G = \{1,2,3,4,5\}$ *binarna operacija* $\circ$ *definisana je pomoću Kejlijeve tablice:*

$\circ$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	1	1	3
3	3	4	5	1	1
4	4	1	1	2	3
5	5	1	1	5	3

a) *Da li grupoid* $(G, \circ)$ *ima neutralni element?*
b) *Za element* 2 *odrediti leve i desne inverzne elemente?*
c) *Da li je binarna operacija* $\circ$ *asocijativna?*

a) Neutralni element grupoida $(G, \circ)$ je 1.

b) $2 \circ 3 = 1$, $2 \circ 4 = 1$
Elementi 3 i 4 su desni inverzni elementi elementa 2.

$4 \circ 2 = 1$, $5 \circ 2 = 1$
Elementi 4 i 5 su levi inverzni elementi elementa 2.

c) Binarna operacija $\circ$ nije asocijativna.

$5 \circ (2 \circ 3) = 5 \circ 1 = 5$
$(5 \circ 2) \circ 3 = 1 \circ 3 = 3$

Grupoid $(G, \circ)$ sa sledećim osobinama:

1. $(\forall a, b, c \in G)\, a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$,
   binarna operacija $\circ$ je asocijativna;
2. $(\exists e \in G)(\forall a \in G)\, a \circ e = e \circ a = a$,
   postoji neutralni element za binarnu operaciju $\circ$;
3. $(\forall a \in G)(\exists a^{-1} \in G)\, a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$,
   svaki element skupa G ima inverzni element u odnosu na binarnu operaciju $\circ$;

nazivamo ***grupa***.
Ako je binarna operacija $\circ$ komutativna, grupu $(G, \circ)$ nazivamo ***Abelova grupa***.

Primer

1. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ *aditivne grupe*
2. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$,$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$,$(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ *multiplikativne grupe*

Zadatak

Neka je u skupu $\mathbb{R}$ definisana operacija $\circ$ sa $x \circ y = x + y + 1$. Ispitati prirodu algebarske strukture $(\mathbb{R}, \circ)$.

Zatvorenost: Zbir dva realna broja je realan broj. Prema tome,

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\; x \circ y = x + y + 1 \in \mathbb{R}.$$

Asocijativnost: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\, x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

$$\begin{aligned} L &= x \circ (y \circ z) = x + (y \circ z) + 1 \\ &= x + (y + z + 1) + 1 = x + y + z + 2 \\ D &= (x \circ y) \circ z = (x + y + 1) \circ z \\ &= (x + y + 1) + z + 1 = x + y + z + 2 \end{aligned}$$

Prema tome, za svako $x, y, z \in \mathbb{R}$ važi $L = D$.

Komutativnost: $(\forall x, y \in \mathbb{R})\, x \circ y = y \circ x$

$$x \circ y = x + y + 1 \;=\; y + x + 1 = y \circ x$$

Neutralni element: $(\exists e \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\, x \circ e = e \circ x = x$

$$x \circ e = x + e + 1 = x \Rightarrow e + 1 = 0 \Rightarrow e = -1$$

Neutralni element u algebarskoj strukturi $(\mathbb{R}, \circ)$ je $e = -1$.

Inverzni elementi: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists x' \in \mathbb{R})\, x \circ x' = x' \circ x = e$

$$x \circ x' = x + x' + 1 = -1 \Rightarrow x' = -2 - x$$

Inverzni element elementa x u algebarskoj strukturi $(\mathbb{R}, \circ)$ je $x' = -2 - x$.

Algebarska struktura $(\mathbb{R}, \circ)$ je Abelova grupa.

Zadatak

Neka je u skupu $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ definisana operacija $*$ sa $x*y = x+y+x\cdot y$. Ispitati prirodu algebarske strukture $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},*)$.

Zatvorenost: Proizvod dva realna broja je realan broj. Zbir dva realna broja je realan broj. Prema tome,

$$(\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})\, x*y = x+y+x\cdot y\in\mathbb{R}.$$

Treba još pokazati da važi $x\neq -1\wedge y\neq -1\Rightarrow x*y\neq -1$.
Primenom kontrapozicije dokazujemo da važi
$x*y=-1\Rightarrow x=-1\vee y=-1$.

$$\begin{aligned} x*y=-1 &\Leftrightarrow x+y+x\cdot y=-1 &&\Leftrightarrow x+y+x\cdot y+1=0\\ &\Leftrightarrow x+1+y\cdot(x+1)=0 &&\Leftrightarrow (x+1)\cdot(y+1)=0\\ &\Leftrightarrow x=-1\vee y=-1. \end{aligned}$$

Asocijativnost: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\, x * (y * z) = (x * y) * z$

$$\begin{aligned} L &= x * (y * z) = x + (y * z) + x \cdot (y * z) \\ &= x + (y + z + y \cdot z) + x \cdot (y + z + y \cdot z) \\ &= x + y + z + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y \cdot z \\ D &= (x * y) * z = (x + y + x \cdot y) * z \\ &= (x + y + x \cdot y) + z + (x + y + x \cdot y) \cdot z \\ &= x + y + z + x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z + x \cdot y \cdot z \end{aligned}$$

Prema tome, za svako $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ važi $L = D$.

Komutativnost: $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\, x * y = y * x$

$$x * y = x + y + x \cdot y = y + x + y \cdot x = y * x$$

Neutralni element:

$(\exists e \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\, x * e = e * x = x$

$x * e = x + e + x \cdot e = x \Rightarrow e \cdot (1 + x) = 0 \Rightarrow e = 0$

Neutralni element u algebarskoj strukturi $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ je $e = 0$.

Inverzni elementi:

$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})(\exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\, x * x' = x' * x = e$

$x * x' = x + x' + x \cdot x' = 0 \Rightarrow x' \cdot (1 + x) = -x \Rightarrow x' = -\frac{x}{1+x}$

Inverzni element elementa x u algebarskoj strukturi $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ je $x' = -\frac{x}{1+x}$.

Algebarska struktura $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ je Abelova grupa.

Neka je data grupa $(G, \circ)$. Ako neprazan podskup H skupa G obrazuje grupu u odnosu na operaciju $\circ$, kažemo da je $(H, \circ)$ ***podgrupa*** grupe $(G, \circ)$.

Teorema

Algebarska struktura $(H, \circ)$ je podgrupa grupe $(G, \circ)$ ako važi:

1. $\emptyset \neq H \subseteq G$,
2. $(\forall a, b \in H)\ a \circ b \in H$,
3. $(\forall a \in H)\ a^{-1} \in H$.

Dokaz:

Asocijativnost se nasleđuje.

$\emptyset \neq H \subseteq G \Rightarrow (\exists a \in G)\ a \in H \overset{(3.)}{\Rightarrow} a^{-1} \in H$

$a, a^{-1} \in H \overset{(2.)}{\Rightarrow} a \circ a^{-1} = e \in H.$

Zadatak (37. zadatak, glava 4.1)

Dat je skup $G = \{x + y\sqrt{5} \mid x^2 - 5y^2 = 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$. *Dokazati da je* $(G, \cdot)$ *podgrupa grupe* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, *gde je operacija* $\cdot$ *množenje realnih brojeva.*

Zatvorenost: $x + y\sqrt{5}, u + v\sqrt{5} \in G$
$(x + y\sqrt{5}) \cdot (u + v\sqrt{5}) = xu + xv\sqrt{5} + yu\sqrt{5} + 5yv =$
$xu + 5yv + (xv + yu)\sqrt{5}$
$xu + 5yv, xv + yu \in \mathbb{Q}$
$(xu + 5yv)^2 - 5(xv + yu)^2 =$
$x^2u^2 + 10xyuv + 25y^2v^2 - 5x^2v^2 - 10xyuv - 5y^2u^2 =$
$x^2(u^2 - 5v^2) - 5y^2(u^2 - 5v^2) = (x^2 - 5y^2)(u^2 - 5v^2) = 1$
$\Rightarrow (x + y\sqrt{5}) \cdot (u + v\sqrt{5}) \in G$
Asocijativnost: Asocijativnost se nasleđuje iz grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Neutralni element: Neutralni element 1 grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ pripada skupu G, jer je $1 = 1 + 0\sqrt{5}$, pa je 1 neutralni element algebarske strukture $(G, \cdot)$.

Komutativnost: Komutativnost se nasleđuje iz grupe $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Inverzni elementi: $x + y\sqrt{5} \in G$
Inverzni element elementa $x + y\sqrt{5}$ u grupi $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je
$\frac{1}{x+y\sqrt{5}} = \frac{1}{x+y\sqrt{5}} \cdot \frac{x-y\sqrt{5}}{x-y\sqrt{5}} = \frac{x-y\sqrt{5}}{x^2-5y^2} = x - y\sqrt{5}$.
Ispitajmo da li $x - y\sqrt{5} \in G$?
$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x, -y \in \mathbb{Q}$
$x^2 - 5(-y)^2 = x^2 - 5y^2 = 1$
Prema tome, inverzni element $x - y\sqrt{5}$ elementa $x + y\sqrt{5}$ pripada skupu G.

Algebarska struktura $(G, \cdot)$ je Abelova grupa.

Grupoid $(G, \circ)$ u kome jednačine $a \circ x = b$ i $y \circ a = b$, $a, b \in G$, imaju jedinstveno rešenje naziva se ***kvazigrupa***.

Neka je grupoid $(G, \circ)$ predstavljen Kejlijevom tablicom. Grupoid $(G, \circ)$ je kvazigrupa ako i samo ako se u svakoj vrsti i svakoj koloni Kejlijeve tablice operacije $\circ$ svaki element pojavljuje tačno jednom, odnosno elementi u svakoj vrsti i svakoj koloni su različiti.

Primer

Grupoid $(\{0, 1, 2\}, +_3)$ *je kvazigrupa.*

U Kejlijevoj tablici operacije $+_3$ *u svakoj vrsti i svakoj koloni su različiti elementi.*

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Kvazigrupa $(G, \circ)$ sa neutralnim elementom, naziva se ***lupa***.

Teorema

Grupoid $(G, \circ)$ je grupa ako i samo ako je semigrupa i kvazigrupa.

Dokaz:

$\Rightarrow$: Ako je grupoid $(G, \circ)$ grupa, onda je on i semigrupa. U grupi $(G, \circ)$ rešenje jednačine oblika $a \circ x = b$ $(y \circ a = b)$, $a, b \in G$, je $x = a^{-1} \circ b$ $(y = b \circ a^{-1})$, gde je $a^{-1} \in G$ inverzni element elementa a. Zaista,

$x = e \circ x = (a^{-1} \circ a) \circ x = a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b$,

odnosno

$y = y \circ e = y \circ (a \circ a^{-1}) = (y \circ a) \circ a^{-1} = b \circ a^{-1}$.

$\Leftarrow$: Neka je a proizvoljan element u G. Pošto je $(G, \circ)$ kvazigrupa, jednačina $a \circ x = a$ ima jedinstveno rešenje e_a. Neka je c rešenje jednačine $y \circ a = b$, za proizvoljan element $b \in G$. Tada, pošto je $(G, \circ)$ semigrupa, važi $b = c \circ a = c \circ (a \circ e_a) = (c \circ a) \circ e_a = b \circ e_a$. Prema tome, e_a je desni neutralni element. Slično možemo pokazati da postoji levi neutralni element. U grupoidu u kome postoje levi i desni neutralni elementi važi njihova jednakost. Prema tome, element e_a je neutralni element i nadalje ćemo ga označavati sa e. Rešenja jednačina $a \circ x = e$ i $y \circ a = e$, daju nam levi i desni inverzni element elementa a. Pošto je $(G, \circ)$ semigrupa, levi i desni inverzni elementi su jednaki i daju nam inverzni element elementa a, za svako $a \in G$.

Preslikavanje $f : G \to H$ naziva se ***homomorfizam grupa*** $(G, \circ)$ i $(H, *)$ ako važi:

$$(\forall a, b \in G) f(a \circ b) = f(a) * f(b).$$

Ako je preslikavanje f bijektivno, homomorfizam nazivamo ***izomorfizam***.

Primer

Ispitati da li je preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dato sa $f(x) = 2^x$, kojim se elementi aditivne grupe $(\mathbb{R}, +)$ preslikavaju u elemente multiplikativne grupe $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, izomorfizam?

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dato sa $f(x) = 2^x$ je bijekcija.

Preslikavanje je homomorfizam:
$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ f(x + y) = 2^{x+y} = 2^x 2^y = f(x)f(y).$

Primer

Ispitati da li je preslikavanje $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *dato sa* $f(x) = x + 1$, *kojim se elementi grupe* $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ *preslikavaju u elemente grupe* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, *izomorfizam, ako je binarna operacija* $*$ *definisana sa* $x * y = x + y + x \cdot y$ *i* $\cdot$ *množenje realnih brojeva?*

Preslikavanje $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dato sa $f(x) = x + 1$ je bijekcija.

Preslikavanje je homomorfizam:

$(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})\ f(x * y) = x * y + 1 = x + y + x \cdot y + 1 =$
$x + 1 + y \cdot (x + 1) = (x + 1) \cdot (y + 1) = f(x) \cdot f(y)$.

Primer

Ispitati da li su grupe $(G, +_4)$ *i* $(H, \cdot)$ *izomorfne, ako je* $G = \{0, 1, 2, 3\}$, $+_4$ *sabiranje po modulu* 4, $H = \{1, -1, i, -i\}$ *i* $\cdot$ *množenje kompleksnih brojeva.*

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

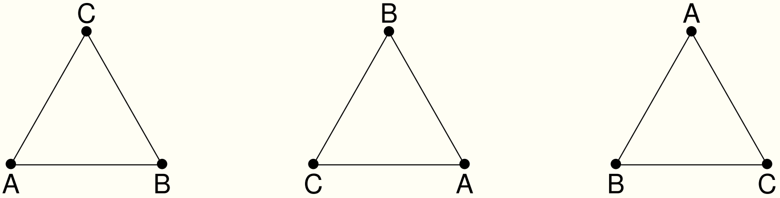
$\cdot$	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

Konstruišimo preslikavanje $f : G \to H$ tako da važi:
$0 \mapsto 1, 1 \mapsto i, 2 \mapsto -1, 3 \mapsto -i$, odnosno $(\forall x \in G)\ f(x) = i^x$.

Preslikavanje f je bijekcija.

Preslikavanje je homomorfizam:
$(\forall x, y \in G)\ f(x +_4 y) = i^{x+y} = i^x i^y = f(x) f(y)$.
$x + y = 4k + (x +_4 y) \Rightarrow i^{x+y} = i^{4k+(x+_4 y)} = (i^4)^k i^{x+_4 y} = i^{x+_4 y}$

Skup rotacija jednakostraničnog trougla za uglove $\iota = 0^\circ$, $\varphi = 120^\circ$ ili $\psi = 240^\circ$ u pozitivnom smeru oko centra opisanog kruga, sa operacijom kompozicije rotacija $\circ$ jeste grupa.



Kejlijeva tablica algebarske strukture $(\{i, \varphi, \psi\}, \circ)$ je:

$\circ$	ι	φ	ψ
ι	ι	φ	ψ
φ	φ	ψ	ι
ψ	ψ	ι	φ

.

Možemo zaključiti da je data algebarska struktura izomorfna grupi $(S, +_3)$, gde je $S = \{0, 1, 2\}$, a $+_3$ sabiranje po modulu 3.

Prethodno razmatranje možemo uopštiti na skup rotacija u pozitivnom smeru oko centra opisanog kruga pravilnog n-tougla za uglove $\varphi_k = k\frac{360^\circ}{n}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Skup svih rešenja jednačine $z^3 = 1$, sa operacijom množenja kompleksnih brojeva $\cdot$ jeste grupa.
Rešenja jednačine $z^3 = 1$ su:

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ i } z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

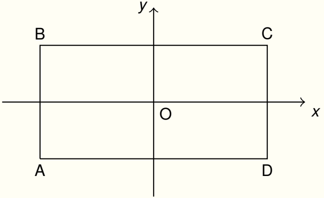
Kejlijeva tablica algebarske strukture $(\{z_1, z_2, z_3\}, \cdot)$ je:

$\circ$	z_1	z_2	z_3
z_1	z_1	z_2	z_3
z_2	z_2	z_3	z_1
z_3	z_3	z_1	z_2

Opet možemo zaključiti da je data algebarska struktura izomorfna grupi $(S, +_3)$.

Prethodno razmatranje možemo uopštiti na skup svih rešenja jednačine $z^n = 1$.

Neka je dat pravugaonik *ABCD*, čije se ose simetrije poklapaju sa koordinatnim osama.



Označimo sa χ i γ simetrično preslikavanje temena pravugaonika *ABCD* u odnosu na ose *Ox* i *Oy*, sa $o = \chi \circ \gamma$ kompoziciju ovih preslikavanja

(što u stvari predstavlja centralnu simetriju pravugaonika u odnosu na koordinatni početak) i sa ι identičko preslikavanje pravugaonika na samog sebe. Skup preslikavanja $\{\chi, \gamma, o, \iota\}$ sa operacijom kompozicije preslikavanja $\circ$ jeste grupa.

Kejlijeva tablica algebarske strukture $(\{\chi, \gamma, o, \iota\}, \circ)$ je:

$\circ$	ι	χ	γ	o
ι	ι	χ	γ	o
χ	χ	ι	o	γ
γ	γ	o	ι	χ
o	o	γ	χ	ι

.

Neka su date permutacije:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skup permutacija $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ sa operacijom kompozicije funkcija $\circ$ jeste grupa. Kejlijeva tablica algebarske strukture $(S, \circ)$ je:

$\circ$	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	P_2	P_1	P_4	P_3
P_3	P_3	P_4	P_1	P_2
P_4	P_4	P_3	P_2	P_1

.

Možemo primetiti da su prethodne dve algebarske strukture izomorfne, ali da nisu izomorfne sa grupom $(\{0, 1, 2, 3\}, +_4)$.

Algebarska struktura $(R, +, \cdot)$ sa dve binarne operacije naziva se ***prsten*** ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. $(R, +)$ je Abelova grupa;
2. $(R, \cdot)$ je semigrupa;
3. binarna operacija $\cdot$ je distributivna u odnosu na binarnu operaciju $+$:
   $(\forall x, y, z \in R)\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (leva distributivnost)
   $(\forall x, y, z \in R)\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (desna distributivnost).

Prsten $(R, +, \cdot)$ u kome je binarna operacija $\cdot$ komutativna naziva se ***komutativan prsten***.
Prsten $(R, +, \cdot)$ u kome binarna operacija $\cdot$ ima neutralni element naziva se ***prsten sa jedinicom***, a odgovarajući neutralni element se naziva ***jedinični element***.

Primer

Algebarska struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je komutativan prsten sa jedinicom.

Teorema

Dokazati da u prstenu $(R, +, \cdot)$ važe zakoni:

1. $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, *gde je* 0 *neutralni element za binarnu operaciju* $+$*;*
2. $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$*;*
3. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$*.*

1. $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x = 0$
2. $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$
   $x \cdot y + [-(x \cdot y)] = 0$
   $x \cdot y + (-x) \cdot y = [x + (-x)] \cdot y = 0 \cdot y = 0$
   Inverzni element svakog elementa u grupi $(R, +)$ je jedinstven. Prema tome, $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$.
3. $(-x) \cdot (-y) = -[x \cdot (-y)] = -[-(x \cdot y)]$
   Elementi $-[-(x \cdot y)]$ i $x \cdot y$ su inverzni elementi elementa $-(x \cdot y)$ u grupi $(R, +)$. Prema tome, $-[-(x \cdot y)] = x \cdot y$.

Neka je data prsten $(R, +, \cdot)$. Ako neprazan podskup P skupa R obrazuje prsten u odnosu na operacije $+$ i $\cdot$, kažemo da je $(P, +, \cdot)$ ***potprsten*** prstena $(R, +, \cdot)$.

Neka su $(R, +, \cdot)$ i $(P, \oplus, \odot)$ prsteni sa jediničnim elementima 1_R i 1_P. Preslikavanje $h : R \to P$ za koje važi:

1. $(\forall a, b \in R)\ h(a+b) = h(a) \oplus h(b)$;
2. $(\forall a, b \in R)\ h(a \cdot b) = h(a) \odot h(b)$;
3. $h(1_R) = 1_P$;

naziva se ***homomorfizam prstena***.

Ako je preslikavanje h bijektivno, homomorfizam nazivamo ***izomorfizam***.

Algebarska struktura $(T, +, \cdot)$ sa dve binarne operacije naziva se ***telo*** ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. $(T, +)$ je Abelova grupa;
2. $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa (0 je neutralni element binarne operacije $+$);
3. binarna operacija $\cdot$ je distributivna u odnosu na binarnu operaciju $+$.

Prsten sa jedinicom u kome su svi elementi različiti od neutralnog elementa binarne operacije $+$ invertibilni u odnosu na binarnu operaciju $\cdot$ je telo.
Telo $(T, +, \cdot)$ u kome je binarna operacija $\cdot$ komutativna, naziva se ***polje***.

Primer

Algebarske strukture $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *i* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *su polja.*

Primer

Ispitati prirodu algebarske strukture $(\mathbb{R}, \circ, *)$*, ako su operacije* $\circ$ *i* $*$ *definisane sa* $x \circ y = x + y + 1$ *i* $x * y = x + y + x \cdot y$*.*

Već smo pokazali da su $(\mathbb{R}, \circ)$ i $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ Abelove grupe.

Neutralni element za binarnu operaciju $\circ$ je -1, a inverzni element proizvoljnog elementa x je $-2 - x$.

Neutralni element za binarnu operaciju $*$ je 0, a inverzni element proizvoljnog elementa x je $-\frac{x}{1+x}$.

Ostalo je pokazati samo da je binarna operacija $*$ distributivna u odnosu na binarnu operaciju $\circ$. Kako je binarna operacija $*$ komutativna dovoljno je pokazati levu distributivnost: $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$.

$$
\begin{aligned}
L &= x * (y \circ z) = x * (y + z + 1) \\
&= x + (y + z + 1) + x \cdot (y + z + 1) \\
&= x + y + z + 1 + x \cdot y + x \cdot z + x \\
&= 1 + 2x + y + z + x \cdot y + x \cdot z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D &= (x * y) \circ (x * z) \\
&= (x + y + x \cdot y) \circ (x + z + x \cdot z) \\
&= x + y + x \cdot y + x + z + x \cdot z + 1 \\
&= 1 + 2x + y + z + x \cdot y + x \cdot z
\end{aligned}
$$

Prema tome, za svako $x, y, z \in \mathbb{R}$ važi $L = D$.

Primer

Ispitati da li je preslikavanje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *dato sa* $f(x)=x+1$, *kojim se elementi polja* $(\mathbb{R},\circ,*)$ *preslikavaju u elemente polja* $(\mathbb{R},+,\cdot)$, *izomorfizam, ako su binarne operacije* $\circ$ *i* $*$ *definisane sa* $x\circ y=x+y+1$ *i* $x*y=x+y+x\cdot y$, *a* $+$ *i* $\cdot$ *sabiranje i množenje realnih brojeva.*

Preslikavanje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dato sa* $f(x)=x+1$ *je bijekcija.*

Preslikavanje je homomorfizam:

1. $(\forall x,y\in\mathbb{R})\ f(x\circ y)=x\circ y+1=x+y+2=x+1+y+1=f(x)+f(y)$;
2. $(\forall x,y\in\mathbb{R})\ f(x*y)=x*y+1=x+y+x\cdot y+1=x+1+y\cdot(x+1)=(x+1)\cdot(y+1)=f(x)\cdot f(y)$;
3. $f(0)=0+1=1$.